DS4 (version A)

I. Exercice I

On considère l'espace $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ des matrices d'ordre 2 à coefficients réels. On définit :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{E} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \ / \ (a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \right\}$$

1. Montrer que $\mathcal{E}$ est un espace vectoriel et que (A, B, C) est une base de $\mathcal{E}$.

2. Établir que $\mathcal{E}$ est stable par multiplication, c'est à dire :

$$\forall (M, N) \in \mathcal{E}^2, \ MN \in \mathcal{E}$$

3. Montrer que, pour toute matrice M de $\mathcal{E}$, si M est inversible alors $M^{-1} \in \mathcal{E}$.
Pour toute matrice de $\mathcal{E}$, on note $f(M) = TMT$.

4. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathcal{E}$.

5. Vérifier que T est inversible et démontrer que f est un automorphisme de $\mathcal{E}$.

6. On note F la matrice de f dans la base (A, B, C) de $\mathcal{E}$.
Calculer $f(A), f(B), f(C)$ en fonction de (A, B, C) et en déduire F.

7. Déterminer une base et la dimension de $\mathrm{Ker}(f - \mathrm{id})$.

8. Soit λ un réel différent de 1. Résoudre l'équation $f(M) = \lambda M$, d'inconnue $M \in \mathcal{E}$.

On note $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $H = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

9. Calculer H^2, puis pour tout a de $\mathbb{R}$ et tout n de $\mathbb{N}$, $(I + aH)^n$.

10. Calculer, pour tout n de $\mathbb{N}$, F^n.

11. Trouver une matrice G de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $G^3 = F$.
Existe-t-il un endomorphisme g de $\mathcal{E}$ tel que $g \circ g \circ g = f$?

II. Exercice II

Soit n un entier supérieur ou égal à 2.
On considère une urne $\mathcal{U}$ contenant n boules numérotées de 1 à n et indiscernables au toucher.
On effectue une suite de tirages d'une boule avec remise de la boule dans l'urne $\mathcal{U}$.

Partie I

Soit k un entier supérieur ou égal à 1. Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, on note X_i la variable aléatoire égale au nombre d'obtentions de la boule numéro i au cours des k premiers tirages.

1. Soit $i \in [\![1, n]\!]$. Donner la loi de X_i. Rappeler l'espérance et la variance de X_i.

2. Les variables aléatoires $X_1, X_2, \ldots, X_n$ sont-elles indépendantes ?

3. Soit $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$ tel que $i \neq j$.

a) Déterminer la loi de la variable $X_i + X_j$. Rappeler la variance de $X_i + X_j$.

b) En déduire la covariance du couple (X_i, X_j).

Pour tout entier k supérieur ou égal à 1, on note Z_k la variable aléatoire égale au nombre de numéros distincts obtenus au cours des k premiers tirages et on note $\mathbb{E}(Z_k)$ l'espérance de Z_k.

Partie II

4. Déterminer la loi de la variable Z_1 et la loi de la variable Z_2.
En déduire $\mathbb{E}(Z_1)$ et $\mathbb{E}(Z_2)$.

5. Soit k un entier supérieur ou égal à 1.

a) Déterminer $\mathbb{P}([Z_k = 1])$ et déterminer $\mathbb{P}([Z_k = k])$.

b) Montrer, pour tout $\ell \in [\![1, n]\!]$: $\mathbb{P}([Z_{k+1} = \ell]) = \dfrac{\ell}{n}\, \mathbb{P}([Z_k = \ell]) + \dfrac{n - \ell + 1}{n}\, \mathbb{P}([Z_k = \ell - 1])$.

c) En déduire : $\mathbb{E}(Z_{k+1}) = \dfrac{n-1}{n}\, \mathbb{E}(Z_k) + 1$.

6. ***a)*** Montrer que la suite $(v_k)_{k \geqslant 1}$ de terme général $v_k = \mathbb{E}(Z_k) - n$ est une suite géométrique.

b) En déduire, pour tout entier k supérieur ou égal à 1 : $\mathbb{E}(Z_k) = n \left(1 - \left(\dfrac{n-1}{n}\right)^k\right)$.

Partie III

On suppose maintenant que $n = 4$; ainsi l'urne $\mathcal{U}$ contient 4 boules numérotées de 1 à 4.
Soit k un entier supérieur ou égal à 4. On se propose de déterminer la loi de Z_k.

7. Rappeler la valeur de $\mathbb{P}([Z_k = 1])$. Déterminer $\mathbb{P}([Z_k \geqslant 5])$.

8. Montrer : $\mathbb{P}([Z_k = 2]) = 6\, \dfrac{2^k - 2}{4^k}$.

9. On note, pour tout i de $[\![1, 4]\!]$, A_i l'événement :
« la boule numéro i n'a pas été obtenue au cours des k premiers tirages ».

a) Montrer : $\mathbb{P}([Z_k \leqslant 3]) = 4\,\mathbb{P}(A_1) - 6\,\mathbb{P}(A_1 \cap A_2) + 4\,\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3)$.

b) Calculer $\mathbb{P}(A_1)$, $\mathbb{P}(A_1 \cap A_2)$ et $\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3)$.

c) En déduire : $\mathbb{P}([Z_k \leqslant 3])$, puis $\mathbb{P}([Z_k = 3])$ et $\mathbb{P}([Z_k = 4])$.

III. Exercice III

1. **Préliminaire :**

Soit $x \in \,]0,1[$. Dans une succession d'épreuves de Bernoulli indépendantes, de même probabilité d'échec x, on définit deux suites de variables aléatoires $(S_n)_{n\geqslant 1}$ et $(T_n)_{n\geqslant 1}$ de la façon suivante :

- pour tout entier naturel n non nul, S_n est la variable aléatoire égale au nombre d'épreuves nécessaires pour obtenir le $n^{\text{ème}}$ succès ;
- T_1 est la variable aléatoire égale à S_1 et pour tout entier naturel $n \geqslant 2$, T_n est la variable aléatoire égale au nombre d'épreuves supplémentaires nécessaires pour obtenir le $n^{\text{ème}}$ succès après le $(n-1)^{\text{ème}}$ succès.

Ainsi, pour tout $n \geqslant 2$, $T_n = S_n - S_{n-1}$ et pour tout $n \geqslant 1$, $S_n = T_1 + T_2 + \cdots + T_n$.

a) Pour tout entier naturel n non nul, déterminer la loi de T_n et, sans calcul, donner l'espérance et la variance de T_n.

b) Pour tout entier naturel $n \geqslant 2$, justifier l'indépendance des variables aléatoires $T_1, T_2, \ldots, T_n$.

c) Pour tout entier naturel n non nul, montrer que l'espérance et la variance de S_n sont définies et montrer :

$$\mathbb{E}(S_n) = \frac{n}{1-x} \text{ et } \mathbb{V}(S_n) = \frac{nx}{(1-x)^2}$$

d) Soit n un entier naturel non nul. Déterminer la loi de S_n.

Que peut-on dire, sans calcul, de la valeur de $\sum\limits_{k=n}^{+\infty} \mathbb{P}([S_n = k])$?

e) En déduire, pour tout $x \in \,]0,1[$ et pour tout entier naturel n non nul :

$$\sum_{k=n}^{+\infty} \binom{k-1}{n-1} x^k = \frac{x^n}{(1-x)^n}$$

2. Deux joueurs A et B procèdent chacun à une succession de lancers d'une même pièce. À chaque lancer, la probabilité d'obtenir pile est p (p fixé, $p \in \,]0,1[$), et celle d'obtenir face est $q = 1 - p$.
Le joueur A commence et il s'arrête quand il obtient le premier pile. On note X la variable aléatoire égale au nombre de lancers effectués par le joueur A.
Le joueur B effectue alors autant de lancers que le joueur A et on note Y la variable aléatoire égale au nombre de piles obtenu par le joueur B.

a) Rappeler la loi de X et, pour tout $k \geqslant 1$, donner la loi conditionnelle de Y sachant $[X = k]$.

b) Quelles sont les valeurs prises par Y ?

c) Montrer : $\mathbb{P}([Y = 0]) = \sum\limits_{k=1}^{+\infty} pq^{2k-1} = \dfrac{q}{1+q}$.

d) Soit n un entier naturel non nul.

Montrer : $\mathbb{P}([Y = n]) = \sum\limits_{k=n}^{+\infty} \binom{k}{n} p^{n+1} q^{2k-n-1}$.

Puis, en utilisant ***1.e***, montrer que : $\mathbb{P}([Y = n]) = \dfrac{1}{(1+q)^2} \left(\dfrac{q}{1+q}\right)^{n-1}$.