DS4 / 152 (version A)

I. Exercice I / 41 (EML 2014)

On considère l'espace $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ des matrices d'ordre 2 à coefficients réels. On définit :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{E} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \ / \ (a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \right\}$$

1. Montrer que $\mathcal{E}$ est un espace vectoriel et que (A, B, C) est une base de $\mathcal{E}$.

- **1 pt : exprimer $\mathcal{E}$ sous forme de** $\mathrm{Vect}\,(.)$
- **1 pt : caractère générateur**
- **1 pt : caractère libre**
- **1 pt : conclusion**

2. Établir que $\mathcal{E}$ est stable par multiplication, c'est à dire :

$$\forall (M,N) \in \mathcal{E}^2, \ MN \in \mathcal{E}$$

- **1 pt : calcul de** MN
- **1 pt : conlusion (**$\in \mathrm{Vect}\,(A,B,C)$ **ou triangulaire supérieure)**

3. Montrer que, pour toute matrice M de $\mathcal{E}$, si M est inversible alors $M^{-1} \in \mathcal{E}$.

- **1 pt : formule pour** M^{-1}
- **1 pt :** $M^{-1} \in \mathcal{E}$

Pour toute matrice de $\mathcal{E}$, on note $f(M) = TMT$.

4. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathcal{E}$.

- **1 pt : caractère morphisme**
- **2 pts : caractère endo (1 pt pour $TM \in \mathcal{E}$, 1 pt pour $(TM)T \in \mathcal{E}$)**

5. Vérifier que T est inversible et démontrer que f est un automorphisme de $\mathcal{E}$.

- **1 pt :** $\det(T) \neq 0$
- **1 pt : inverse de** T
- **1 pt :** $\mathrm{Ker}(f) = \{0_{\mathscr{M}_2(\mathbb{R})}\}$
- **1 pt : équivalence injectif / bijectif**

6. On note F la matrice de f dans la base (A, B, C) de $\mathcal{E}$.
Calculer $f(A), f(B), f(C)$ en fonction de (A, B, C) et en déduire F.

- **1 pt :** $\mathrm{Mat}_{A,B,C}(f(A))$
- **1 pt :** $\mathrm{Mat}_{A,B,C}(f(B))$
- **1 pt :** $\mathrm{Mat}_{A,B,C}(f(C))$
- **1 pt :** F

7. Déterminer une base et la dimension de $\mathrm{Ker}(f - \mathrm{id})$.

- **1 pt : expression du système linéaire**
- **2 pts : expression de** $\mathrm{Ker}(f - \mathrm{id})$ **sous forme de** $\mathrm{Vect}\,(.)$ **(1 seul pt attribué si confusion d'objets)**
- **1 pt : caractère générateur**
- **1 pt : caractère libre**
- **1 pt : dimension**

8. Soit λ un réel différent de 1. Résoudre l'équation $f(M) = \lambda\, M$, d'inconnue $M \in \mathcal{E}$.

On note $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $H = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

- **1 pt : expression du système**
- **1 pt : résolution avec argument** $\lambda \neq 1$
- **1 pt : conclusion**

9. Calculer H^2, puis pour tout a de $\mathbb{R}$ et tout n de $\mathbb{N}$, $(I + aH)^n$.

- **1 pt : calcul de** H^2
- **1 pt :** I **et** aH **commutent**
- **1 pt : argument** $n \geqslant 1$ **lors de la séparation de somme**
- **1 pt : argument** $H^k = 0$ **pour tout** $k \geqslant 2$
- **1 pt : résultat**
- **1 pt : gestion correcte de** I
- **1 pt :** $(I + aH)^0$

10. Calculer, pour tout n de $\mathbb{N}$, F^n.

- **1 pt : utilisation de la question *9.***

11. Trouver une matrice G de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $G^3 = F$.
Existe-t-il un endomorphisme g de $\mathcal{E}$ tel que $g \circ g \circ g = f$?

- **2 pts : trouver** $G = I + \frac{1}{3}H$
- **1 pt :** $\mathrm{Mat}_{(A,B,C)}(g) = G$
- **1 pt :** $\mathrm{Mat}_{(A,B,C)}(g^3) = G^3$
- **1 pt :** $g^3 = f$ **(par l'isomorphisme de représentation)**

II. Exercice II /66 (EML 2013)

Soit n un entier supérieur ou égal à 2.
On considère une urne $\mathcal{U}$ contenant n boules numérotées de 1 à n et indiscernables au toucher.
On effectue une suite de tirages d'une boule avec remise de la boule dans l'urne $\mathcal{U}$.

Partie I / 12

Soit k un entier supérieur ou égal à 1. Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, on note X_i la variable aléatoire égale au nombre d'obtentions de la boule numéro i au cours des k premiers tirages.

1. Soit $i \in [\![1, n]\!]$. Donner la loi de X_i. Rappeler l'espérance et la variance de X_i.

- **1 pt : description de l'expérience**
- **1 pt : description de la v.a.r. et loi binomiale reconnue**
- **1 pt : espérance**
- **1 pt : variance**

2. Les variables aléatoires $X_1, X_2, \ldots, X_n$ sont-elles indépendantes ?

- **1 pt :** $[X_i = k] \cap [X_j = k] = \varnothing$
- **1 pt :** $\mathbb{P}([X_i = k])$
- **1 pt :** $\mathbb{P}([X_i = k] \cap [X_j = k]) = 0 \neq \mathbb{P}([X_i = k])\mathbb{P}([X_j = k])$

3. Soit $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$ tel que $i \neq j$.

a) Déterminer la loi de la variable $X_i + X_j$. Rappeler la variance de $X_i + X_j$.

- **1 pt : description de l'expérience**
- **1 pt : description de la v.a.r. et loi binomiale reconnue**
- **1 pt : variance**

b) En déduire la covariance du couple (X_i, X_j).

- **1 pt : variance d'une somme**
- **1 pt :** $\text{Cov}(X_i, X_j) = -\dfrac{k}{n^2}$

Pour tout entier k supérieur ou égal à 1, on note Z_k la variable aléatoire égale au nombre de numéros distincts obtenus au cours des k premiers tirages et on note $\mathbb{E}(Z_k)$ l'espérance de Z_k.

Partie II / 31

4. Déterminer la loi de la variable Z_1 et la loi de la variable Z_2.
En déduire $\mathbb{E}(Z_1)$ et $\mathbb{E}(Z_2)$.

- **1 pt :** $Z_1(\Omega) = \{1\}$
- **1 pt :** $\mathbb{E}(Z_1)$
- **1 pt :** $Z_2(\Omega) = \{1, 2\}$
- **2 pts :** $\mathbb{P}([Z_2 = 1]) = \frac{1}{n}$ **(1 pt pour décomposer l'événement, 1 pt pour réunion incompatible)**
- **1 pt :** $\mathbb{P}([Z_2 = 2]) = 1 - \frac{1}{n}$
- **1 pt :** $\mathbb{E}(Z_2)$

5. Soit k un entier supérieur ou égal à 1.

a) Déterminer $\mathbb{P}([Z_k = 1])$ et déterminer $\mathbb{P}([Z_k = k])$.

- **1 pt :** $[Z_k = 1] = \bigcup\limits_{i=1}^{n} [X_i = k]$
- **1 pt : réunion incompatible**
- **1 pt :** $\mathbb{P}([Z_k = 1]) = \dfrac{1}{n^{k-1}}$
- **1 pt : cas** $k > n$
- **2 pts : cas** $k \leqslant n$ **(1 pt pour dénombrement de** $[Z_k = k]$ **et 1 pt pour** $\mathbb{P}([Z_k = k])$**.**

b) Montrer, pour tout $\ell \in [\![1, n]\!]$: $\mathbb{P}([Z_{k+1} = \ell]) = \dfrac{\ell}{n}\, \mathbb{P}([Z_k = \ell]) + \dfrac{n-\ell+1}{n}\, \mathbb{P}([Z_k = \ell - 1])$.

- **1 pt :** $Z_k(\Omega) \subset [\![1, n]\!]$
- **1 pt :** $\Big([Z_k = i]\Big)_{i \in [\![1,n]\!]}$ **est un SCE**
- **1 pt : expression de la formule des probabilités totales**
- **1 pt :** $[Z_k = i] \cap [Z_{k+1} = \ell] = \varnothing$ **si** $i \neq \ell$ **et** $i \neq \ell - 1$
- **1 pt :** $\mathbb{P}_{[Z_k = \ell - 1]}([Z_{k+1} = \ell]) = \dfrac{n - \ell + 1}{n}$
- **1 pt :** $\mathbb{P}_{[Z_k = \ell]}([Z_{k+1} = \ell]) = \dfrac{\ell}{n}$
- **1 pt : cas** $\ell = 1$

c) En déduire : $\mathbb{E}(Z_{k+1}) = \dfrac{n-1}{n}\, \mathbb{E}(Z_k) + 1$.

- **1 pt : existence de** $\mathbb{E}(Z_k)$ **et** $\mathbb{E}(Z_{k+1})$
- **1 pt : expression correcte de l'espérance**
- **1 pt : changement d'indice**
- **1 pt : regrouper les deux sommes** $\sum\limits_{\ell=1}^{n}$
- **1 pt : reconnaître** $\mathbb{E}(Z_k)$
- **1 pt :** $\sum\limits_{\ell=1}^{n} \mathbb{P}([Z_k = \ell]) = 1$

6. ***a)*** Montrer que la suite $(v_k)_{k \geqslant 1}$ de terme général $v_k = \mathbb{E}(Z_k) - n$ est une suite géométrique.

- **2 pts**

b) En déduire, pour tout entier k supérieur ou égal à 1 : $\mathbb{E}(Z_k) = n \left(1 - \left(\dfrac{n-1}{n}\right)^k\right)$.

- **1 pt : formule** $v_k = \left(\dfrac{n-1}{n}\right)^{k-1} v_1$
- **1 pt :** $v_1 = -(n-1)$
- **1 pt :** $\mathbb{E}(Z_k)$

Partie III / 23

On suppose maintenant que $n = 4$; ainsi l'urne $\mathcal{U}$ contient 4 boules numérotées de 1 à 4.
Soit k un entier supérieur ou égal à 4. On se propose de déterminer la loi de Z_k.

7. Rappeler la valeur de $\mathbb{P}([Z_k = 1])$. Déterminer $\mathbb{P}([Z_k \geqslant 5])$.

- **1 pt :** $\mathbb{P}([Z_k = 1]) = \dfrac{1}{4^{k-1}}$
- **1 pt :** $\mathbb{P}([Z_k \geqslant 5]) = \mathbb{P}(\varnothing) = 0$

8. Montrer : $\mathbb{P}([Z_k = 2]) = 6\, \dfrac{2^k - 2}{4^k}$.

- **3 pts :** $\mathrm{Card}([Z_k = 2])$
- **1 pt :** $\mathbb{P}([Z_k = 2])$

9. On note, pour tout i de $[\![1, 4]\!]$, A_i l'événement :
« la boule numéro i n'a pas été obtenue au cours des k premiers tirages ».

a) Montrer : $\mathbb{P}([Z_k \leqslant 3]) = 4\,\mathbb{P}(A_1) - 6\,\mathbb{P}(A_1 \cap A_2) + 4\,\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3)$.

- **1 pt :** $[Z_k \leqslant 3] = A_1 \ \cup\ A_2 \ \cup\ A_3 \ \cup\ A_4$
- **2 pts : formule du crible au rang 4**
- **1 pt :** $\mathbb{P}(A_1) = \ldots = \mathbb{P}(A_4)$
- **1 pt :** $A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4 = \varnothing$
- **1 pt : résultat**

b) Calculer $\mathbb{P}(A_1)$, $\mathbb{P}(A_1 \cap A_2)$ et $\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3)$.

- **1 pt :** $A_1 = [X_1 = 0]$
- **1 pt :** $\mathbb{P}(A_1) = \left(\dfrac{3}{4}\right)^k$
- **1 pt :** $A_1 \cap A_2 = [X_1 = 0] \cap [X_2 = 0] = [X_1 + X_2 = 0]$
- **1 pt :** $\mathbb{P}(A_1 \cap A_2) = \left(\dfrac{1}{2}\right)^k$
- **1 pt :** $A_1 \cap A_2 \cap A_3 = [X_4 = k]$
- **1 pt :** $\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = \left(\dfrac{1}{4}\right)^k$

c) En déduire : $\mathbb{P}([Z_k \leqslant 3])$, puis $\mathbb{P}([Z_k = 3])$ et $\mathbb{P}([Z_k = 4])$.

- **1 pt :** $\mathbb{P}([Z_k \leqslant 3]) = \dfrac{4 \times 3^k - 6 \times 2^k + 4}{4^k}$
- **1 pt :** $[Z_k \leqslant 3] = [Z_k = 1] \cup [Z_k = 2] \cup [Z_k = 3]$
- **1 pt : réunion incompatible**
- **1 pt :** $\mathbb{P}([Z_k = 3]) = \dfrac{4 \times 3^k - 12 \times 2^k + 12}{4^k}$
- **1 pt :** $[Z_k = 4] = \overline{[Z_k \leqslant 3]}$

III. Exercice III /45 (EML 2005)

1. **Préliminaire :**

Soit $x \in \,]0,1[$. Dans une succession d'épreuves de Bernoulli indépendantes, de même probabilité d'échec x, on définit deux suites de variables aléatoires $(S_n)_{n \geqslant 1}$ et $(T_n)_{n \geqslant 1}$ de la façon suivante :

- pour tout entier naturel n non nul, S_n est la variable aléatoire égale au nombre d'épreuves nécessaires pour obtenir le $n^{\text{ème}}$ succès ;
- T_1 est la variable aléatoire égale à S_1 et pour tout entier naturel $n \geqslant 2$, T_n est la variable aléatoire égale au nombre d'épreuves supplémentaires nécessaires pour obtenir le $n^{\text{ème}}$ succès après le $(n-1)^{\text{ème}}$ succès.

Ainsi, pour tout $n \geqslant 2$, $T_n = S_n - S_{n-1}$ et pour tout $n \geqslant 1$, $S_n = T_1 + T_2 + \cdots + T_n$.

a) Pour tout entier naturel n non nul, déterminer la loi de T_n et, sans calcul, donner l'espérance et la variance de T_n.

- **2 pts : cas $n = 1$ (1 pt description de l'expérience, 1 pt description v.a.r. et loi)**
- **2 pts : cas $n \geqslant 2$ (1 pt description de l'expérience, 1 pt description v.a.r. et loi)**
- **1 pt :** $\mathbb{E}(T_n) = \dfrac{1}{x}$
- **1 pt :** $\mathbb{V}(T_n) = \dfrac{1-x}{x^2}$

b) Pour tout entier naturel $n \geqslant 2$, justifier l'indépendance des variables aléatoires $T_1, T_2, \ldots, T_n$.

- **1 pt : explication avec les mains**
- **3 pts : au plus pour une explication plus rigoureuse**

c) Pour tout entier naturel n non nul, montrer que l'espérance et la variance de S_n sont définies et montrer :

$$\mathbb{E}(S_n) = \frac{n}{1-x} \text{ et } \mathbb{V}(S_n) = \frac{nx}{(1-x)^2}$$

- **1 pt : existence de $\mathbb{E}(S_n)$ et $\mathbb{V}(S_n)$**
- **1 pt : linéarité de l'espérance**
- **1 pt :** $\mathbb{E}(S_n) = \dfrac{n}{1-x}$
- **1 pt : propriété de la variance car indépendance**
- **1 pt :** $\mathbb{V}(S_n) = \dfrac{nx}{(1-x)^2}$

d) Soit n un entier naturel non nul. Déterminer la loi de S_n.

Que peut-on dire, sans calcul, de la valeur de $\sum\limits_{k=n}^{+\infty} \mathbb{P}([S_n = k])$?

- **1 pt :** $S_n(\Omega) = [\![n, +\infty[\![$
- **1 pt :** $[S_n = k] \; = \; [U_{k-1} = n-1] \; \cap \; B_k$
- **1 pt :** $\mathbb{P}([U_{k-1} = n-1]) = \dbinom{k-1}{n-1} \; (1-x)^{n-1} \; x^{k-n}$
- **1 pt :** $\mathbb{P}([S_n = k]) = \dbinom{k-1}{n-1} \; (1-x)^{n} \; x^{k-n}$
- **1 pt :** $\Big([S_n = k] \Big)_{k \in [\![n, +\infty[\![}$ **SCE**
- **1 pt :** $\sum\limits_{k=n}^{+\infty} \mathbb{P}([S_n = k]) = 1$

e) En déduire, pour tout $x \in \,]0,1[$ et pour tout entier naturel n non nul :

$$\sum_{k=n}^{+\infty} \binom{k-1}{n-1} x^k = \frac{x^n}{(1-x)^n}$$

- **2 pts**

2. Deux joueurs A et B procèdent chacun à une succession de lancers d'une même pièce. À chaque lancer, la probabilité d'obtenir pile est p (p fixé, $p \in \,]0,1[$), et celle d'obtenir face est $q = 1-p$.
Le joueur A commence et il s'arrête quand il obtient le premier pile. On note X la variable aléatoire égale au nombre de lancers effectués par le joueur A.
Le joueur B effectue alors autant de lancers que le joueur A et on note Y la variable aléatoire égale au nombre de piles obtenu par le joueur B.

a) Rappeler la loi de X et, pour tout $k \geqslant 1$, donner la loi conditionnelle de Y sachant $[X = k]$.

- **1 pt : description de l'expérience**
- **1 pt : description de la v.a.r. X et loi**
- **2 pts : $Y(\Omega)$**
- **1 pt : si $i > k$ alors $[X = k] \cap [y = i] = \varnothing$**
- **1 pt : si $i \in [\![0, k]\!]$ alors $\mathbb{P}_{[X=k]}([Y = i]) \; = \; \binom{k}{i} \; p^i \; (1-p)^{k-i}$**

b) Quelles sont les valeurs prises par Y ?

- **2 pts : si non attribués précédemment**

c) Montrer : $\mathbb{P}([Y = 0]) = \sum\limits_{k=1}^{+\infty} pq^{2k-1} = \dfrac{q}{1+q}$.

- **1 pt : $\Big([X = k]\Big)_{k \in [\![1,+\infty[\![}$ est un SCE**
- **1 pt : FPT correcte**
- **1 pt : manipulation pour aboutir à $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} (q^2)^k$**
- **1 pt : formule somme géométrique**
- **1 pt : argument $q^2 \in \,]-1,1[$**
- **1 pt : résultat**

d) Soit n un entier naturel non nul.
Montrer : $\mathbb{P}([Y = n]) = \sum\limits_{k=n}^{+\infty} \dbinom{k}{n} p^{n+1} q^{2k-n-1}$.
Puis, en utilisant ***1.e***, montrer que : $\mathbb{P}([Y = n]) = \dfrac{1}{(1+q)^2} \left(\dfrac{q}{1+q}\right)^{n-1}$.

- **1 pt : $\Big([X = k]\Big)_{k \in [\![1,+\infty[\![}$ est un SCE**
- **1 pt : FPT correcte**
- **1 pt : séparer en deux sommes**
- **1 pt : manipulations pour aboutir à $\sum\limits_{k=n}^{+\infty} \binom{k}{n} (q^2)^k$**
- **2 pts : utilisation de la question *1.e)***
- **2 pts : 1 pt pour combinaison des résultats et 1 pt pour résultat**