DS4 (version A)

I. Exercice I (EML 2014)

On considère l'espace $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ des matrices d'ordre 2 à coefficients réels. On définit :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{E} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \ / \ (a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \right\}$$

1. Montrer que $\mathcal{E}$ est un espace vectoriel et que (A, B, C) est une base de $\mathcal{E}$.

Démonstration.

- Par définition de $\mathcal{E}$:

$$\begin{aligned} \mathcal{E} &= \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \ / \ (a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \right\} \\ &= \left\{ a \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + b \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + c \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \ / \ (a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \right\} \\ &= \left\{ a \cdot A + b \cdot B + c \cdot C \ / \ (a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \right\} \\ &= \mathrm{Vect}\,(A, B, C) \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Donc } \mathcal{E} \text{ est un espace vectoriel et la famille } (A,B,C) \text{ engendre } \mathcal{E}.}$$

- Montrons que la famille (A, B, C) est libre.
  Soit $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3$. Supposons que :

$$\lambda_1 \cdot A + \lambda_2 \cdot B + \lambda_3 \cdot C = 0_{\mathscr{M}_2(\mathbb{R})}$$

  On a donc :

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 \\ 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

  On en déduit que $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$. Donc la famille (A, B, C) est libre.

- La famille (A, B, C) est :
  - × génératrice de $\mathcal{E}$,
  - × libre.

$$\boxed{\text{Ainsi la famille } (A,B,C) \text{ est une base de } \mathcal{E}.}$$

□

2. Établir que $\mathcal{E}$ est stable par multiplication, c'est à dire :

$$\forall (M,N) \in \mathcal{E}^2, \ MN \in \mathcal{E}$$

Démonstration.
Soit $(M,N) \in \mathcal{E}^2$. Il existe donc $(a_1, b_1, c_1) \in \mathbb{R}^3$ et $(a_2, b_2, c_2) \in \mathbb{R}^3$ tels que :

$$M = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ 0 & c_1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad N = \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ 0 & c_2 \end{pmatrix}$$

On obtient alors :

$$MN = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ 0 & c_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ 0 & c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1\, a_2 & a_1\, b_2 + b_1\, c_2 \\ 0 & c_1\, c_2 \end{pmatrix} = a_1\, a_2 \cdot A + (a_1\, b_2 + b_1\, c_2) \cdot B + c_1\, c_2 \cdot C$$

Donc $MN \in \text{Vect}\,(A, B, C)$. D'où $MN \in \mathcal{E}$.

$$\boxed{\mathcal{E} \text{ est bien stable par multiplication.}}$$

Commentaire

On pouvait aussi rédiger autrement : $MN = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ 0 & c_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ 0 & c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1\, a_2 & a_1\, b_2 + b_1\, c_2 \\ 0 & c_1\, c_2 \end{pmatrix}$.
Ainsi, MN est bien de la forme $\begin{pmatrix} u & v \\ 0 & w \end{pmatrix}$ avec $(u, v, w) = (a_1\, a_2, a_1\, b_2 + b_1\, c_2, c_1\, c_2) \in \mathbb{R}^3$.
Donc $MN \in \mathcal{E}$.

□

3. Montrer que, pour toute matrice M de $\mathcal{E}$, si M est inversible alors $M^{-1} \in \mathcal{E}$.

Démonstration.
Soit $M \in \mathcal{E}$. Il existe donc $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que $M = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}$.
La matrice M est d'ordre 2. Elle est donc inversible ssi $\det(M) = ac \neq 0$. Dans ce cas :

$$M^{-1} = \frac{1}{ac} \begin{pmatrix} c & -b \\ 0 & a \end{pmatrix} = \frac{c}{ac} \cdot A - \frac{b}{ac} \cdot B + \frac{a}{ac} \cdot C \in \mathcal{E}$$

$$\boxed{\text{Ainsi, si } M \in \mathcal{E} \text{ est inversible, } M^{-1} \in \mathcal{E}.}$$

Commentaire

Attention, on ne montre pas dans cette question que toutes les matrices de $\mathcal{E}$ sont inversibles !
On démontre simplement que, **celles qui sont inversibles** ont un inverse de la forme triangulaire supérieure (*i.e.* ont un inverse appartenant à $\mathcal{E}$).

□

Pour toute matrice de $\mathcal{E}$, on note $f(M) = TMT$.

4. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathcal{E}$.

Démonstration.

- Montrons que f est une application linéaire.
  Soit $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$ et soit $(M_1, M_2) \in \mathcal{E}^2$.

$$\begin{array}{rcll} f(\lambda_1 \cdot M_1 + \lambda_2 \cdot M_2) & = & T\ (\lambda_1 \cdot M_1 + \lambda_2 \cdot M_2)\ T & \\ & = & (\lambda_1 \cdot TM_1 + \lambda_2 \cdot TM_2)\ T & \textit{(par distributivité à gauche de } \times \textit{ sur } +) \\ & = & \lambda_1 \cdot TM_1T + \lambda_2 \cdot TM_2T & \textit{(par distributivité à droite de } \times \textit{ sur } +) \\ & = & \lambda_1 \cdot f(M_1) + \lambda_2 \cdot f(M_2) & \end{array}$$

- Montrons que $f(\mathcal{E}) \subset \mathcal{E}$. Autrement dit, montrons que pour tout $M \in \mathcal{E}$, $f(M) \in \mathcal{E}$.

  Soit $M \in \mathcal{E}$.
  On remarque que : $T = A + B + C \in \text{Vect}(A, B, C)$. Donc $T \in \mathcal{E}$.
  Donc, d'après la question ***3.***, $TM \in \mathcal{E}$.
  D'où $f(M) = TMT = (TM)T \in \mathcal{E}$ en utilisant une nouvelle fois la question ***3.***

$$\boxed{\text{L'application } f \text{ est donc un endomorphisme de } \mathcal{E}.}$$

□

5. Vérifier que T est inversible et démontrer que f est un automorphisme de $\mathcal{E}$.

Démonstration.

- Comme $\det(T) = 1 \times 1 - 0 \times 1 = 1 \neq 0$, la matrice T est inversible.

$$\boxed{T \text{ est inversible.}}$$

(l'inverse de T est : $T^{-1} = \dfrac{1}{1}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$)

- Déterminons $\text{Ker}(f)$.
  Soit $M \in \mathcal{E}$.

$$\begin{aligned} M \in \text{Ker}(f) &\Leftrightarrow f(M) = 0_{\mathscr{M}_2(\mathbb{R})} \\ &\Leftrightarrow TMT = 0 \\ &\Leftrightarrow T^{-1}TMT = T^{-1} \times 0 = 0 \\ &\Leftrightarrow MTT^{-1} = 0 \times T^{-1} = 0 \\ &\Leftrightarrow M = 0 \end{aligned}$$

  Donc $\text{Ker}(f) = \{0_{\mathscr{M}_2(\mathbb{R})}\}$. Ainsi, f est injective.

- Enfin, comme f est un endomorphisme de $\mathcal{E}$ de dimension **finie** :

$$f \text{ est injective} \Leftrightarrow f \text{ est bijective}$$

$$\boxed{\text{L'application } f \text{ est un automorphisme de } \mathcal{E}.}$$

Commentaire

On utilise ici un cas particulier de la proposition suivante :
Soient E et F des ev de dimensions **finies** tels que $\dim(E) = \dim(F)$.
Soit $f \in \mathscr{L}(E, F)$. Alors :

$$f \text{ bijective} \Leftrightarrow f \text{ injective} \Leftrightarrow f \text{ surjective}$$

□

6. On note F la matrice de f dans la base (A, B, C) de $\mathcal{E}$.
Calculer $f(A), f(B), f(C)$ en fonction de (A, B, C) et en déduire F.

Démonstration.

- $f(A) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 1 \cdot A + 1 \cdot B + 0 \cdot C.$

  Ainsi : $\text{Mat}_{(A,B,C)}(f(A)) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

- $f(B) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0 \cdot A + 1 \cdot B + 0 \cdot C.$

  Ainsi : $\text{Mat}_{(A,B,C)}(f(B)) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

- $f(C) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 0 \cdot A + 1 \cdot B + 1 \cdot C.$

  Ainsi : $\text{Mat}_{(A,B,C)}(f(C)) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$$\boxed{\text{Donc } F = \text{Mat}_{(A,B,C)}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.}$$

□

7. Déterminer une base et la dimension de $\text{Ker}(f - \text{id})$.

Démonstration.

- Soit $M \in \mathcal{E}$. Il existe donc $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tel que $M = \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & z \end{pmatrix}$.

  On note : $X = \text{Mat}_{(A,B,C)}(M) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

$$\begin{aligned} M \in \text{Ker}(f - \text{id}) &\Leftrightarrow (f - \text{id})(M) = 0_{\mathscr{M}_2(\mathbb{R})} \\ &\Leftrightarrow (F - I_3)\ X = 0_{\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})} \\ &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow \{\ x + z = 0 \\ &\Leftrightarrow \{\ x = -z \end{aligned}$$

  On obtient alors :

$$\begin{aligned} \text{Ker}(f - \text{id}) &= \left\{ M = \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & z \end{pmatrix} \in \mathcal{E} \ / \ (f - \text{id})(M) = 0_{\mathscr{M}_2(\mathbb{R})} \right\} \\ &= \left\{ M = \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & z \end{pmatrix} \in \mathcal{E} \ / \ x = -z \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} -z & y \\ 0 & z \end{pmatrix} \ / \ (y, z) \in \mathbb{R}^2 \right\} \\ &= \left\{ y \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + z \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \ / \ (y, z) \in \mathbb{R}^2 \right\} \\ &= \{ y \cdot B + z \cdot (C - A) \ / \ (y, z) \in \mathbb{R}^2 \} \\ &= \text{Vect}\,(B, C - A) \end{aligned}$$

- Donc la famille $(B, C - A)$ engendre $\text{Ker}(f - \text{id})$.
  Elle est de plus constituée de deux matrices non proportionnelles, elle est donc libre.

$$\boxed{\text{La famille } (B, C - A) \text{ est une base de } \text{Ker}(f - \text{id}).}$$

$$\boxed{\text{On a donc : } \dim(\text{Ker}(f - \text{id})) = \text{Card}((B, C - A)) = 2.}$$

□

8. Soit λ un réel différent de 1. Résoudre l'équation $f(M) = \lambda\, M$, d'inconnue $M \in \mathcal{E}$.

Démonstration.
Soit $M \in \mathcal{E}$. Il existe donc $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que $M = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}$.

$$\begin{array}{rcl} f(M) = \lambda \cdot M & \Leftrightarrow & TMT = \lambda \cdot M \\ & \Leftrightarrow & \begin{pmatrix} a & a+b+c \\ 0 & c \end{pmatrix} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \\ & \Leftrightarrow & \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} (1-\lambda)\ a & & & & & = & 0 \\ a & + & (1-\lambda)\ b & + & c & = & 0 \\ & & & & (1-\lambda)\ c & = & 0 \end{array} \right. \end{array}$$

Or $\lambda \neq 1$, donc on obtient : $a = 0$ et $c = 0$.
Ainsi : $(1 - \lambda)\ b = 0$, et donc $b = 0$ car $\lambda \neq 1$.
On en conclut que $M = 0_{\mathscr{M}_2(\mathbb{R})}$.

$$\boxed{\text{Si } \lambda \neq 1, \text{ l'unique solution de l'équation } f(M) = \lambda\, M \text{ est } M = 0.}$$

□

On note $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $H = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

9. Calculer H^2, puis pour tout a de $\mathbb{R}$ et tout n de $\mathbb{N}$, $(I + aH)^n$.

Démonstration.

- Tout d'abord :

$$\boxed{H^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}$$

- Soit $a \in \mathbb{R}$.
Les matrices I et aH commutent : $I \times aH = aH = aH \times I$.
Soit $n \geqslant 1$. D'après la formule du binôme de Newton :

$$\begin{array}{rcll} (I + aH)^n & = & \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} I^{n-k} (aH)^k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k H^k & \textit{(car } I^{n-k} = I\textit{)} \\ & = & \displaystyle\sum_{k=0}^{1} \binom{n}{k} a^k H^k + \sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} a^k H^k & \textit{(car } n \geqslant 1\textit{)} \\ & = & \displaystyle\sum_{k=0}^{1} \binom{n}{k} a^k H^k & \textit{(car } H^k = 0 \textit{ pour tout } k \geqslant 2 \textit{ par récurrence immédiate)} \\ & = & \displaystyle\binom{n}{0} a^0 H^0 + \binom{n}{1} a^1 H^1 & \\ & = & I + a\, n\, H = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ na & 1 & na \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \end{array}$$

- On remarque de plus que : $(I + aH)^0 = I$.
Donc la formule précédente est valable pour $n = 0$.

$$\boxed{\text{On en déduit que : } \forall n \in \mathbb{N},\ (I + a\, H)^n = I + a\, n\, H.}$$

Commentaire

- Afin de démontrer : $\forall k \geqslant 3,\ H^k = 0$, on peut procéder de manière directe.
  En effet, pour tout $k \geqslant 3$: $H^k = H^3 \times H^{k-3} = 0 \times H^{k-3} = 0$.
  (on peut considérer H^{k-3} car $k - 3 \geqslant 0$)
- La relation de Chasles stipule que pour tout $(m, p, n) \in \mathbb{N}^3$ tel que $m \leqslant p \leqslant n$:

$$\sum_{k=m}^{n} u_k = \sum_{k=m}^{p} u_k + \sum_{k=p+1}^{n} u_k$$

  (la deuxième somme est nulle si $p = n$)
  où (u_n) est une suite quelconque de réels ou de matrices.
- Dans cette question, on est dans le cas où $m = 0$ et $p = 0$.
  L'argument $n \geqslant 0$ est donc suffisant pour découper la somme. On traite le cas $n \geqslant 1$ dans cette question pour s'assurer que la deuxième somme ne se fait pas sur un ensemble vide d'indice.
  Ceci permet d'assurer que $k \geqslant 1$ et donc d'utiliser le fait que $J^k = 4^{k-1}\ J$. □

10. Calculer, pour tout n de $\mathbb{N}$, F^n.

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}$.
On remarque que : $F = I + H = I + 1 \cdot H$.
D'après la question ***9.*** appliquée à $a = 1$, on obtient : $F^n = I + 1 \times n \cdot H$.

$$\boxed{\text{Pour tout } n \in \mathbb{N},\ F^n = I + n\, H.}$$

□

11. Trouver une matrice G de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $G^3 = F$.
Existe-t-il un endomorphisme g de $\mathcal{E}$ tel que $g \circ g \circ g = f$?

Démonstration.

- D'après la question ***9.***, pour tout $a \in \mathbb{R}$: $(I + a\, H)^3 = I + 3\, a\, H$.
  Or $F = I + 1 \cdot H$. Donc, en choisissant $a = \dfrac{1}{3}$, on obtient :

$$\left(I + \frac{1}{3}\, H\right)^3 = I + 3 \times \frac{1}{3} \cdot H = I + H = F$$

$$\boxed{\text{Donc en posant } G = I + \frac{1}{3}\, H, \text{ on obtient : } G^3 = F.}$$

- On rappelle que $F = \mathrm{Mat}_{(A,B,C)}(f)$.
  On considère alors l'endomorphisme $g \in \mathscr{L}(\mathcal{E})$ tel que $\mathrm{Mat}_{(A,B,C)}(g) = G$.
  D'après la relation du point précédent, on obtient :

$$\mathrm{Mat}_{(A,B,C)}(g^3) = \big(\mathrm{Mat}_{(A,B,C)}(g)\big)^3 = G^3 = F = \mathrm{Mat}_{(A,B,C)}(f)$$

  L'application $\mathrm{Mat}_{(A,B,C)}(.)$ étant un isomorphisme, on obtient, par injectivité que : $g^3 = f$.

$$\boxed{\text{On a donc bien exhibé un endomorphisme } g \text{ de } \mathcal{E} \text{ tel que } g \circ g \circ g = f.}$$

Commentaire

Il faut retenir le schéma classique développé dans cette question :
(i) on démontre une propriété sous forme matricielle,
(ii) on en déduit une propriété sur les endomorphismes par la passerelle matrice / endomorphisme. □

II. Exercice II (EML 2013)

Soit n un entier supérieur ou égal à 2.
On considère une urne $\mathcal{U}$ contenant n boules numérotées de 1 à n et indiscernables au toucher.
On effectue une suite de tirages d'une boule avec remise de la boule dans l'urne $\mathcal{U}$.

Partie I

Soit k un entier supérieur ou égal à 1. Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, on note X_i la variable aléatoire égale au nombre d'obtentions de la boule numéro i au cours des k premiers tirages.

1. Soit $i \in [\![1, n]\!]$. Donner la loi de X_i. Rappeler l'espérance et la variance de X_i.

Démonstration.

- L'expérience consiste en la succession de k épreuves de Bernoulli (dont le succès est l'obtention de la boule numérotée i) indépendantes et de même paramètre $\frac{1}{n}$ (on choisit une boule dans l'urne $\mathcal{U}$ de manière équiprobable parmi les n boules disponibles).
- La variable X_i donne le nombre de succès obtenus lors de cette expérience.

$$\boxed{\text{Ainsi, } X_i \hookrightarrow \mathcal{B}\left(k, \frac{1}{n}\right).}$$

On en déduit que X_i admet une espérance et une variance.

$$\boxed{\text{Plus précisément : } \mathbb{E}(X_i) = k \times \frac{1}{n} = \frac{k}{n} \quad \text{et} \quad \mathbb{V}(X_i) = k \times \frac{1}{n}\left(1 - \frac{1}{n}\right) = \frac{k}{n}\left(1 - \frac{1}{n}\right).}$$ □

2. Les variables aléatoires $X_1, X_2, \dots, X_n$ sont-elles indépendantes ?

Démonstration.
Soit $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$ tel que $i \neq j$.

- On commence par noter que :
$$[X_i = k] \cap [X_j = k] = \varnothing$$
En effet, en k tirages, on ne peut pas obtenir à la fois k fois la boule numéro i et k fois la boule numéro j. On obtient donc :
$$\mathbb{P}([X_i = k] \cap [X_j = k]) = \mathbb{P}(\varnothing) = 0$$
- D'autre part, d'après la question ***1.***, on sait que :
$$\mathbb{P}([X_i = k]) = \mathbb{P}([X_j = k]) = \binom{k}{k} \left(\frac{1}{n}\right)^k \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{k-k} = 1 \times \frac{1}{n^k} \times 1 = \frac{1}{n^k}$$
Donc :
$$\mathbb{P}([X_i = k])\, \mathbb{P}([X_j = k]) = \frac{1}{n^k} \times \frac{1}{n^k} = \frac{1}{n^{2k}} \neq 0$$

On obtient finalement que :

$$\mathbb{P}([X_i = k] \cap [X_j = k]) \neq \mathbb{P}([X_i = k])\, \mathbb{P}([X_j = k])$$

$$\boxed{\text{Les variables aléatoires } X_1,\ X_2,\ \dots,\ X_n \text{ ne sont pas indépendantes.}}$$

Commentaire

- On cherche ici à démontrer que les v.a.r. $X_1, \ldots, X_n$ ne sont pas mutuellement indépendantes. Si elles l'étaient, alors toute paire de variables X_i, X_j (avec $i \neq j$) serait indépendante (l'indépendance mutuelle implique l'indépendance deux à deux).
- Ainsi, en démontrant que les v.a.r. $X_1, \ldots, X_n$ ne sont pas deux à deux indépendantes, on démontre qu'elles ne sont pas mutuellement indépendantes.

$\square$

3. Soit $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$ tel que $i \neq j$.

a) Déterminer la loi de la variable $X_i + X_j$. Rappeler la variance de $X_i + X_j$.

Démonstration.

- L'expérience consiste en la répétition de k épreuves de Bernoulli (dont le succès est l'obtention de la boule numérotée i ou de la boule j) indépendantes et de même paramètre $\frac{2}{n}$ (le succès se réalise si l'on tire la boule i ou la boule j et on peut tirer n boules différentes en tout).
- La variable $X_i + X_j$ est la v.a.r. qui donne le nombre de succès obtenu lors de cette expérience.

$$\boxed{\text{Ainsi, } X_i + X_j \hookrightarrow \mathcal{B}\left(k, \frac{2}{n}\right)}$$

On en déduit que $X_i + X_j$ admet une espérance et une variance.

$$\boxed{\text{Plus précisément : } \mathbb{V}(X_i + X_j) = k \times \frac{2}{n}\left(1 - \frac{2}{n}\right) = \frac{2k}{n}\left(1 - \frac{2}{n}\right).}$$

$\square$

b) En déduire la covariance du couple (X_i, X_j).

Démonstration.
D'après la formule de la variance d'une somme de variables aléatoires, on obtient :

$$\mathbb{V}(X_i + X_j) = \mathbb{V}(X_i) + 2\ \mathrm{Cov}(X_i, X_j) + \mathbb{V}(X_j)$$

Donc :

$$\begin{aligned}
\mathrm{Cov}(X_i, X_j) &= \frac{1}{2}\left(\mathbb{V}(X_i + X_j) - \mathbb{V}(X_i) - \mathbb{V}(X_j)\right) \\
&= \frac{1}{\cancel{2}}\left(\frac{\cancel{2}\,k}{n}\left(1 - \frac{2}{n}\right) - \cancel{2}\,\frac{k}{n}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\right) \quad \textit{(d'après \textbf{1.} et \textbf{3.a)})} \\
&= \frac{k}{n}\left(\cancel{1} - \frac{2}{n} - \left(\cancel{1} - \frac{1}{n}\right)\right) \\
&= \frac{k}{n} \times \left(-\frac{1}{n}\right) \ = \ -\frac{k}{n^2}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathrm{Cov}(X_i, X_j) = -\frac{k}{n^2}}$$

$\square$

Pour tout entier k supérieur ou égal à 1, on note Z_k la variable aléatoire égale au nombre de numéros distincts obtenus au cours des k premiers tirages et on note $\mathbb{E}(Z_k)$ l'espérance de Z_k.

Partie II

4. Déterminer la loi de la variable Z_1 et la loi de la variable Z_2.
En déduire $\mathbb{E}(Z_1)$ et $\mathbb{E}(Z_2)$.

Démonstration.

- Si $k = 1$, alors on effectue un unique tirage. Donc on ne peut obtenir qu'un seul numéro (celui de la boule choisie à cet unique tirage). Donc :

$$\left\{ \begin{array}{l} Z_1(\Omega) = \{1\} \\ \mathbb{P}([Z_1 = 1]) = 1 \end{array} \right.$$

$$\boxed{\text{La v.a.r. } Z_1 \text{ suit la loi certaine égale à 1, et } \mathbb{E}(Z_1) = 1.}$$

- Déterminons maintenant la loi de la variable Z_2.
  - On sait déjà que : $Z_2(\Omega) = \{1, 2\}$.
    En effet, en $k = 2$ tirages, on peut :
    × soit obtenir deux fois la même boule, on observe alors 1 seul numéro.
    × soit obtenir deux boules différentes, on observe alors 2 numéros distincts.
  - D'après le premier item du point précédent :

$$[Z_2 = 1] = \bigcup_{i=1}^{n} [X_i = 2]$$

    Ainsi, l'événement $[Z_2 = 1]$ s'écrit comme une réunion d'événements incompatibles.
    On en déduit :

$$\begin{array}{rcll} \mathbb{P}([Z_2 = 1]) & = & \sum\limits_{i=1}^{n} \mathbb{P}([X_i = 2]) & \\ & = & \sum\limits_{i=1}^{n} \binom{2}{2} \left(\dfrac{1}{n}\right)^2 \left(1 - \dfrac{1}{n}\right)^{2-2} & \textit{(d'après } \textbf{\textit{1.}}\textit{)} \\ & = & \cancel{n} \, \dfrac{1}{n^{\cancel{2}}} \; = \; \dfrac{1}{n} & \end{array}$$

  - La famille $([Z_2 = 1], [Z_2 = 2])$ est un système complet d'événements, donc :

$$\mathbb{P}([Z_2 = 1]) + \mathbb{P}([Z_2 = 2]) = 1 \quad \text{et} \quad \mathbb{P}([Z_2 = 2]) = 1 - \mathbb{P}([Z_2 = 1]) = 1 - \frac{1}{n}$$

$$\boxed{\left\{ \begin{array}{l} Z_2(\Omega) = \{1, 2\} \\ \mathbb{P}([Z_2 = 1]) = \dfrac{1}{n} \quad \text{et} \quad \mathbb{P}([Z_2 = 2]) = 1 - \dfrac{1}{n} \end{array} \right.}$$

  - Z_2 est une v.a.r. finie, elle admet donc une espérance.

$$\mathbb{E}(Z_2) = 1 \times \mathbb{P}([Z_2 = 1]) + 2 \times \mathbb{P}([Z_2 = 2]) = \frac{1}{n} + 2\left(1 - \frac{1}{n}\right) = 2 - \frac{1}{n}$$

$$\boxed{\mathbb{E}(Z_2) = 2 - \frac{1}{n}}$$

□

5. Soit k un entier supérieur ou égal à 1.

a) Déterminer $\mathbb{P}([Z_k = 1])$ et déterminer $\mathbb{P}([Z_k = k])$.

Démonstration.

- L'événement $[Z_k = 1]$ est réalisé si on a obtenu un seul numéro lors de k tirages. Cela signifie que l'on a tiré la même boule lors des k tirages. Ainsi :

$$[Z_k = 1] = \bigcup_{i=1}^{n} [X_i = k]$$

L'événement $[Z_k = 1]$ étant une réunion d'événements incompatibles, on obtient :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}([Z_k = 1]) &= \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}([X_i = k]) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \binom{k}{k} \left(\frac{1}{n}\right)^k \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{k-k} \quad \textit{(d'après } \textbf{\textit{1.}}\textit{)} \\ &= n \, \frac{1}{n^k} = \frac{1}{n^{k-1}} \end{aligned}$$

$$\boxed{\mathbb{P}([Z_k = 1]) = \frac{1}{n^{k-1}}}$$

- Remarquons tout d'abord que si $k > n$ alors $[Z_k = k] = \varnothing$.
En effet, on ne peut obtenir strictement plus de n boules différentes lors de k tirages successifs dans une urne contenant n boules.

$$\boxed{\text{Si } k > n \text{ alors } \mathbb{P}([Z_k = k]) = 0.}$$

- On considère maintenant le cas où $k \leqslant n$.
L'univers Ω est muni de la probabilité uniforme $\mathbb{P}$. On procède alors par dénombrement.

L'univers est l'ensemble des k-uplets d'éléments de $[\![1, n]\!]$. Ainsi, $\text{Card}(\Omega) = n^k$.

Un k-tirage qui réalise l'événement $[Z_k = k]$ est un k-tirage lors duquel on a obtenu k boules distinctes. Un tel k-tirage est entièrement déterminé par :

× le choix de la première boule : n possibilités,

× le choix de la deuxième boule : $n - 1$ possibilités,

× $\cdots$

× le choix de la $k^{\text{ème}}$ boule : $n - (k - 1)$ possibilités.

Il y a donc en tout : $n \times (n-1) \times \cdots \times (n - (k-1)) = \dfrac{n!}{(n-k)!}$ tels k-tirages.

$$\boxed{\text{On en conclut que : } \mathbb{P}([Z_k = k]) = \frac{\text{Card}([Z_k = k])}{\text{Card}(\Omega)} = \frac{\frac{n!}{(n-k)!}}{n^k} = \frac{n!}{(n-k)!} \, \frac{1}{n^k}.}$$

Commentaire

- La première étape de la question consiste à écrire $[Z_k = 1]$ comme une réunion d'événements plus simples. On ne raisonne sur les probabilités qu'après avoir effectué cette étape primordiale de décomposition de l'événement.
- On pouvait mettre en place un dénombrement pour répondre à la première question. Détaillons cette rédaction.

  Un k-tirage qui réalise $[Z_k = 1]$ est un k-tirage lors duquel la même boule a toujours été tirée. Un tel k-tirage est entièrement déterminé par :

  × le numéro de la boule qui est toujours tirée : n possibilités.

  Ainsi, il y a n tels k-tirages.
  On en conclut que : $\mathbb{P}([Z_k = 1]) = \dfrac{\text{Card}([Z_k = k])}{\text{Card}(\Omega)} = \dfrac{n}{n^k} = \dfrac{1}{n^{k-1}}$.
- On peut aussi faire la deuxième démonstration à l'aide des termes du chapitre dénombrement. L'événement $[Z_k = k]$ est réalisé par tous les k-tirages lors desquels on a obtenu k numéros distincts. Un tel k-tirage est un k-uplet d'éléments distincts de $[\![1, n]\!]$.
  Autrement dit, un tel k-tirage est un k-arrangement de $[\![1, n]\!]$.
  Ainsi, $\text{Card}([Z_k = k]) = A_n^k = \dfrac{n!}{(n-k)!}$.

□

b) Montrer, pour tout $\ell \in [\![1, n]\!]$: $\mathbb{P}([Z_{k+1} = \ell]) = \dfrac{\ell}{n}\, \mathbb{P}([Z_k = \ell]) + \dfrac{n - \ell + 1}{n}\, \mathbb{P}([Z_k = \ell - 1])$.

Démonstration.

- On remarque que $Z_k(\Omega) \subset [\![1, n]\!]$.
  En effet, en k tirages, on peut obtenir :
  × au minimum 1 seule boule distincte (on obtient la même boule aux k tirages),
  × au maximum n boules distinctes (on a obtenu toutes les boules de l'urne).
  Ce cas ne peut se produire que lorsque $k \geqslant n$.
- La famille $\Big([Z_k = i] \Big)_{i \in [\![1,n]\!]}$ est un système complet d'événements.
  Ainsi, d'après la formule des probabilités totales, pour tout $\ell \in [\![1, n]\!]$:

$$\mathbb{P}([Z_{k+1} = \ell]) \;=\; \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}([Z_k = i] \cap [Z_{k+1} = \ell])$$

- Soit $\ell \in [\![1, n]\!]$ et soit $i \in [\![1, n]\!]$. Étudions l'événement $[Z_k = i] \cap [Z_{k+1} = \ell]$.
  Cet événement est réalisé si les événements $[Z_k = i]$ et $[Z_{k+1} = \ell]$ sont tous les deux réalisés.
  L'événement $[Z_k = i]$ est réalisé si on a obtenu i numéros distincts lors des i tirages. Lorsqu'on procède à 1 tirage supplémentaire, deux cas se présentent :
  × soit on tire un numéro de boule déjà obtenu lors des k premiers tirages.
  Dans ce cas, au cours de ces $k+1$ premiers tirages, on a obtenu i numéros distincts.
  L'événement $[Z_{k+1} = i]$ est alors réalisé.
  × soit on tire un numéro non obtenu lors des k premiers tirages.
  Dans ce cas, au cours de ces $k+1$ premiers tirages, on a obtenu i numéros distincts.
  L'événement $[Z_{k+1} = i+1]$ est alors réalisé.

  Ainsi, l'événement $[Z_k = i] \cap [Z_{k+1} = \ell]$ n'est réalisé que si $i = \ell$ ou $i + 1 = \ell$.

$$\boxed{\text{Pour tout } i \neq \ell \text{ et } i \neq \ell - 1,\ [Z_k = i] \cap [Z_{k+1} = \ell] = \varnothing.}$$

- Ainsi, pour tout $\ell \in [\![2,n]\!]$ (on écarte le cas $\ell = 2$ pour assurer que $\ell - 1 \geqslant 1$) :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}([Z_{k+1} = \ell]) &= \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}([Z_k = i] \cap [Z_{k+1} = \ell]) \\
&= \sum_{i=\ell-1}^{\ell} \mathbb{P}([Z_k = i] \cap [Z_{k+1} = \ell]) \\
&= \sum_{i=\ell-1}^{\ell} \mathbb{P}([Z_k = i])\ \mathbb{P}_{[Z_k=i]}([Z_{k+1} = \ell]) && \textit{(avec } \mathbb{P}([Z_k = \ell - 1]) \neq 0 \\
& && \textit{et } \mathbb{P}([Z_k = \ell]) \neq 0\textit{)} \\
&= \mathbb{P}([Z_k = \ell - 1])\ \mathbb{P}_{[Z_k=\ell-1]}([Z_{k+1} = \ell]) + \mathbb{P}([Z_k = \ell])\ \mathbb{P}_{[Z_k=\ell]}([Z_{k+1} = \ell])
\end{aligned}$$

  Il reste alors à déterminer chacune de ces deux probabilités conditionnelles.

- Si l'événement $[Z_k = \ell - 1]$ est réalisé, alors l'événement $[Z_{k+1} = \ell]$ est réalisé si on a pioché au $(k+1)^{\text{ème}}$ tirage un numéro distinct des $\ell - 1$ numéros déjà obtenus lors les k tirages précédents. Il y a $n - (\ell - 1)$ tels numéros. Chacune des n boules ayant la même probabilité d'être tirée, on obtient :

$$\boxed{\mathbb{P}_{[Z_k=\ell-1]}([Z_{k+1} = \ell]) = \frac{n - \ell + 1}{n}}$$

- Si l'événement $[Z_k = \ell]$ est réalisé, alors l'événement $[Z_{k+1} = \ell]$ est réalisé si on a pioché au $(k+1)^{\text{ème}}$ tirage l'une des ℓ numéros déjà obtenus lors des k tirages précédents. Il y a ℓ tels numéros. Chacune des n boules ayant la même probabilité d'être tirée, on obtient :

$$\boxed{\mathbb{P}_{[Z_k=\ell]}([Z_{k+1} = \ell]) = \frac{\ell}{n}}$$

- En combinant ces deux résultats, on obtient la fomule souhaitée.

$$\boxed{\text{Pour tout } \ell \in [\![2,n]\!],\ \mathbb{P}([Z_{k+1} = \ell]) = \frac{\ell}{n}\ \mathbb{P}([Z_k = \ell]) + \frac{n - \ell + 1}{n}\ \mathbb{P}([Z_k = \ell - 1])}$$

- Il reste alors à vérifier que la formule reste vraie si $\ell = 1$. D'après la question ***5.a)*** :

$$\mathbb{P}([Z_{k+1} = 1]) = \frac{1}{n^k} = \frac{1}{n}\ \frac{1}{n^{k-1}} = \frac{1}{n}\ \mathbb{P}([Z_k = 1])$$

  Enfin, comme $[Z_k = 0] = \varnothing$, $\mathbb{P}([Z_k = 0]) = 0$.

$$\boxed{\text{Ainsi, la formule est aussi vérifiée pour } \ell = 1.}$$

□

c) En déduire : $\mathbb{E}(Z_{k+1}) = \dfrac{n-1}{n}\, \mathbb{E}(Z_k) + 1$.

Démonstration.

- D'après la question ***5.b)***, $Z_k(\Omega) \subset [\![1,n]\!]$, et $Z_{k+1}(\Omega) \subset [\![1,n]\!]$.
  Ainsi, Z_k et Z_{k+1} sont des v.a.r. finies. Elles admettent donc une espérance.
- Par définition de l'espérance, on a :

$$\begin{array}{cll}
& \mathbb{E}(Z_{k+1}) & \\
= & \displaystyle\sum_{\ell=1}^{n} \ell \ \mathbb{P}([Z_{k+1} = \ell]) & \\
= & \displaystyle\sum_{\ell=1}^{n} \ell \left(\frac{\ell}{n}\ \mathbb{P}([Z_k = \ell]) + \frac{n-\ell+1}{n}\ \mathbb{P}([Z_k = \ell-1]) \right) & \textit{(d'après } \textbf{\textit{5.b)}}\textit{)} \\
= & \displaystyle\sum_{\ell=1}^{n} \frac{\ell^2}{n}\ \mathbb{P}([Z_k = \ell]) + \sum_{\ell=1}^{n} \frac{\ell(n-\ell+1)}{n}\ \mathbb{P}([Z_k = \ell-1]) & \\
= & \displaystyle\sum_{\ell=1}^{n} \frac{\ell^2}{n}\ \mathbb{P}([Z_k = \ell]) + \sum_{\ell=0}^{n-1} \frac{(\ell+1)(n-(\ell+\cancel{1})+\cancel{1})}{n}\ \mathbb{P}([Z_k = \ell]) & \\
= & \displaystyle\sum_{\ell=1}^{n} \frac{\ell^2}{n}\ \mathbb{P}([Z_k = \ell]) + \sum_{\ell=0}^{n-1} \frac{(\ell+1)(n-\ell)}{n}\ \mathbb{P}([Z_k = \ell]) & \\
= & \displaystyle\sum_{\ell=1}^{n} \frac{\ell^2}{n}\ \mathbb{P}([Z_k = \ell]) + \sum_{\ell=1}^{n-1} \frac{n\ell-\ell^2+n-\ell}{n}\ \mathbb{P}([Z_k = \ell]) & \textit{(car } [Z_k = 0] = \varnothing\textit{)} \\
= & \displaystyle\left(\sum_{\ell=1}^{n-1} \frac{\ell^2}{n}\ \mathbb{P}([Z_k = \ell]) + \frac{n^2}{n}\ \mathbb{P}([Z_k = n])\right) + \sum_{\ell=1}^{n-1} \frac{(n-1)\ell-\ell^2+n}{n}\ \mathbb{P}([Z_k = \ell]) & \\
= & \displaystyle\frac{n^2}{n}\ \mathbb{P}([Z_k = n]) + \sum_{\ell=1}^{n-1} \frac{\cancel{\ell^2}+(n-1)\ \ell-\cancel{\ell^2}+n}{n}\ \mathbb{P}([Z_k = \ell]) & \\
= & \displaystyle n\ \mathbb{P}([Z_k = n]) + \frac{n-1}{n} \sum_{\ell=1}^{n-1} \ell\ \mathbb{P}([Z_k = \ell]) + \sum_{\ell=1}^{n-1} \mathbb{P}([Z_k = \ell]) & \\
= & \displaystyle\left((n-1)\ \mathbb{P}([Z_k = n]) + \frac{n-1}{n} \sum_{\ell=1}^{n-1} \ell\ \mathbb{P}([Z_k = \ell])\right) + \left(\mathbb{P}([Z_k = n]) + \sum_{\ell=1}^{n-1} \mathbb{P}([Z_k = \ell])\right) & \\
= & \displaystyle\frac{n-1}{n} \sum_{\ell=1}^{n} \ell\ \mathbb{P}([Z_k = \ell]) + \sum_{\ell=1}^{n} \mathbb{P}([Z_k = \ell]) \ = \ \frac{n-1}{n}\ \mathbb{E}(Z_k) + 1 &
\end{array}$$

$$\boxed{\text{On en déduit que : } \mathbb{E}(Z_{k+1}) = \frac{n-1}{n}\ \mathbb{E}(Z_k) + 1}$$

□

6. a) Montrer que la suite $(v_k)_{k\geqslant 1}$ de terme général $v_k = \mathbb{E}(Z_k) - n$ est une suite géométrique.

Démonstration.
Soit $k \geqslant 1$. D'après la question ***5.c)***, on obtient :

$$v_{k+1} = \mathbb{E}(Z_{k+1}) - n = \frac{n-1}{n}\ \mathbb{E}(Z_k) + 1 - n = \frac{n-1}{n}\ \mathbb{E}(Z_k) - (n-1) = \frac{n-1}{n}\ (\mathbb{E}(Z_k) - n) = \frac{n-1}{n}\ v_k$$

$$\boxed{\text{La suite } (v_k)_{k\geqslant 1} \text{ est géométrique de raison } \frac{n-1}{n}.}$$

Commentaire

Il faut faire bien attention aux notations ici. La suite est notée (v_k).
La raison $\dfrac{n-1}{n}$ est bien indépendante de k, indice de la suite.

☐

b) En déduire, pour tout entier k supérieur ou égal à 1 : $\mathbb{E}(Z_k) = n\left(1 - \left(\dfrac{n-1}{n}\right)^k\right)$.

Démonstration.
Soit $k \geqslant 1$.

- D'après la question ***6.a)***, la suite (v_k) est géométrique de raison $\dfrac{n-1}{n}$, donc :

$$v_k = \left(\frac{n-1}{n}\right)^{k-1} v_1$$

Or $v_1 = \mathbb{E}(Z_1) - n = 1 - n = -(n-1)$ d'après la question ***4.***, donc :

$$v_k = -(n-1)\left(\frac{n-1}{n}\right)^{k-1} = -(n-1)\frac{(n-1)^{k-1}}{n^{k-1}} = -\frac{(n-1)^k}{n^{k-1}} = -n\,\frac{(n-1)^k}{n^k} = -n\left(\frac{n-1}{n}\right)^k$$

- Par définition, $v_k = \mathbb{E}(Z_k) - n$, donc :

$$\mathbb{E}(Z_k) = v_k + n = -n\left(\frac{n-1}{n}\right)^k + n = n\left(1 - \left(\frac{n-1}{n}\right)^k\right)$$

$$\boxed{\forall k \geqslant 1,\ \mathbb{E}(Z_k) = n\left(1 - \left(\frac{n-1}{n}\right)^k\right)}$$

☐

Partie III

On suppose maintenant que $n = 4$; ainsi l'urne $\mathcal{U}$ contient 4 boules numérotées de 1 à 4.
Soit k un entier supérieur ou égal à 4. On se propose de déterminer la loi de Z_k.

7. Rappeler la valeur de $\mathbb{P}([Z_k = 1])$. Déterminer $\mathbb{P}([Z_k \geqslant 5])$.

Démonstration.

$$\boxed{\text{D'après la question } \textbf{\textit{5.a)}},\ \mathbb{P}([Z_k = 1]) = \frac{1}{4^{k-1}}.}$$

Par ailleurs, l'urne $\mathcal{U}$ ne contenant que 4 boules, on peut obtenir au maximum 4 numéros différentes en k tirages. Ainsi : $[Z_k \geqslant 5] = \varnothing$.

$$\boxed{\text{On en conclut que : } \mathbb{P}([Z_k \geqslant 5]) = \mathbb{P}(\varnothing) = 0}$$

☐

8. Montrer : $\mathbb{P}([Z_k = 2]) = 6\,\dfrac{2^k - 2}{4^k}$.

Démonstration.

- L'univers de cette expérience est l'ensemble des k-uplets de $[\![1,4]\!]$.
  Donc, en particulier, $\text{Card}(\Omega) = 4^k$.
- Un k-tirage qui réalise l'événement $[Z_k = 2]$ est entièrement déterminé par :
  - × le choix des 2 numéros distincts parmi les 4 de l'urne : $\binom{4}{2}$ possibilités,
  - × les positions possibles pour les boules portant le 1er numéro (sur les 2) :
    - s'il n'y a qu'une unique boule portant le 1er numéro sur les k tirages : $\binom{k}{1}$ possibilités,
    - s'il y a 2 boules portant le 1er numéro sur les k tirages : $\binom{k}{2}$ possibilités,
    - $\cdots$
    - s'il y a ℓ boules portant le 1er numéro sur les k tirages : $\binom{k}{\ell}$ possibilités,
    - $\cdots$
    - s'il y a $(k-1)$ boules portant le 1er numéro sur les k tirages : $\binom{k}{k-1}$ possibilités.

  On obtient donc :

$$\begin{aligned}
\text{Card}([Z_k = 2]) &= \binom{4}{2} \sum_{\ell=1}^{k-1} \binom{k}{\ell} \\
&= \binom{4}{2} \left(\left(\sum_{\ell=0}^{k} \binom{k}{\ell} \right) - \binom{k}{k} - \binom{0}{k} \right) \\
&= \binom{4}{2} \left(\left(\sum_{\ell=0}^{k} \binom{k}{\ell} 1^\ell\, 1^{k-\ell} \right) - 2 \right)
\end{aligned}$$

  Or, d'après la formule du binôme de Newton, on a :

$$\sum_{\ell=0}^{k} \binom{k}{\ell} 1^\ell\, 1^{k-\ell} = 2^k$$

  On obtient alors :

$$\text{Card}([Z_k = 2]) = \binom{4}{2} (2^k - 2) = 6\,(2^k - 2)$$

$$\boxed{\text{On en déduit : } \mathbb{P}([Z_k = 2]) = \frac{\text{Card}([Z_k = 2])}{\text{Card}(\Omega)} = \frac{6\,(2^k - 2)}{4^k}}$$

Commentaire

- On pouvait alléger cette présentation : une fois les deux numéros choisis ($\binom{4}{2}$ possibilités), on peut affirmer qu'à chaque tirage, on a le choix entre l'une de ces deux boules. Ce qui conduit à penser qu'il y a $\binom{4}{2}\ 2^k$ k-tirages convenables.
- Attention : si l'on procède ainsi, on peut ne tirer que la boule portant le 1er numéro (resp. l'autre numéro). Il y a donc 2 k tirages à exclure. On retrouve bien les $\binom{4}{2}\ (2^k - 2)$ k-tirages convenables.

□

9. On note, pour tout i de $[\![1,4]\!]$, A_i l'événement :
« la boule numéro i n'a pas été obtenue au cours des k premiers tirages ».

a) Montrer : $\mathbb{P}([Z_k \leqslant 3]) = 4\,\mathbb{P}(A_1) - 6\,\mathbb{P}(A_1 \cap A_2) + 4\,\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3)$.

Démonstration.
L'événement $[Z_k \leqslant 3]$ est réalisé si et seulement si au moins l'une des 4 boules n'a pas été obtenue au cours des k premiers tirages. Donc :

$$[Z_k \leqslant 3] = A_1 \ \cup\ A_2 \ \cup\ A_3 \ \cup\ A_4$$

- D'après la formule du crible :

$$\begin{array}{cl} & \mathbb{P}([Z_k \leqslant 3]) \\ = & \mathbb{P}(A_1 \ \cup\ A_2 \ \cup\ A_3 \ \cup\ A_4) \\ = & \mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(A_2) + \mathbb{P}(A_3) + \mathbb{P}(A_4) \\ - & \mathbb{P}(A_1 \cap A_2) - \mathbb{P}(A_1 \cap A_3) - \mathbb{P}(A_1 \cap A_4) - \mathbb{P}(A_2 \cap A_3) - \mathbb{P}(A_2 \cap A_4) - \mathbb{P}(A_3 \cap A_4) \\ + & \mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3) + \mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_4) + \mathbb{P}(A_1 \cap A_3 \cap A_4) + \mathbb{P}(A_2 \cap A_3 \cap A_4) \\ - & \mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4) \end{array}$$

- Les boules jouant un rôle similaire, la probabilité de ne pas en tirer une au cours de k tirages est la même, quelle que soit la boule considérée. Ainsi :

$$\mathbb{P}(A_1) = \mathbb{P}(A_2) = \mathbb{P}(A_3) = \mathbb{P}(A_4)$$

  De même, la probabilité de ne pas en tirer deux au cours de k tirages est la même, quelle que soit les deux boules considérées. Ainsi :

$$\mathbb{P}(A_1 \cap A_2) = \mathbb{P}(A_1 \cap A_3) = \mathbb{P}(A_1 \cap A_4) = \mathbb{P}(A_2 \cap A_3) = \mathbb{P}(A_2 \cap A_4) = \mathbb{P}(A_3 \cap A_4)$$

  Et, par le même raisonnement :

$$\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = \mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_4) = \mathbb{P}(A_1 \cap A_3 \cap A_4) = \mathbb{P}(A_2 \cap A_3 \cap A_4)$$

- On en déduit que :

$$\mathbb{P}([Z_k \leqslant 3]) \ = \ 4\ \mathbb{P}(A_1) - 6\ \mathbb{P}(A_1 \cap A_2) + 4\ \mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3) - \mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4)$$

- Enfin, on remarque que : $A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4 = \varnothing$.
  En effet, il n'est pas possible, lors des k tirages, de ne tirer aucune des boules de l'urne. Ainsi :

$$\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4) = 0$$

$$\boxed{\text{On en déduit : } \mathbb{P}([Z_k \leqslant 3]) = 4\,\mathbb{P}(A_1) - 6\,\mathbb{P}(A_1 \cap A_2) + 4\,\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3)}$$

□

Commentaire

Dans le programme, il est précisé que la formule du crible ne doit être connu que jusqu'à l'ordre 3. Il faudrait donc, si on suit le programme à la lettre, adopter la rédaction suivante.

- D'après la formule du crible appliquée à A_1 et $A_2 \cup A_3 \cup A_4$, on a :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}([Z_k \leqslant 3]) &= \mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(A_2 \cup A_3 \cup A_4) - \mathbb{P}(A_1 \ \cap \ (A_2 \cup A_3 \cup A_4)\\ &= \mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(A_2 \cup A_3 \cup A_4) - \mathbb{P}((A_1 \cap A_2) \ \cup \ (A_1 \cap A_3) \ \cup \ (A_1 \cap A_4))\end{aligned}$$

- D'après la formule du crible appliquée à A_2, A_3 et A_4, on obtient :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A_2 \cup A_3 \cup A_4) &= \mathbb{P}(A_2) + \mathbb{P}(A_3) + \mathbb{P}(A_4)\\ &\quad - \mathbb{P}(A_2 \cap A_3) - \mathbb{P}(A_2 \cap A_4) - \mathbb{P}(A_3 \cap A_4)\\ &\quad + \mathbb{P}(A_2 \cap A_3 \cap A_4)\\ &= 3\,\mathbb{P}(A_1) - 3\,\mathbb{P}(A_1 \cap A_2) + \mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3) \qquad \textit{(car les boules sont indiscernables)}\end{aligned}$$

- D'après la formule du crible appliquée à $A_1 \cap A_2$, $A_1 \cap A_3$ et $A_1 \cap A_4$, on obtient :

$$\begin{aligned}&\mathbb{P}((A_1 \cap A_2) \ \cup \ (A_1 \cap A_3) \ \cup \ (A_1 \cap A_4))\\ =\ &\mathbb{P}(A_1 \cap A_2) + \mathbb{P}(A_1 \cap A_3) + \mathbb{P}(A_1 \cap A_4)\\ &- \mathbb{P}((A_1 \cap A_2) \ \cap \ (A_1 \cap A_3)) - \mathbb{P}((A_1 \cap A_2) \ \cap \ (A_1 \cap A_4))\\ &- \mathbb{P}((A_1 \cap A_3) \ \cap \ (A_1 \cap A_4))\\ &+ \mathbb{P}((A_1 \cap A_2) \ \cap \ (A_1 \cap A_3) \ \cap \ (A_1 \cap A_4))\\ =\ &\mathbb{P}(A_1 \cap A_2) + \mathbb{P}(A_1 \cap A_3) + \mathbb{P}(A_1 \cap A_4)\\ &- \mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3) - \mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_4)\\ &- \mathbb{P}(A_1 \cap A_3 \cap A_4)\\ &+ \mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4)\\ =\ &3\,\mathbb{P}(A_1 \cap A_2) - 3\,\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3) + \mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4) \qquad \textit{(car les boules sont indiscernables)}\\ =\ &3\,\mathbb{P}(A_1 \cap A_2) - 3\,\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3) \qquad \textit{(car } \bigcap_{i=1}^{4} A_i = \varnothing\textit{)}\end{aligned}$$

- Finalement $\mathbb{P}([Z_k \leqslant 3])$

$$\begin{aligned}\mathbb{P}([Z_k \leqslant 3]) &= \mathbb{P}(A_1)\\ &\quad + (3\,\mathbb{P}(A_1) - 3\,\mathbb{P}(A_1 \cap A_2) + \mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3))\\ &\quad - (3\,\mathbb{P}(A_1 \cap A_2) - 3\,\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3)\\ &= 4\,\mathbb{P}(A_1) - 6\,\mathbb{P}(A_1 \cap A_2) + 4\,\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3)\end{aligned}$$

b) Calculer $\mathbb{P}(A_1)$, $\mathbb{P}(A_1 \cap A_2)$ et $\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3)$.

Démonstration.

- On remarque : $A_1 = [X_1 = 0]$.

  D'après la question ***1.*** : $\mathbb{P}(A_1) = \mathbb{P}([X_1 = 0]) = \dbinom{k}{0} \left(\dfrac{1}{4}\right)^0 \left(1 - \dfrac{1}{4}\right)^{k-0} = \left(\dfrac{3}{4}\right)^k$.

$$\boxed{\mathbb{P}(A_1) = \left(\frac{3}{4}\right)^k}$$

- On remarque que :

$$A_1 \cap A_2 = [X_1 = 0] \cap [X_2 = 0] = [X_1 + X_2 = 0]$$

D'après la question ***3.a)*** :

$$\mathbb{P}(A_1 \cap A_2) = \mathbb{P}([X_1 + X_2 = 0]) = \binom{k}{0} \left(\frac{2}{4}\right)^0 \left(1 - \frac{2}{4}\right)^{k-0} = \left(\frac{1}{2}\right)^k$$

$$\boxed{\mathbb{P}(A_1 \cap A_2) = \left(\frac{1}{2}\right)^k}$$

- On remarque que :

$$A_1 \cap A_2 \cap A_3 = [X_4 = k]$$

En effet, ne piocher aucune des boules 1 à 3 au cours des k tirages, revient exactement à ne piocher que la boule numéro 4 au cours de ces k tirages.
D'après la question ***1.*** :

$$\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = \mathbb{P}([X_4 = k]) = \binom{k}{k} \left(\frac{1}{4}\right)^k \left(1 - \frac{1}{4}\right)^{k-k} = \left(\frac{1}{4}\right)^k$$

$$\boxed{\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = \left(\frac{1}{4}\right)^k}$$

□

c) En déduire : $\mathbb{P}([Z_k \leqslant 3])$, puis $\mathbb{P}([Z_k = 3])$ et $\mathbb{P}([Z_k = 4])$.

Démonstration.

- On calcule :

$$\begin{array}{rcll} \mathbb{P}([Z_k \leqslant 3]) & = & 4\,\mathbb{P}(A_1) - 6\,\mathbb{P}(A_1 \cap A_2) + 4\,\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3) & \textit{(d'après } \textbf{\textit{9.a)}}\textit{)} \\ & = & 4 \left(\frac{3}{4}\right)^k - 6 \left(\frac{1}{2}\right)^k + 4 \left(\frac{1}{4}\right)^k & \textit{(d'après } \textbf{\textit{9.b)}}\textit{)} \\ & = & \dfrac{4 \times 3^k - 6 \times 2^k + 4}{4^k} & \end{array}$$

$$\boxed{\mathbb{P}([Z_k \leqslant 3]) = \frac{4 \times 3^k - 6 \times 2^k + 4}{4^k}}$$

- On sait que :

$$[Z_k \leqslant 3] = [Z_k = 1] \cup [Z_k = 2] \cup [Z_k = 3]$$

Les événements $[Z_k = 1]$, $[Z_k = 2]$ et $[Z_k = 3]$ sont incompatibles. Donc :

$$\mathbb{P}([Z_k \leqslant 3]) = \mathbb{P}([Z_k = 1]) + \mathbb{P}([Z_k = 2]) + \mathbb{P}([Z_k = 3])$$

On obtient donc :

$$\begin{array}{rcll} \mathbb{P}([Z_k = 3]) & = & \mathbb{P}([Z_k \leqslant 3]) - \mathbb{P}([Z_k = 1]) - \mathbb{P}([Z_k = 2]) & \\ & = & \dfrac{4 \times 3^k - 6 \times 2^k + 4}{4^k} - \dfrac{1}{4^{k-1}} - \dfrac{6\,(2^k - 2)}{4^k} & \textit{(d'après } \textbf{\textit{7.}} \textit{ et } \textbf{\textit{8.}}\textit{)} \\ & = & \dfrac{4 \times 3^k - 6 \times 2^k + \cancel{4} - \cancel{4} - 6 \times 2^k + 12}{4^k} & \\ & = & \dfrac{4 \times 3^k - 12 \times 2^k + 12}{4^k} & \end{array}$$

- On remarque que :
$$[Z_k = 4] = \overline{[Z_k \leqslant 3]}$$
On obtient donc :
$$\mathbb{P}([Z_k = 4]) = 1 - \mathbb{P}([Z_k \leqslant 3]) = 1 - \frac{4 \times 3^k - 6 \times 2^k + 4}{4^k} = \frac{4^k - 4 \times 3^k + 6 \times 2^k - 4}{4^k}$$

$$\boxed{\mathbb{P}([Z_k = 3]) = \frac{4 \times 3^k - 12 \times 2^k + 12}{4^k} \quad \text{et} \quad \mathbb{P}([Z_k = 4]) = \frac{4^k - 4 \times 3^k + 6 \times 2^k - 4}{4^k}}$$ □

III. Exercice III (EML 2005)

1. **Préliminaire :**

Soit $x \in]0,1[$. Dans une succession d'épreuves de Bernoulli indépendantes, de même probabilité d'échec x, on définit deux suites de variables aléatoires $(S_n)_{n \geqslant 1}$ et $(T_n)_{n \geqslant 1}$ de la façon suivante :

× pour tout entier naturel n non nul, S_n est la variable aléatoire égale au nombre d'épreuves nécessaires pour obtenir le $n^{\text{ème}}$ succès ;

× T_1 est la variable aléatoire égale à S_1 et pour tout entier naturel $n \geqslant 2$, T_n est la variable aléatoire égale au nombre d'épreuves supplémentaires nécessaires pour obtenir le $n^{\text{ème}}$ succès après le $(n-1)^{\text{ème}}$ succès.

Ainsi, pour tout $n \geqslant 2$, $T_n = S_n - S_{n-1}$ et pour tout $n \geqslant 1$, $S_n = T_1 + T_2 + \cdots + T_n$.

a) Pour tout entier naturel n non nul, déterminer la loi de T_n et, sans calcul, donner l'espérance et la variance de T_n.

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Deux cas se présentent.
Cas $n = 1$

- L'expérience aléatoire consiste en une succession d'épreuves de Bernoulli indépendantes et de même paramètre $1 - x$.
- La v.a.r. T_1 est le rang d'apparition du premier succès de l'expérience.

$$\boxed{\text{Ainsi, } T_1 \hookrightarrow \mathcal{G}(1-x).}$$

Cas $n \geqslant 2$: dans ce cas, T_n est le rang d'apparition du $n^{\text{ème}}$ succès de l'expérience à la suite du $(n-1)^{\text{ème}}$ succès.

- Une fois le $n-1^{\text{ème}}$ succès obtenu, l'expérience aléatoire consiste de nouveau en une succession d'épreuves de Bernoulli indépendantes et de même paramètre $1 - x$.
- La v.a.r. T_n est alors le rang d'apparition du premier succès dans cette nouvelle expérience.

$$\boxed{\text{Ainsi, pour tout } n \geqslant 2,\ T_n \hookrightarrow \mathcal{G}(1-x).}$$

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{Ainsi, pour tout } n \in \mathbb{N}^*,\ T_n \text{ admet une espérance et une variance. Plus précisément :} \\ \mathbb{E}(T_n) = \dfrac{1}{1-x} \quad \text{et} \quad \mathbb{V}(T_n) = \dfrac{x}{(1-x)^2}.\end{array}}$$

Commentaire

La v.a.r. T_n est définie par cas ($n = 1$ et $n \geqslant 2$).
On doit donc traiter ces deux définitions séparément même si, ici, le résultat est le même.

□

b) Pour tout entier naturel $n \geqslant 2$, justifier l'indépendance des variables aléatoires $T_1, T_2, \ldots, T_n$.

Démonstration.
Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on considère les événements :
× A_k : « obtenir un échec au $k^{\text{ème}}$ tirage ».
× B_k : « obtenir un succès au $k^{\text{ème}}$ tirage ».

- Soit $(i_1, \ldots, i_n) \in (\mathbb{N}^*)^n$. Remarquons tout d'abord que :

$$\begin{aligned} & [T_1 = i_1] \cap \ldots \cap [T_n = i_n] \\ = \ & \left(\left(\bigcap_{k=1}^{i_1 - 1} A_k \right) \cap B_{i_1} \right) \cap \left(\left(\bigcap_{k=i_1+1}^{i_1+i_2-1} A_k \right) \cap B_{i_1+i_2} \right) \cap \ldots \cap \left(\left(\bigcap_{k=i_1+\ldots+i_{n-1}-1}^{i_1+\ldots+i_n-1} A_k \right) \cap B_{i_1+\ldots+i_n} \right) \end{aligned}$$

- Les tirages étant indépendants, on obtient :

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}([T_1 = i_1] \cap \ldots \cap [T_n = i_n]) \\ = \ & \mathbb{P}\left(\left(\left(\bigcap_{k=1}^{i_1 - 1} A_k \right) \cap B_{i_1} \right) \cap \left(\left(\bigcap_{k=i_1+1}^{i_1+i_2-1} A_k \right) \cap B_{i_1+i_2} \right) \cap \ldots \cap \left(\left(\bigcap_{k=i_1+\ldots+i_{n-1}-1}^{i_1+\ldots+i_n-1} A_k \right) \cap B_{i_1+\ldots+i_n} \right) \right) \\ = \ & \left(\prod_{k=1}^{i_1-1} \mathbb{P}(A_k) \right) \times \mathbb{P}(B_{i_1}) \times \left(\prod_{k=i_1+1}^{i_1+i_2-1} \mathbb{P}(A_k) \right) \times \mathbb{P}(B_{i_1+i_2}) \times \ldots \times \left(\prod_{k=i_1+\ldots+i_{n-1}-1}^{i_1+\ldots+i_n-1} \mathbb{P}(A_k) \right) \times \mathbb{P}(B_{i_1+\ldots+i_n}) \\ = \ & \big(x^{i_1-1} \times (1-x)\big) \times \big(x^{i_2-1} \times (1-x)\big) \times \ldots \times \big(x^{i_n-1} \times (1-x)\big) \\ = \ & \mathbb{P}([T_1 = i_1]) \times \ldots \times \mathbb{P}([T_n = i_n]) \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Ainsi, les v.a.r. } T_1, \ \ldots, \ T_n \text{ sont indépendantes.}}$$

Commentaire

Vu la manière dont est rédigée la question, on peut penser que le concepteur attendait comme réponse : « Le nombre de tirages nécessaires à l'apparition du $n^{\text{ème}}$ succès est indépendant du rang d'apparition du succès précédent. Ainsi les v.a.r. $T_1, \ \ldots, \ T_n$ sont indépendantes ».

□

c) Pour tout entier naturel n non nul, montrer que l'espérance et la variance de S_n sont définies et montrer :

$$\mathbb{E}(S_n) = \frac{n}{1-x} \quad \text{et} \quad \mathbb{V}(S_n) = \frac{nx}{(1-x)^2}$$

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

- S_n admet une espérance (resp. une variance) comme somme de v.a.r. qui admettent une espérance (resp. une variance).
- De plus :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(S_n) &= \mathbb{E}\left(\sum_{k=1}^{n} T_k \right) \\ &= \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}(T_k) && \textit{(par linéarité de l'espérance)} \\ &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1-x} && \textit{(d'après la question } \textbf{\textit{1.a)}}\textit{)} \\ &= \frac{n}{1-x} \end{aligned}$$

- Enfin :

$$\begin{array}{rcll} \mathbb{V}(S_n) & = & \mathbb{V}\left(\sum\limits_{k=1}^{n} T_k\right) & \\ & = & \sum\limits_{k=1}^{n} \mathbb{V}(T_k) & \textit{(par propriété de la variance, les v.a.r. } T_1, \ldots, T_n \textit{ étant indépendantes)} \\ & = & \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{x}{(1-x)^2} & \textit{(d'après la question } \textbf{1.a)}\textit{)} \\ & = & \dfrac{nx}{(1-x)^2} & \end{array}$$

$$\boxed{\text{Pour tout } n \in \mathbb{N}^*, \ \mathbb{E}(S_n) = \frac{n}{1-x} \quad \text{et} \quad \mathbb{V}(T_n) = \frac{nx}{(1-x)^2}.}$$

□

d) Soit n un entier naturel non nul. Déterminer la loi de S_n.
Que peut-on dire, sans calcul, de la valeur de $\sum\limits_{k=n}^{+\infty} \mathbb{P}([S_n = k])$?

Démonstration.

- Par définition, S_n est le rang d'apparition du $n^{\text{ème}}$ succès de l'expérience. Le $n^{\text{ème}}$ succès peut se produire au plus tôt lors du $n^{\text{ème}}$ tirage et à n'importe quel tirage suivant.

$$\boxed{\text{On en déduit que } S_n(\Omega) = [\![n, +\infty[\![.}$$

- Soit $k \in [\![n, +\infty[\![$.
L'événement $[S_n = k]$ est réalisé si le $n^{\text{ème}}$ succès de l'expérience a lieu lors du $k^{\text{ème}}$ tirage. Autrement dit, cet événement est réalisé si le $k^{\text{ème}}$ tirage est un succès et qu'il y a eu $n-1$ succès lors des $k-1$ premiers tirages.
- Pour tout $j \in \mathbb{N}^*$ on introduit la v.a.r. U_j qui donne le nombre de succès lors des j premiers tirages. D'après ce qui précède :

$$[S_n = k] \ = \ [U_{k-1} = n-1] \ \cap \ B_k$$

Le résultat du $k^{\text{ème}}$ tirage étant indépendant des résultats précédents, les événements $[U_{k-1} = n-1]$ et B_k sont indépendants. Ainsi :

$$\mathbb{P}([S_n = k]) \ = \ \mathbb{P}([U_{k-1} = n-1]) \ \times \ \mathbb{P}(B_k)$$

- Or la v.a.r. U_{k-1} compte le nombre de succès obtenus lors d'une expérience consistant en une répétition de $k-1$ épreuves de Bernoulli indépendantes et de même paramètre $1-x$.

$$\boxed{\text{Ainsi, } U_{k-1} \hookrightarrow \mathcal{B}(k-1, 1-x).}$$

- On en déduit que :

$$\mathbb{P}([U_{k-1} = n-1]) = \binom{k-1}{n-1} \ (1-x)^{n-1} \ x^{k-n}$$

Et comme $\mathbb{P}(B_k) = 1-x$, on peut conclure.

$$\boxed{S_n(\Omega) = [\![n, +\infty[\![\text{ et pour tout } k \in [\![n, +\infty[\![, \ \mathbb{P}([S_n = k]) = \binom{k-1}{n-1} \ (1-x)^n \ x^{k-n}.}$$

- La famille $\Big([S_n = k] \Big)_{k \in [\![n, +\infty[\![}$ est un système complet d'événements.

$$\boxed{\text{On en déduit que : } \sum_{k=n}^{+\infty} \mathbb{P}([S_n = k]) = 1.}$$

□

e) En déduire, pour tout $x \in \,]0,1[$ et pour tout entier naturel n non nul :

$$\sum_{k=n}^{+\infty} \binom{k-1}{n-1} x^k = \frac{x^n}{(1-x)^n}$$

Démonstration.
D'après la question précédente : $\sum\limits_{k=n}^{+\infty} \mathbb{P}([S_n = k]) = 1$. Or :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=n}^{+\infty} \mathbb{P}([S_n = k]) = 1 \quad &\Leftrightarrow \quad \sum_{k=n}^{+\infty} \binom{k-1}{n-1} \ (1-x)^n \ x^{k-n} = 1 \\
&\Leftrightarrow \quad \sum_{k=n}^{+\infty} \binom{k-1}{n-1} \ (1-x)^n \ x^{k-n} = 1 \\
&\Leftrightarrow \quad (1-x)^n \ x^{-n} \left(\sum_{j=n}^{+\infty} \binom{k-1}{n-1} \ x^k \right) = 1 \\
&\Leftrightarrow \quad \sum_{k=n}^{+\infty} \binom{k-1}{n-1} \ x^k = \frac{x^n}{(1-x)^n}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\sum_{k=n}^{+\infty} \binom{k-1}{n-1} \ x^k = \frac{x^n}{(1-x)^n}}$$

□

2. Deux joueurs A et B procèdent chacun à une succession de lancers d'une même pièce. À chaque lancer, la probabilité d'obtenir pile est p (p fixé, $p \in \,]0,1[$), et celle d'obtenir face est $q = 1 - p$.
Le joueur A commence et il s'arrête quand il obtient le premier pile. On note X la variable aléatoire égale au nombre de lancers effectués par le joueur A.
Le joueur B effectue alors autant de lancers que le joueur A et on note Y la variable aléatoire égale au nombre de piles obtenu par le joueur B.

a) Rappeler la loi de X et, pour tout $k \geqslant 1$, donner la loi conditionnelle de Y sachant $[X = k]$.

Démonstration.

- L'expérience consiste en une succession infinie d'épreuves de Bernoulli (dont le succès est d'obtenir pile et l'échec est d'obtenir face) indépendantes et de même paramètre p.
- La v.a.r. X est le rang d'apparition du premier succès.

$$\boxed{\text{Ainsi, } X \hookrightarrow \mathcal{G}(p).}$$

Soit $k \geqslant 1$. On s'intéresse alors à la loi conditionnelle de Y sachant $[X = k]$.

- Si $[X = k]$ est réalisé, le joueur B procède alors k lancers de pièces.
  - × Cette expéricence consiste en la répétition de k épreuves de Bernoulli (dont le succès est d'obtenir pile et l'échec est d'obtenir face) indépendantes et de même paramètre p.
  - × La v.a.r. Y compte le nombre de succès obtenus lors de cette expérience.

  Ainsi, la loi conditionnelle de Y sachant $[X = k]$ est l aloi binomiale de paramètre (k, p).

$$\boxed{\text{Autrement dit, pour tout } i \in [\![0,k]\!] : \mathbb{P}_{[X=k]}([Y = i]) = \binom{k}{i} p^i \ (1-p)^{k-i}}$$

□

b) Quelles sont les valeurs prises par Y ?

Démonstration.

- On a vu dans la question précédente que si $[X = k]$ est réalisé alors Y peut prendre toutes les valeurs de $[\![0, k]\!]$.
- Or $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$. Autrement dit, X peut prendre toutes les valeurs $k \in \mathbb{N}^*$.

On en déduit que Y peut prendre toutes les valeurs de $\mathbb{N}$.

$$\boxed{Y(\Omega) = \mathbb{N}}$$

Commentaire

On peut faire cette démonstration en revenant une nouvelle fois à l'expérience réalisée :

× pour tout $i \in \mathbb{N}^*$, le joueur B peut obtenir i piles. Cela est notamment réalisé si le joueur A a obtenu le premier pile lors de son $i^{\text{ème}}$ lancer et si le joueur B n'a obtenu que des piles lors de ses lancers.

× le joueur B peut aussi obtenir 0 pile et ce quelque soit le nombre de tirages dont il dispose.

□

c) Montrer : $\mathbb{P}([Y = 0]) = \sum\limits_{k=1}^{+\infty} pq^{2k-1} = \dfrac{q}{1+q}$.

Démonstration.
La famille $\Big([X = k]\Big)_{k \in [\![1, +\infty[\![}$ est un système complet d'événements.
Ainsi, par la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}([Y = 0]) &= \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}([X = k] \cap [Y = 0]) \\
&= \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}([X = k]) \times \mathbb{P}_{[X=k]}([Y = 0]) && \textit{(valide car } \mathbb{P}([X = k]) \neq 0\textit{)} \\
&= \sum_{k=1}^{+\infty} (1-p)^{k-1}\, p \times \binom{k}{0}\, p^0\, (1-p)^{k-0} && \textit{(d'après les questions précédentes)} \\
&= \sum_{k=1}^{+\infty} (1-p)^{2k-1}\, p \;=\; \sum_{k=1}^{+\infty} p\, q^{2k-1} \\
&= p \sum_{k=1}^{+\infty} q^{2k-1} \;=\; p \sum_{k=0}^{+\infty} q^{2(k+1)-1} && \textit{(par décalage d'indice)} \\
&= p \sum_{k=0}^{+\infty} q^{2k+1} \;=\; pq \sum_{k=0}^{+\infty} \left(q^2\right)^k \\
&= pq\, \frac{1}{1-q^2} && \textit{(car } q^2 \in\,]-1, 1[\textit{)} \\
&= \cancel{p}\, q\, \frac{1}{\cancel{(1-q)}\, (1+q)} \;=\; \frac{q}{1+q}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathbb{P}([Y = 0]) = \sum_{k=1}^{+\infty} pq^{2k-1} = \frac{q}{1+q}}$$

□

d) Soit n un entier naturel non nul.

Montrer : $\mathbb{P}([Y=n]) = \sum\limits_{k=n}^{+\infty} \binom{k}{n} p^{n+1} q^{2k-n-1}$.

Puis, en utilisant ***1.e***, montrer que : $\mathbb{P}([Y=n]) = \dfrac{1}{(1+q)^2} \left(\dfrac{q}{1+q}\right)^{n-1}$.

Démonstration.

- La famille $\Big([X=k]\Big)_{k\in[\![1,+\infty[\![}$ est un système complet d'événements.
  Ainsi, par la formule des probabilités totales :

$$\begin{array}{rll}
& \mathbb{P}([Y=n]) & \\
= & \sum\limits_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}([X=k]\cap[Y=n]) & \\
= & \sum\limits_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}([X=k]) \times \mathbb{P}_{[X=k]}([Y=n]) & \textit{(valide car } \mathbb{P}([X=k]) \neq 0\textit{)} \\
= & \sum\limits_{k=1}^{n-1} \mathbb{P}([X=k]) \times \mathbb{P}_{[X=k]}([Y=n]) + \sum\limits_{k=n}^{+\infty} \mathbb{P}([X=k]) \times \mathbb{P}_{[X=k]}([Y=n]) & \textit{(par relation de Chasles)} \\
= & \sum\limits_{k=n}^{+\infty} \mathbb{P}([X=k]) \times \mathbb{P}_{[X=k]}([Y=n]) & \textit{(car pour tout } k<n, \ \mathbb{P}_{[X=k]}([Y=n])=0\textit{)} \\
= & \sum\limits_{k=n}^{+\infty} (1-p)^{k-1}\ p \binom{k}{n}\ p^n\ (1-p)^{k-n} & \\
= & \sum\limits_{k=n}^{+\infty} \binom{k}{n}\ p^{n+1}\ (1-p)^{2k-n-1} & \\
= & \dfrac{p^{n+1}}{(1-p)^{n+1}} \sum\limits_{k=n}^{+\infty} \binom{k}{n}\ (1-p)^{2k} \ = \ \dfrac{p^{n+1}}{q^{n+1}} \sum\limits_{k=n}^{+\infty} \binom{k}{n} \left(q^2\right)^k &
\end{array}$$

$$\boxed{\mathbb{P}([Y=n]) \ = \ \dfrac{p^{n+1}}{q^{n+1}} \sum\limits_{k=n}^{+\infty} \binom{k}{n} \left(q^2\right)^k}$$

- Or, par décalage d'indice :

$$\sum\limits_{k=n}^{+\infty} \binom{k}{n} \left(q^2\right)^k \ = \ \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} \binom{k-1}{n} \left(q^2\right)^{k-1} \ = \ \dfrac{1}{q^2} \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} \binom{k-1}{n} \left(q^2\right)^k$$

- D'après la question ***1.e)***, pour tout $m \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in\ ]0,1[$:

$$\sum\limits_{k=m}^{+\infty} \binom{k-1}{m-1} x^k \ = \ \dfrac{x^m}{(1-x)^m}$$

  En appliquant cette relation à $m=n+1 \in \mathbb{N}^*$, et $x=q^2 \in\ ]0,1[$, on obtient :

$$\sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} \binom{k-1}{n} \left(q^2\right)^{k-1} \ = \ \dfrac{\left(q^2\right)^{n+1}}{(1-q^2)^{n+1}}$$

- En combinant tous les résultats obtenus :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}([Y=n]) &= \frac{p^{n+1}}{q^{n+1}} \sum_{k=n}^{+\infty} \binom{k}{n} \left(q^2\right)^k \\
&= \frac{p^{n+1}}{q^{n+1}} \frac{1}{q^2} \sum_{k=n+1}^{+\infty} \binom{k-1}{n} \left(q^2\right)^k \\
&= \frac{p^{n+1}}{q^{n+1}} \frac{1}{q^2} \frac{\left(q^2\right)^{n+1}}{(1-q^2)^{n+1}} \\
&= \frac{1}{q^2} \left(\frac{q^2}{q}\right)^{n+1} p^{n+1} \frac{1}{(1-q)^{n+1}\,(1+q)^{n+1}} \\
&= \frac{1}{q^2}\, q^{n+1}\, \cancel{p^{n+1}} \frac{1}{\cancel{p^{n+1}}\,(1+q)^{n+1}} \\
&= \frac{q^{n-1}}{(1+q)^{n+1}} = \frac{1}{(1+q^2)} \frac{q^{n-1}}{(1+q)^{n-1}}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Pour tout } n \in \mathbb{N}^*,\ \ \mathbb{P}([Y=n]) = \frac{1}{(1+q^2)} \left(\frac{q}{1+q}\right)^{n-1}.}$$

□