DS4 (version B)

I. EXERCICE

Dans cet exercice, n est un entier supérieur ou égal à 2. On note E l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ et Id l'application identité de E.
L'objet de l'exercice est l'étude des endomorphismes f de E vérifiant l'équation $(*)$: $f \circ f = 4\,\mathrm{Id}$.

A. Étude du cas n = 2

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ dont la matrice dans la base canonique est : $A = \sqrt{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.
Soit u le vecteur de $\mathbb{R}^2$ défini par $u = \left(\sqrt{2}-2,\ \sqrt{2}\right)$.

1. Montrer que f vérifie l'équation $(*)$, puis préciser le noyau et l'image de f.

2. On note $F = \mathrm{Ker}\,(f - 2\,\mathrm{Id})$ et $G = \mathrm{Im}\,(f - 2\,\mathrm{Id})$.

a) Montrer que G est engendré par le vecteur u.
En déduire la dimension de F et donner une base de F. On notera v le vecteur de cette base.

b) Montrer que $G = \mathrm{Ker}(f + 2\,\mathrm{Id})$.

3. *a)* Justifier que (u, v) est une base de $\mathbb{R}^2$.

b) **Seulement pour les carrés :** Déterminer la matrice représentative de f dans la base (u, v).
Seulement pour les cubes : Montrer que f est diagonalisable ; préciser les valeurs propres de f et donner la matrice de passage de la base canonique à une base de vecteurs propres.

B. Étude du cas général

On se place désormais dans le cas où n est supérieur ou égal à 2, et on considère un endomorphisme f de E vérifiant l'équation $(*)$.

4. *a)* Justifier que f est un automorphisme de E et exprimer l'automorphisme réciproque f^{-1} en fonction de f.

b) **Seulement pour les cubes :** Déterminer les valeurs propres possibles de f.

c) Vérifier que $2\,\mathrm{Id}$ et $-2\,\mathrm{Id}$ satisfont l'équation $(*)$.

On suppose dans la suite de l'exercice que $f \neq 2\,\mathrm{Id}$ et $f \neq -2\,\mathrm{Id}$ et on note $F = \mathrm{Ker}\,(f - 2\,\mathrm{Id})$ et $G = \mathrm{Im}\,(f - 2\,\mathrm{Id})$.

5. Soit x un élément de E. Montrer que $(f(x) - 2x) \in \mathrm{Ker}\,(f + 2\,\mathrm{Id})$ et que $(f(x) + 2x) \in F$.
En déduire que $G \subset \mathrm{Ker}\,(f + 2\,\mathrm{Id})$ et que $\mathrm{Im}\,(f + 2\,\mathrm{Id}) \subset F$.
Montrer que 2 et -2 sont les valeurs propres de f.

6. Soit x un vecteur de $\mathrm{Ker}\,(f + 2\,\mathrm{Id})$.

a) Exprimer $(f - 2\,\mathrm{Id})(x)$ en fonction de x uniquement.
En déduire que x appartient à G, puis que $G = \mathrm{Ker}\,(f + 2\,\mathrm{Id})$.

b) **Seulement pour les cubes :** Montrer que f est diagonalisable.

II. PROBLÈME

Dans tout le problème, on considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 0$, $u_1 = 1$ et la relation :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$$

La partie II est indépendante de la partie I et la partie III est indépendante de la partie II.

Partie I. Analyse

1. ***a)*** Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante d'entiers naturels.

b) La suite est-elle convergente ?

Dans toute la suite du problème, a **et** b $(a > b)$ **désignent les deux solutions de l'équation du second degré suivante :** $x^2 - x - 1 = 0$.

2. ***a)*** Montrer que : $b = 1 - a = -\dfrac{1}{a}$. Établir l'encadrement suivant $1 < a < 2$.

b) Montrer que, pour tout n de $\mathbb{N}$, on a : $u_n = \dfrac{1}{\sqrt{5}}\,(a^n - b^n)$.

c) En déduire un équivalent de u lorsque n tend vers $+\infty$.

3. On pose, pour tout n de $\mathbb{N}$: $\beta_n = u_{n+1} - a\,u_n$.
Exprimer, pour tout n de $\mathbb{N}$, β_n en fonction de n et b.

4. On rappelle que pour tout réel x, la partie entière de x est l'entier noté $\lfloor x\rfloor$ qui vérifie :

$$\lfloor x\rfloor \leqslant x < \lfloor x\rfloor + 1$$

a) Établir, pour tout n de $\mathbb{N}$, l'égalité suivante : $\lfloor a\,u_{2n}\rfloor = u_{2n+1} - 1$.

b) Exprimer, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $\lfloor a\,u_{2n-1}\rfloor$, en fonction de u_{2n}.

5. Soit y un réel fixé vérifiant $|y| < 1$ et k un entier fixé de $\mathbb{N}$.

a) Montrer que la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} n^k\, y^n$ est absolument convergente.

b) En déduire la convergence de la serie $\sum\limits_{n\geqslant 1} n^k\, \dfrac{u_n}{2^{n+1}}$.

c) En utilisant la définition de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, calculer $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{u_n}{2^{n+1}}$.

Partie II. Algèbre et algorithmique

6. Soit A la matrice carrée d'ordre 4 définie par : $A = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 1 & 1\end{pmatrix}$

a) La matrice A est-elle inversible ?

b) Calculer A^2 et A^3. Vérifier que A^3 est une combinaison linéaire de A et A^2.

c) **Seulement pour les cubes :** Déterminer les valeurs propres de A.

d) Établir l'existence de deux suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ telles que, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on ait :

$$A^n = a_n\, A + b_n\, A^2$$

e) Exprimer, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, a_{n+1} et b_{n+1} en fonction de a_n et b_n.
Montrer que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ vérifient une relation de récurrence linéaire d'ordre 2.

7. On propose la fonction **Scilab** suivante :

```
function f = suite(n)
  u = 0
  v = 1
  for k = 1:(n-1)
    temp = ...........
    v = .............
    u = .............
  end
  f = ..............
endfunction
```

Compléter cette fonction aux quatre places signalées par des pointillés de façon que la valeur renvoyée soit u_n.

8. Soit n un entier de $\mathbb{N}^*$. On dit que n admet une Z-décomposition s'il existe un entier r de $\mathbb{N}^*$ tel que l'on puisse écrire $n = u_{k_1} + u_{k_2} + \cdots + u_{k_r}$, où, pour tout i de $[\![1, r]\!]$, k_i est un entier supérieur ou égal à 2 et où, pour tout i de $[\![1, r-1]\!]$ (avec $r \geqslant 2$), on a : $k_{i+1} - k_i \geqslant 2$.

a) Montrer que les entiers 37 et 272 admettent une Z-décomposition.

b) Soit n un entier admettant une Z-décomposition de la forme $n = u_{k_1} + u_{k_2} + \cdots + u_{k_r}$. Montrer, par récurrence sur r, que l'on a : $n < u_{k_r+1}$. En déduire l'unicité de r.

c) Montrer que, pour tout entier p supérieur ou égal à 2, tout entier n qui vérifie $1 \leqslant n \leqslant u_p$ admet une unique Z-décomposition (on pourra faire un raisonnement par récurrence sur p).

9. On suppose donnés un entier $p \geqslant 1$ et un vecteur `u` de $\mathbb{R}^{p-1}$ contenant les termes u_2, u_3, $\cdots$, u_p. Compléter le programme suivant pour qu'il renvoie la Z-décomposition d'un entier `n` tel que $1 \leqslant$ `n` $\leqslant u_p$. Expliquer et justifier l'algorithme utilisé.

```
n = input('Entrez un entier n inférieur à u_p')
Decomp = []
i = p - 1
while i <> 0
  if u(i) > n then
    i = ..............
  else
    Decomp = [u(i), Decomp]
    n = ..............
    i = ..............
  end
```

Partie III. Probabilités

On effectue dans une urne qui contient des boules numérotées 0 ou 1 une suite illimitée de tirages avec remise d'une boule. À chaque tirage, la probabilité de tirer une boule numérotée 1 est p ($0 < p < 1$) et la probabilité de tirer une boule numérotée 0 est q, avec $q = 1 - p$, et on suppose que les résultats des différents tirages sont indépendants.

On suppose que cette expérience est modélisée par un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$. On s'intéresse au nombre de tirages nécessaires pour obtenir deux boules numérotées 1 de suite, c'est-à-dire lors de deux tirages consécutifs. On définit, pour tout i de $\mathbb{N}^*$, les événements S_i : « le $i^{\text{ème}}$ tirage donne une boule numérotée 1 », et $B_i = S_i \cap S_{i+1}$.

Si au moins un des événements B_i se réalise au cours de l'expérience, on note Y la valeur de l'entier j correspondant au premier événement B_j réalisé. Sinon, c'est-à-dire si aucun des événements B_i ne se réalise, on attribue à Y la valeur 0. On admet que Y est une variable aléatoire définie sur $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$.
Par exemple, si le résultat de l'expérience est : 0, 1, 0, 0, 0, 1, 1, 0, 1, 1, 1, 0.
Alors Y prend la valeur 6.

10. ***a)*** Calculer, pour tout i de $\mathbb{N}^*$ la probabilité $\mathbb{P}(B_i)$.

b) Déterminer $Y(\Omega)$. Calculer $\mathbb{P}([Y=1])$, $\mathbb{P}([Y=2])$ et $\mathbb{P}([Y=3])$.

11. Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on note C_n, l'événement « lors des n premiers tirages, il n'apparaît jamais deux fois de suite une boule numérotée 1 ». On pose : $C_0 = \Omega$.

a) Calculer $\mathbb{P}(C_0)$, $\mathbb{P}(C_1)$ et $\mathbb{P}(C_2)$.

b) Établir, pour tout n de $\mathbb{N}$, la relation : $\mathbb{P}([Y=n+2]) = p^2 q\, \mathbb{P}(C_n)$.

12. ***a)*** En considérant les résultats possibles des deux premiers tirages, montrer, pour tout entier n supérieur ou égal à 2, l'égalité : $\mathbb{P}(C_n) = q\, \mathbb{P}(C_{n-1}) + pq\, \mathbb{P}(C_{n-2})$.

b) Déterminer, pour tout n de $\mathbb{N}^*$ une relation entre $\mathbb{P}([Y=n+2])$, $\mathbb{P}([Y=n+1])$ et $\mathbb{P}([Y=n])$.

13. On suppose dans cette question que $p = q = \frac{1}{2}$.

a) Montrer que, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on a : $\mathbb{P}([Y=n]) = \dfrac{u_n}{2^{n+1}}$ où la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a été définie dans le préambule du problème.

b) Que vaut $\mathbb{P}([Y=0])$?

c) On note $\mathbb{E}(Y)$ l'espérance de Y. Montrer que $\mathbb{E}(Y) = 5$.

d) Calculer la variance $\mathbb{V}(Y)$ de Y.

14. On revient au cas général : $0 < p < 1$ et $q = 1 - p$.

a) Montrer que l'équation du second degré $x^2 - qx - pq = 0$ admet deux racines distinctes. On les note r et s, avec $r > s$.

b) Établir les inégalités suivantes : $-1 < s < 0 < r < 1$ et $r > |s|$.

c) On pose $\Delta = q + 4pq$. Montrer que, pour tout n de $\mathbb{N}^*$ on a : $\mathbb{P}([Y=n]) = \dfrac{p^2}{\sqrt{\Delta}}(r^n - s^n)$.

d) Calculer $\mathbb{P}([Y=0])$.

e) Montrer que Y admet des moments de tous ordres et calculer l'espérance de Y.

15. ***a)*** Montrer, pour tout réel x vérifiant $|x| < \dfrac{1}{r}$, la convergence de la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \mathbb{P}([Y=n])\, x^n$.

On pose alors : $g(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}([Y=n])\, x^n$.

b) Établir, pour tout réel x vérifiant $|x| < \dfrac{1}{r}$, la formule suivante : $g(x) = \dfrac{p^2 x}{1 - qx - pqx^2}$.

16. On suppose dans cette question que $p = \frac{2}{3}$.

a) Étudier les variations de la fonction g sur l'intervalle $I = \left]-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right[$.

b) Montrer l'existence d'un unique réel α de $\left]-\frac{1}{2}, 0\right[$ tel que g soit concave sur l'intervalle $\left]-\frac{3}{2}, \alpha\right[$ et convexe sur l'intervalle $\left]\alpha, \frac{3}{2}\right[$.

c) Tracer l'allure de la courbe représentative de g sur I dans le plan rapporté à un repère orthonormé.