DS4 (version B)

I. EXERCICE (HEC 2005)

Dans cet exercice, n est un entier supérieur ou égal à 2. On note E l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ et Id l'application identité de E.
L'objet de l'exercice est l'étude des endomorphismes f de E vérifiant l'équation $(*)$: $f \circ f = 4\,\mathrm{Id}$

A. Étude du cas n = 2

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ dont la matrice dans la base canonique est : $A = \sqrt{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.
Soit u le vecteur de $\mathbb{R}^2$ défini par $u = \left(\sqrt{2}-2,\ \sqrt{2}\right)$.

1. Montrer que f vérifie l'équation $(*)$, puis préciser le noyau et l'image de f.

- **1 pt :** $A^2 = 4\ I$
- **1 pt : conclusion**

2. On note $F = \mathrm{Ker}\,(f - 2\,\mathrm{Id})$ et $G = \mathrm{Im}\,(f - 2\,\mathrm{Id})$.

- **2 pts :** $\mathrm{Ker}(f) = \{(0,0)\}$
- **2 pts :** $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}\,(()\,(1,1),(1,-1))$

a) Montrer que G est engendré par le vecteur u.
En déduire la dimension de F et donner une base de F. On notera v le vecteur de cette base.

- **1 pt :** $\mathrm{Im}(f - 2\mathrm{id}) = \mathrm{Vect}\,(()\,(\sqrt{2}-2, \sqrt{2}), (\sqrt{2}, -\sqrt{2}-2))$
- **1 pt :** $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}-2}\ (\sqrt{2}-2) = \sqrt{2}$
- **1 pt :** $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}-2}\ \sqrt{2} = -(\sqrt{2}+2)$
- **1 pt :** (u) **est une base de** $\mathrm{Im}(f - 2\mathrm{id})$**, et dimension**
- **1 pt : théorème du rang écrit correctement**
- **1 pt :** $\dim(\mathrm{Ker}(f - 2\mathrm{id}))$
- **1 pt :** $\mathrm{Ker}(f - 2\mathrm{id}) = \mathrm{Vect}\left((\sqrt{2}+2, \sqrt{2})\right)$

b) Montrer que $G = \mathrm{Ker}(f + 2\,\mathrm{Id})$.

- **1 pt :** $u \in \mathrm{Ker}(f + 2\,\mathrm{Id})$
- **2 pts :** $G \supset \mathrm{Ker}(f + 2\,\mathrm{Id})$ **(mieux si fait à l'aide des dimensions)**

3. *a)* Justifier que (u, v) est une base de $\mathbb{R}^2$.

- **1 pt : libre**
- **1 pt : de bon cardinal**

b) **Seulement pour les carrés :** Déterminer la matrice représentative de f dans la base (u, v).

- **1 pt : colonne 1**
- **1 pt : colonne 2**

Seulement pour les cubes : Montrer que f est diagonalisable ; préciser les valeurs propres de f et donner la matrice de passage de la base canonique à une base de vecteurs propres.

- **1 pt : valeur propre** -2
- **1 pt : valeur propre** 2
- **1 pt : conclusion**

B. Étude du cas général

On se place désormais dans le cas où n est supérieur ou égal à 2, et on considère un endomorphisme f de E vérifiant l'équation $(*)$.

4. ***a)*** Justifier que f est un automorphisme de E et exprimer l'automorphisme réciproque f^{-1} en fonction de f.

- **1 pt :** $f \circ \frac{1}{4} f = \mathrm{id} = \frac{1}{4} f \circ f$
- **1 pt :** $f^{-1} = \frac{1}{4} f$

b) **Seulement pour les cubes :** Déterminer les valeurs propres possibles de f.

- **1 pt :** $P(X) = X^2 - 4X$ **est un polynôme annulateur**
- **1 pt : conclusion**

c) Vérifier que $2\,\mathrm{Id}$ et $-2\,\mathrm{Id}$ satisfont l'équation $(*)$.

- **1 pt : vérification** $2\mathrm{id}$
- **1 pt : vérification** $-2\mathrm{id}$

On suppose dans la suite de l'exercice que $f \neq 2\,\mathrm{Id}$ et $f \neq -2\,\mathrm{Id}$ et on note $F = \mathrm{Ker}\,(f - 2\,\mathrm{Id})$ et $G = \mathrm{Im}\,(f - 2\,\mathrm{Id})$.

5. Soit x un élément de E. Montrer que $(f(x) - 2x) \in \mathrm{Ker}\,(f + 2\,\mathrm{Id})$ et que $(f(x) + 2x) \in F$.
En déduire que $G \subset \mathrm{Ker}\,(f + 2\,\mathrm{Id})$ et que $\mathrm{Im}\,(f + 2\,\mathrm{Id}) \subset F$.
Montrer que 2 et -2 sont les valeurs propres de f.

- **2 pts :** $(f(x) - 2x) \in \mathrm{Ker}\,(f + 2\,\mathrm{Id})$ **(dont 1 pt pour justification** $f \circ f = 4\mathrm{id}$**)**
- **1 pt :** $(f(x) + 2x) \in F$
- **2 pts :** $G \subset \mathrm{Ker}\,(f + 2\,\mathrm{Id})$ **(dont 1 pour exprimer ce que signifie** $w \in G$**)**
- **1 pt :** $\mathrm{Im}\,(f + 2\,\mathrm{Id}) \subset F$
- **2 pts :** $\mathrm{Ker}(f - 2\,\mathrm{Id}) \neq \{0\}$ **par l'absurde**
- **1 pt : de même pour** $\mathrm{Ker}(f + 2\,\mathrm{Id}) \neq \{0\}$

6. Soit x un vecteur de $\mathrm{Ker}\,(f + 2\,\mathrm{Id})$.

a) Exprimer $(f - 2\,\mathrm{Id})\,(x)$ en fonction de x uniquement.
En déduire que x appartient à G, puis que $G = \mathrm{Ker}\,(f + 2\,\mathrm{Id})$.

- **1 pt :** $(f - 2\,\mathrm{Id})(x) = -4x$
- **1 pt :** $x = (f - 2\mathrm{id})(-\frac{1}{4}x)$
- **1 pt : conclusion**

b) **Seulement pour les cubes :** Montrer que f est diagonalisable.

- **1 pt :** $\dim(\mathrm{Im}(f - 2\mathrm{id})) = \dim(\mathrm{Ker}(f + 2\mathrm{id}))$
- **1 pt : théorème du rang** $\dim(\mathrm{Ker}(f - 2\mathrm{id})) = n - \dim(\mathrm{Im}(f - 2\mathrm{id}))$
- **1 pt : conclusion** $\dim(\mathrm{Ker}(f - 2\mathrm{id})) + \dim(\mathrm{Ker}(f + 2\mathrm{id})) = n$

II. PROBLÈME /210 (/216 pour les cubes)

Dans tout le problème, on considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 0$, $u_1 = 1$ et la relation :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$$

La partie II est indépendante de la partie I et la partie III est indépendante de la partie II.

Partie I. Analyse /54

1. a) Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante d'entiers naturels.

- **1 pt : initialisation**
- **2 pts : hérédité (1 pt pour la récurrence double, 1 pt pour le reste)**
- **1 pt :** $u_{n+2} \geqslant u_{n+1}$
- **1 pt :** $u_1 \geqslant u_0$

b) La suite est-elle convergente ?

- **1 pt : raisonnement par l'absurde**
- **1 pt :** (u_n) **est croissante majorée donc converge**
- **1 pt : passage à la limite pour montrer que** $\ell \geqslant 1$
- **1 pt : passage à la limite dans** $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$ **pour montrer que** $\ell = 0$
- **1 pt :** (u_n) **croissante non majorée donc diverge vers** $+\infty$

Dans toute la suite du problème, a **et** b ($a > b$) **désignent les deux solutions de l'équation du second degré suivante :** $x^2 - x - 1 = 0$.

2. a) Montrer que : $b = 1 - a = -\dfrac{1}{a}$. Établir l'encadrement suivant $1 < a < 2$.

- **1 pt : valeurs de** a **et** b ($a = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ **et** $b = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$)
- **1 pt : montrer que** $1 - a = b$
- **1 pt : montrer que** $-\dfrac{1}{a} = b$
- **1 pt : montrer que** $1 < a < 2$

b) Montrer que, pour tout n de $\mathbb{N}$, on a : $u_n = \dfrac{1}{\sqrt{5}}(a^n - b^n)$.

- **1 pt : le polynôme caractéristique de** (u_n) ($P(X) = X^2 - X - 1$) **admet** a **et** b **pour racines**
- **1 pt : forme générale de** (u_n) ($u_n = \lambda\, a^n + \mu\, b^n$)
- **1 pt : montrer que** $\lambda = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$ **et** $\mu = -\dfrac{1}{\sqrt{5}}$

c) En déduire un équivalent de u lorsque n tend vers $+\infty$.

- **1 pt : montrer que** $u_n = \dfrac{1}{\sqrt{5}}\, a^n \left(1 - \left(\dfrac{b}{a}\right)^n\right)$
- **2 pts : montrer que** $\left|\dfrac{b}{a}\right| < 1$ **(1 pt pour** $b = -\dfrac{1}{a}$**, 1 pt pour** $-1 < -\dfrac{1}{a^2} < -\dfrac{1}{4}$**)**
- $\left(\left(\dfrac{b}{a}\right)^n\right)$ **est une suite géométrique qui converge vers** 0
- **1 pt :** $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{\sqrt{5}}\, a^n$

3. On pose, pour tout n de $\mathbb{N}$: $\beta_n = u_{n+1} - a\,u_n$.
Exprimer, pour tout n de $\mathbb{N}$, β_n en fonction de n et b.

- 1 pt : utiliser $u_n = \dfrac{1}{\sqrt{5}}(a^n - b^n)$

- 1 pt : utiliser $a - b = \sqrt{5}$

4. On rappelle que pour tout réel x, la partie entière de x est l'entier noté $\lfloor x \rfloor$ qui vérifie :

$$\lfloor x \rfloor \leqslant x < \lfloor x \rfloor + 1$$

a) Établir, pour tout n de $\mathbb{N}$, l'égalité suivante : $\lfloor a\,u_{2n} \rfloor = u_{2n+1} - 1$.

- 1 pt : remarquer que $u_{2n+1} - 1 \in \mathbb{Z}$

- 1 pt : se ramener à montrer que $u_{2n+1} - 1 \leqslant a\,u_{2n} < u_{2n+1} - 1 + 1 = u_{2n+1}$

- 1 pt : montrer que $u_{2n+1} - a\,u_{2n} > 0$

- 1 pt : montrer que $u_{2n+1} - a\,u_{2n} - 1 = b^{2n} - 1$

- 1 pt : montrer que $0 < b^2 < 1$

b) Exprimer, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $\lfloor a\,u_{2n-1} \rfloor$, en fonction de u_{2n}.

- 1 pt : remarquer que $u_{2n} \in \mathbb{N}$

- 1 pt : montrer que $u_{2n} - a\,u_{2n-1} < 0$

- 1 pt : montrer que $u_{2n} - a\,u_{2n-1} + 1 = b^{2n-1} - 1$

- 1 pt : remarquer que $-1 < b^{2n-1} < 0$

- 1 pt : remarquer que, par propriété de la partie entière, $\lfloor a\,u_{2n-1} \rfloor = u_{2n}$

5. Soit y un réel fixé vérifiant $|y| < 1$ et k un entier fixé de $\mathbb{N}$.

a) Montrer que la série $\sum\limits_{n \geqslant 1} n^k\,y^n$ est absolument convergente.

- 1 pt : remarquer que $\sum n^k\,y^n$ **converge absolument ssi** $\sum n^k |y|^n$ **converge**

- 1 pt : penser à la négligeabilité par rapport à $\dfrac{1}{n^2}$

- 1 pt : $\dfrac{k\,\ln(n)}{\ln(|y|)\,n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ **par croissances comparées**

- 1 pt : en déduire que $k\,\ln(n) + n\,\ln(|y|) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty$

- 1 pt : en déduire que $n^k\,|y|^n = \underset{n\to+\infty}{o}\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$

- 3 pts : critère de négligeabilité des SATP (1 pt pour $n^k\,|y|^n \geqslant 0$ **et** $\dfrac{1}{n^2} \geqslant 0$**,
1 pt pour** $\sum \frac{1}{n^2}$ **est une série de Riemann convergente, 1 pt pour citer le critère)**

b) En déduire la convergence de la serie $\sum\limits_{n\geqslant 1} n^k \dfrac{u_n}{2^{n+1}}$.

- **1 pt : remarquer que** $n^k \dfrac{u_n}{2^{n+1}} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{2\sqrt{5}}\, n^k \left(\dfrac{a}{2}\right)^n$
- **1 pt : remarquer que** $\left|\dfrac{a}{2}\right| < 1$
- **1 pt : en déduire que** $\sum n^k \left(\dfrac{a}{2}\right)^n$ **converge absolument d'après *5.a)***
- **2 pts : critère d'équivalence des SATP (1 pt pour** $n^k \dfrac{u_n}{2^{n+1}} \geqslant 0$ **et** $\dfrac{1}{2\sqrt{5}}\, n^k \left(\dfrac{a}{2}\right)^n \geqslant 0$**, 1 pt pour citer le critère)**

c) En utilisant la définition de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, calculer $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{u_n}{2^{n+1}}$.

- **1 pt : remarquer que** $\sum \dfrac{u_n}{2^{n+1}}$ **converge d'après *5.b)***
- **1 pt : utiliser** $u_{n+2} = u_{n+1} - u_n$
- **1 pt : ré-indiciation**
- **2 pts : montrer que** $\ell = 4\ell - 2\ell - 1$ **où** $\ell = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{u_n}{2^{n+1}}$
- **1 pt : en déduire que** $\ell = 1$

Partie II. Algèbre et algorithmique /36 (/42 pour les cubes)

6. Soit A la matrice carrée d'ordre 4 définie par : $A = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

a) La matrice A est-elle inversible ?

- **1 pt**

b) Calculer A^2 et A^3. Vérifier que A^3 est une combinaison linéaire de A et A^2.

- **1 pt : montrer que** $A^2 = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$
- **1 pt : montrer que** $A^3 = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$
- **1 pt : remarquer que** $A^3 = A^2 + A$

c) <u>**Seulement pour les cubes :**</u> Déterminer les valeurs propres de A.

- **1 pt :** 0 **est valeur propre d'après *6.a)***
- **3 pts : calcul de rang**
- **1 pt :** $A - \lambda\, I_4$ **non inversible ssi** $\lambda = 0$ **ou** $\lambda^2 - \lambda - 1 = 0$
- **1 pt : en déduire que** $\mathrm{Sp}(A) = \{0, a, b\}$
- **(1 pt : si utilisation du polynôme annulateur** $X^3 - X^2 - X$ **pour montrer que** $\mathrm{Sp}(A) \subset \{0, a, b\}$**)**

d) Établir l'existence de deux suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ telles que, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on ait :

$$A^n = a_n\, A + b_n\, A^2$$

- **1 pt : initialisation**
- **3 pts : hérédité (1 pt pour utilisation de l'hypothèse de récurrence, 1 pt pour *6.b)*, 1 pt pour reste)**

e) Exprimer, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, a_{n+1} et b_{n+1} en fonction de a_n et b_n.
Montrer que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ vérifient une relation de récurrence linéaire d'ordre 2.

- **1 pt : rappeler qu'avec *6.d)*, $a_{n+1} = b_n$ et $b_{n+1} = a_n + b_n$**
- **1 pt : montrer que $a_{n+2} - a_{n+1} - a_n = 0$**
- **1 pt : montrer que $b_{n+2} - b_{n+1} - b_n = 0$**

7. On propose la fonction **Scilab** suivante :

```
function f = suite(n)
  u = 0
  v = 1
  for k = 1:(n-1)
    temp = ...........
    v = .............
    u = .............
  end
  f = ..............
endfunction
```

Compléter cette fonction aux quatre places signalées par des pointillés de façon que la valeur renvoyée soit u_n.

- **4 pts : compléter le programme (1 pt par ligne)**

8. Soit n un entier de $\mathbb{N}^*$. On dit que n admet une Z-décomposition s'il existe un entier r de $\mathbb{N}^*$ tel que l'on puisse écrire $n = u_{k_1} + u_{k_2} + \cdots + u_{k_r}$, où, pour tout i de $[\![1, r]\!]$, k_i est un entier supérieur ou égal à 2 et où, pour tout i de $[\![1, r-1]\!]$ (avec $r \geqslant 2$), on a : $k_{i+1} - k_i \geqslant 2$.

a) Montrer que les entiers 37 et 272 admettent une Z-décomposition.

- **1 pt :** $37 = u_4 + u_9$
- **1 pt :** $272 = u_5 + u_9 + u_13$

b) Soit n un entier admettant une Z-décomposition de la forme $n = u_{k_1} + u_{k_2} + \cdots + u_{k_r}$. Montrer, par récurrence sur r, que l'on a : $n < u_{k_r+1}$. En déduire l'unicité de r.

- **2 pts : initialisation (1 pt pour $n = u_{k_1}$, 1 pt pour $(u_n)_{n\geqslant 2}$ est strictement croissante)**
- **4 pts : hérédité (1 pt pour utilisation de l'hypothèse de récurrence sur $n - u_{k_r}$, 1 pt pour $k_{r+1} - 1 \geqslant k_r + 1$, 1 pt pour (u_n) croissante, 1 pt pour $u_{k+2} = u_{k+1} + u_k$)**
- **1 pt : r est unique car u_{k_r} est défini de manière unique (le plus grand terme de (u_n) inférieur ou égal à n)**

c) Montrer que, pour tout entier p supérieur ou égal à 2, tout entier n qui vérifie $1 \leqslant n \leqslant u_p$ admet une unique Z-décomposition (on pourra faire un raisonnement par récurrence sur p).

- **1 pt : initialisation**
- **4 pts : hérédité (1 pt pour récurrence forte, 1 pt pour existence et unicité de u_{k_r}, 1 pt pour cas $u_{p+1} < u_{k_r+1}$ (alors $n = u_{k_r} = u_{p+1}$), 1 pt pour utilisation hypothèse de récurrence si $u_{p+1} \geqslant u_{k_r+1}$)**

9. On suppose donnés un entier $p \geqslant 1$ et un vecteur u de $\mathbb{R}^{p-1}$ contenant les termes u_2, u_3, $\cdots$, u_p. Compléter le programme suivant pour qu'il renvoie la Z-décomposition d'un entier n tel que $1 \leqslant$ n $\leqslant u_p$. Expliquer et justifier l'algorithme utilisé.

```
n = input('Entrez un entier n inférieur à u_p')
Decomp = []
i = p - 1
while i <> 1
  if u(i) > n then
    i = ..............
  else
    Decomp = [u(i), Decomp]
    n = ..............
    i = ..............
  end
end
if n == 1 then
  Decomp = [1, Decomp]
end
```

- **3 pts : compléter le programme (1 pt par ligne)**
- **4 pts : explications (1 pt pour démarrer par comparer n à u_{p-1}, 1 pt pour trouver u_{k_r}, 1 pt pour itérer le processus sur $n - u_{k_r}$, $n - u_{k_r} - u_{k_{r-1}}$, etc, 1 pt pour l'arrêt de l'algorithme)**

Partie III. Probabilités /120

On effectue dans une urne qui contient des boules numérotées 0 ou 1 une suite illimitée de tirages avec remise d'une boule. À chaque tirage, la probabilité de tirer une boule numérotée 1 est p $(0 < p < 1)$ et la probabilité de tirer une boule numérotée 0 est q, avec $q = 1 - p$, et on suppose que les résultats des différents tirages sont indépendants.
On suppose que cette expérience est modélisée par un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$. On s'intéresse au nombre de tirages nécessaires pour obtenir deux boules numérotées 1 de suite, c'est-à-dire lors de deux tirages consécutifs. On définit, pour tout i de $\mathbb{N}^*$, les événements S_i : « le $i^{\text{ème}}$ tirage donne une boule numérotée 1 », et $B_i = S_i \cap S_{i+1}$.
Si au moins un des événements B_i se réalise au cours de l'expérience, on note Y la valeur de l'entier j correspondant au premier événement B_j réalisé. Sinon, c'est-à-dire si aucun des événements B_i ne se réalise, on attribue à Y la valeur 0. On admet que Y est une variable aléatoire définie sur $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$.
Par exemple, si le résultat de l'expérience est : 0, 1, 0, 0, 0, 1, 1, 0, 1, 1, 1, 0.
Alors Y prend la valeur 6.

10. a) Calculer, pour tout i de $\mathbb{N}^*$ la probabilité $\mathbb{P}(B_i)$.

- **1 pt : indépendance des tirages**
- **1 pt : calcul** $\mathbb{P}(B_i) = p^2$

b) Déterminer $Y(\Omega)$. Calculer $\mathbb{P}([Y=1])$, $\mathbb{P}([Y=2])$ et $\mathbb{P}([Y=3])$.

- **2 pts :** $Y(\Omega) = \mathbb{N}$ **(dont 1 pt pour expliquer** $0 \in Y(\Omega)$**)**
- **1 pt :** $\mathbb{P}([Y=1]) = p^2$
- **2 pts :** $\mathbb{P}([Y=2]) = q\,p^2$ **(1 pt pour** $[Y=2] = \overline{S_1} \cap S_2 \cap S_3$**, 1 pt pour indépendance des tirages)**
- **3 pts :** $\mathbb{P}([Y=3]) = q^2\,p^2 + q\,p^3$ **(1 pt pour** $[Y=3] = (\overline{S_1} \cap \overline{S_2} \cap S_3 \cap S_4) \cup (S_1 \cap \overline{S_2} \cap S_3 \cap S_4)$**, 1 pt pour incompatibilité, 1 pt pour indépendance des tirages)**

11. Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on note C_n, l'événement « lors des n premiers tirages, il n'apparaît jamais deux fois de suite une boule numérotée 1 ». On pose : $C_0 = \Omega$.

a) Calculer $\mathbb{P}(C_0)$, $\mathbb{P}(C_1)$ et $\mathbb{P}(C_2)$.

- **1 pt :** $\mathbb{P}(C_0) = 1$
- **1 pt :** $\mathbb{P}(C_1) = 1$
- **1 pt :** $\mathbb{P}(C_2) = 1 - p^2$

b) Établir, pour tout n de $\mathbb{N}$, la relation : $\mathbb{P}([Y = n+2]) = p^2 q\,\mathbb{P}(C_n)$.

- **2 pts :** $[Y = n+2] = B_{n+2} \cap \overline{S_{n+1}} \cap C_n$ **(1 pt pour juste l'égalité, 1 pt pour explication)**
- **1 pt : indépendance des tirages**

12. a) En considérant les résultats possibles des deux premiers tirages, montrer, pour tout entier n supérieur ou égal à 2, l'égalité : $\mathbb{P}(C_n) = q\,\mathbb{P}(C_{n-1}) + pq\,\mathbb{P}(C_{n-2})$.

- **1 pt : FPT sur le SCE** $(S_1, \overline{S_1})$
- **1 pt :** $\mathbb{P}(\overline{S_1}) \neq 0$
- **1 pt :** $\mathbb{P}((\overline{S_1} \cap C_n) = q\,\mathbb{P}_{\overline{S_1}}(C_n)$
- **1 pt : expliquer pourquoi** $\mathbb{P}_{\overline{S_1}}(C_n) = \mathbb{P}(C_{n-1})$
- **1 pt : FPT sur le SCE** $(S_2, \overline{S_2})$
- **1 pt :** $S_1 \cap S_2 \cap C_n = \varnothing$
- **1 pt :** $\mathbb{P}(S_1 \cap \overline{S_2}) \neq 0$
- **1 pt : expliquer pourquoi** $\mathbb{P}_{S_1 \cap \overline{S_2}}(C_n) = \mathbb{P}(C_{n-2})$

b) Déterminer, pour tout n de $\mathbb{N}^*$ une relation entre $\mathbb{P}([Y=n+2])$, $\mathbb{P}([Y=n+1])$ et $\mathbb{P}([Y=n])$.

- **1 pt : relation vraie pour** $n = 1$
- **1 pt :** $\mathbb{P}([Y=n+2]) = p^2\,q\,\mathbb{P}(C_n)$ **(*11.b)*)**
- **1 pt :** $\mathbb{P}(C_n) = q\,\mathbb{P}(C_{n-1}) + p\,q\,\mathbb{P}(C_{n-2})$ **(*12.a)*)**
- **1 pt : reste du calcul pour montrer** $\mathbb{P}([Y=n+2]) = q\,\mathbb{P}([Y=n+1]) + p\,q\,\mathbb{P}([Y=n])$

13. On suppose dans cette question que $p = q = \frac{1}{2}$.

a) Montrer que, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on a : $\mathbb{P}([Y = n]) = \dfrac{u_n}{2^{n+1}}$ où la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a été définie dans le préambule du problème.

- 1 pt : $v_1 = u_1$ **(où** $v_n = 2^{n+1}\mathbb{P}([Y = n])$**)**

- 1 pt : $v_2 = u_2$

- 2 pts : $v_{n+2} = v_{n+1} + v_n$

b) Que vaut $\mathbb{P}([Y = 0])$?

- 1 pt : $([Y = n])_{n\in\mathbb{N}^*}$ **est un SCE**

- 1 pt : $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{u_n}{2^{n+1}} = 1$ **(*5.c*)**

c) On note $\mathbb{E}(Y)$ l'espérance de Y. Montrer que $\mathbb{E}(Y) = 5$.

- 1 pt : Y **admet une espérance ssi** $\sum n\,\mathbb{P}([Y = n])$ **est absolument convergente**

- 1 pt : $\sum\limits_{k=1}^{N} k\,\mathbb{P}([Y = k]) = \dfrac{a}{4\sqrt{5}} \sum\limits_{k=1}^{N} k \left(\dfrac{a}{2}\right)^{k-1} - \dfrac{b}{4\sqrt{5}} \sum\limits_{k=1}^{N} k \left(\dfrac{b}{2}\right)^{k-1}$

- 1 pt : reconnaître des séries géométriques dérivées convergentes

- 1 pt : Y **admet une espérance**

- 2 pts : $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} k \left(\dfrac{a}{2}\right)^{k-1} = 14 + 6\sqrt{5}$

- 1 pt : $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} k \left(\dfrac{b}{2}\right)^{k-1} = 14 - 6\sqrt{5}$

- 1 pt : $\mathbb{E}(Y) = 5$

d) Calculer la variance $\mathbb{V}(Y)$ de Y.

- 1 pt : Y **admet une variance ssi** $\sum n^2\,\mathbb{P}([Y = n])$ **est absolument convergente**

- 2 pts : calcul $\sum\limits_{k=1}^{N} k^2\,\mathbb{P}([Y = k])$

- 1 pt : reconnaître des séries géométriques dérivées et dérivées seconde convergentes

- 1 pt : Y **admet une variance**

- 1 pt : reconnaître $\mathbb{E}(Y)$

- 2 pts : $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} k(k-1) \left(\dfrac{a}{2}\right)^{k-1} = 2^4(9 + 4\sqrt{5})$

- 1 pt : $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} k(k-1) \left(\dfrac{b}{2}\right)^{k-1} = 2^4(9 - 4\sqrt{5})$

- 2 pts : $\mathbb{E}(Y^2) = 47$

- 1 pt : formule de Koenig-Huyghens

- 1 pt : $\mathbb{V}(Y) = 22$

14. On revient au cas général : $0 < p < 1$ et $q = 1 - p$.

a) Montrer que l'équation du second degré $x^2 - qx - pq = 0$ admet deux racines distinctes. On les note r et s, avec $r > s$.

- 1 pt

b) Établir les inégalités suivantes : $-1 < s < 0 < r < 1$ et $r > |s|$.

- 1 pt : théorème de la bijection sur $]-\infty, \frac{q}{2}[$

- 1 pt : théorème de la bijection sur $[\frac{q}{2}, +\infty[$

- 1 pt : $f(-1) > 0$ **où** $f(x) = x^2 - q\,x - pq$

- 1 pt : $f(0) < 0$

- 1 pt : $f(s) = 0$

- 1 pt : par stricte décroissance de f**,** $-1 < s < 0$

- 1 pt : $f(1) > 0$

- 1 pt : par stricte croissance de f**,** $0 < r < 1$

- 1 pt : $r > |s|$

c) On pose $\Delta = q^2 + 4pq$. Montrer que, pour tout n de $\mathbb{N}^*$ on a : $\mathbb{P}([Y = n]) = \dfrac{p^2}{\sqrt{\Delta}}(r^n - s^n)$.

- 1 pt : $w_n = \mathbb{P}([Y = n])$ **vérifie** $w_{n+2} - q\,w_{n+1} - pq\,w_n = 0$

- 1 pt : forme générale de (w_n) **(**$w_n = \lambda \times r^n + \mu \times s^n$**)**

- 1 pt : $r - s = \sqrt{\Delta}$

- 2 pts : $\lambda = \dfrac{p^2}{\sqrt{\Delta}}$ **et** $\mu = -\dfrac{p^2}{\sqrt{\Delta}}$

d) Calculer $\mathbb{P}([Y = 0])$.

- 1 pt : $([Y = n])_{n \in \mathbb{N}^*}$ **est un SCE**

- 1 pt : on reconnaît les séries géométriques de raison r **et** s **avec** $|r| < 1$ **et** $|s| < 1$

- 2 pts : $(1 - r)(1 - s) = p^2$

- 2 pts : reste du calcul pour montrer que $\mathbb{P}([Y = 0]) = 0$

e) Montrer que Y admet des moments de tous ordres et calculer l'espérance de Y.

- 1 pt : convergence absolue

- 1 pt : $|r^n - s^n| \leqslant r^n + s^n$

- 1 pt : les séries $\sum\limits_{n \geqslant 1} n^k\, r^n$ **et** $\sum\limits_{n \geqslant 1} n^k\, s^n$ **convergent (*5.a)*)**

- 1 pt : $\left(\sum\limits_{n=1}^{N} |n^k \mathbb{P}([Y = n])|\right)_{N \geqslant 1}$ **est croissante**

- 1 pt : elle est majorée par $\dfrac{p^2}{\sqrt{\Delta}}\left(\sum\limits_{n=1}^{+\infty} n^k\, r^n + \sum\limits_{n=1}^{+\infty} n^k\, s^n\right)$

- 1 pt : vrai pour tout $k \geqslant 1$

- 1 pt : simplification de $\sum\limits_{k=1}^{N} k\ \mathbb{P}([Y = k])$

- 1 pt : reconnaître les séries géométriques dérivées de raison r **et** s **qui convergent**

- 2 pts : calcul de $\dfrac{r\,p^2}{\sqrt{\Delta}} \sum\limits_{k=1}^{+\infty} k r^{k-1}$

- **1 pt : calcul de** $\dfrac{r\,p^2}{\sqrt{\Delta}} \sum\limits_{k=1}^{+\infty} k s^{k-1}$
- **2 pts :** $\mathbb{E}(Y) = \dfrac{1+pq}{p^2}$

15. ***a)*** Montrer, pour tout réel x vérifiant $|x| < \dfrac{1}{r}$, la convergence de la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \mathbb{P}\left([Y=n]\right) x^n$.

On pose alors : $g(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}\left([Y=n]\right) x^n$.

- **1 pt :** $|\mathbb{P}([Y=n])\,x^n| \leqslant \dfrac{p^2}{\sqrt{\Delta}}(|rx|^n + |sx|^n)$
- **1 pt :** $0 \leqslant |\mathbb{P}([Y=n])$
- **2 pts :** $\sum |rx|^n$ **et** $\sum |sx|^n$ **convergent (1 pt pour** $|rx|<1$**, 1 pt pour** $|sx|<1$**)**
- **1 pt : citer le critère de comparaison des SATP**
- **1 pt : la convergence absolue implique la convergence**

b) Établir, pour tout réel x vérifiant $|x| < \dfrac{1}{r}$, la formule suivante : $g(x) = \dfrac{p^2 x}{1-qx-pqx^2}$.

- **2 pts :** $g(x) = \dfrac{p^2}{\sqrt{\Delta}} \dfrac{(r-s)\,x}{1-(r+s)\,x + rs\,x}$
- **1 pt :** $r+s=q$
- **1 pt :** $rs = -pq$
- **1 pt :** $g(x) = \dfrac{p^2\,x}{1-q\,x-pq\,x^2}$

16. On suppose dans cette question que $p = \frac{2}{3}$.

a) Étudier les variations de la fonction g sur l'intervalle $I = \left]-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right[$.

- **1 pt : calcul de** g **(**$g(x) = \dfrac{4\,x}{9-3\,x-2\,x^2}$**)**
- **1 pt :** $9-3x-2x^2$ **s'annule en** -3 **et** $\dfrac{3}{2}$
- **1 pt : dérivabilité de** g
- **1 pt :** $g'(x) = \dfrac{36+8x^2}{(9-3x-2x^2)^2}$
- **1 pt :** $g'(x) > 0$ **et** g **strictement croissante**

b) Montrer l'existence d'un unique réel α de $\left]-\frac{1}{2}, 0\right[$ tel que g soit concave sur l'intervalle $\left]-\frac{3}{2}, \alpha\right[$ et convexe sur l'intervalle $\left]\alpha, \frac{3}{2}\right[$.

- **1 pt :** g **est de classe** $\mathcal{C}^2$ **sur** I
- **1 pt :** $g''(x) = 8\dfrac{4x^3+54x+27}{(9-3x-2x^2)^3}$
- **1 pt :** $9-3x-2x^2 > 0$ **sur** I
- **1 pt :** $h : x \mapsto 4x^3+54x+27$ **et dérivable et** $h'(x) = 12x^2+54$
- **1 pt :** $h'(x) > 0$ **et** h **strictement croissante**
- **3 pts : théorème de la bijection (1 pt pour hypothèses, 1 pt pour** $h(I) = \left]-\frac{135}{2}, \frac{243}{2}\right[$**, 1 pt pour** $0 \in h(I)$**)**
- **1 pt : lien avec la concavité de** g

- **1 pt :** $h(-\frac{1}{2}) < 0$
- **1 pt :** $h(0) > 0$
- **1 pt : par stricte croissance de** h^{-1}**,** $\alpha \in \left]-\frac{1}{2}, 0\right[$

c) Tracer l'allure de la courbe représentative de g sur I dans le plan rapporté à un repère orthonormé.

- **3 pts : 1 pt pour l'asymptote en** $\dfrac{3}{2}$**, 1 pt pour le changement de concavité, 1 pt pour la cohérence globale avec le tableau de variations**