DS4 (version B)

I. EXERCICE (HEC 2005)

Dans cet exercice, n est un entier supérieur ou égal à 2.
On note E l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ et Id l'application identité de E.
L'objet de l'exercice est l'étude des endomorphismes f de E vérifiant l'équation $(*)$: $f \circ f = 4\,\mathrm{Id}$.

A. Étude du cas n = 2

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ dont la matrice dans la base canonique est : $A = \sqrt{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.
Soit u le vecteur de $\mathbb{R}^2$ défini par $u = \left(\sqrt{2}-2,\ \sqrt{2}\right)$.

1. Montrer que f vérifie l'équation $(*)$, puis préciser le noyau et l'image de f.

Démonstration.

- Tout d'abord :

$$f \circ f = \mathrm{Id} \ \Leftrightarrow \ A \times A = I_2$$

Or :

$$\begin{aligned} A \times A &= \sqrt{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \sqrt{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \\ &= 2\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = 4\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 4\ I_2 \end{aligned}$$

$\boxed{\text{La deuxième proposition étant vérifiée, il en est de même de la première : } f \circ f = \mathrm{Id}.}$

- Remarquons alors que :

$$\det(A) = \sqrt{2} \times (-\sqrt{2}) - \sqrt{2} \times \sqrt{2} = -2 - 2 = -4 \neq 0$$

Ainsi, f est bijective car sa matrice représentative dans la base $\mathscr{B}$ est inversible.
On en déduit que f est injective et que $\mathrm{Ker}(f) = \{(0,0)\}$.

$$\boxed{\mathrm{Ker}(f) = \{(0,0)\}}$$

- D'après le théorème du rang :

$$\underset{\substack{\shortparallel \\ 2}}{\dim(\mathbb{R}^2)} = \underset{\substack{\shortparallel \\ 0}}{\dim(\mathrm{Ker}(f))} + \dim(\mathrm{Im}(f))$$

Ainsi : $\dim(\mathrm{Im}(f)) = 2$.

$\boxed{\text{Comme } \mathrm{Im}(f) \subset \mathbb{R}^2 \text{ et } \dim(\mathrm{Im}(f)) = 2 = \dim(\mathbb{R}^2)\text{, on en conclut que : } \mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}^2}$

Remarque
Dans la démonstration précédente, on fait preuve de recul pour ne pas avoir à déterminer, par calcul, $\mathrm{Ker}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$. Procédant ainsi, on gagne du temps et donc des points. Cependant, il était possible (mais déconseillé !) de procéder à une démonstration calculatoire.
Exposons cette solution.

- Soit $w = (x, y) \in \mathbb{R}^2$. On note $\mathscr{B} = (e_1, e_2)$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$ et $W = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(w)$.

$$\begin{array}{rcl} w \in \mathrm{Ker}(f) & \Longleftrightarrow & f(w) = 0 \\ & \Longleftrightarrow & A\ W = 0 \\ & \Longleftrightarrow & \sqrt{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ & \Longleftrightarrow & \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ & \Longleftrightarrow & \left\{ \begin{array}{rcrcl} x & + & y & = & 0 \\ x & - & y & = & 0 \end{array} \right. \\ & \overset{L_2 \leftarrow L_2 - L_1}{\Longleftrightarrow} & \left\{ \begin{array}{rcrcl} x & + & y & = & 0 \\ & - & 2y & = & 0 \end{array} \right. \\ & \Longleftrightarrow & \left\{ \ x = y = 0 \right. \\ & & \textit{(par remontées successives)} \end{array}$$

$$\boxed{\mathrm{Ker}(f) = \{(x, y) \mid x = 0 \ \texttt{ET} \ y = 0\} = \{(0, 0)\}}$$

- Déterminons maintenant $\mathrm{Im}(f)$. Notons $E_1 = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(e_1)$ et $E_2 = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(e_2)$.

$$\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}\left(f(e_1), f(e_2)\right)$$

  Or :
  × $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f(e_1)) = A\ E_1 = \sqrt{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}$.
  Ainsi : $f(e_1) = \sqrt{2}\ e_1 + \sqrt{2}\ e_2 = (\sqrt{2}, \sqrt{2})$.
  × $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f(e_2)) = A\ E_2 = \sqrt{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ -\sqrt{2} \end{pmatrix}$
  Ainsi : $f(e_2) = \sqrt{2}\ e_1 - \sqrt{2}\ e_2 = (\sqrt{2}, -\sqrt{2})$.

$$\boxed{\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}\left(f(e_1), f(e_2)\right) = \mathrm{Vect}\left((\sqrt{2}, \sqrt{2}), (\sqrt{2}, -\sqrt{2})\right) = \mathrm{Vect}\left((1, 1), (1, -1)\right)}$$

Ici aussi, on pouvait procéder plus rapidement.

- Par ailleurs les égalités :
  × $f(e_1) = \sqrt{2}\ e_1 + \sqrt{2}\ e_2 = (\sqrt{2}, \sqrt{2})$
  × $f(e_2) = \sqrt{2}\ e_1 + \sqrt{2}\ e_2 = (\sqrt{2}, \sqrt{2})$

  peuvent être obtenues par simple lecture de la matrice A.
  En effet, par définition, cette matrice est la concaténation de $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f(e_1))$ et $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f(e_2))$. □

2. On note $F = \mathrm{Ker}\,(f - 2\,\mathrm{Id})$ et $G = \mathrm{Im}\,(f - 2\,\mathrm{Id})$.

a) Montrer que G est engendré par le vecteur u.
En déduire la dimension de F et donner une base de F. On notera v le vecteur de cette base.

Démonstration.

- Tout d'abord :
$$A - 2\ I = \begin{pmatrix} \sqrt{2} - 2 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & -\sqrt{2} - 2 \end{pmatrix}$$
Ainsi :
  × $(f - 2\mathrm{Id})(e_1) = (\sqrt{2} - 2)\ e_1 + \sqrt{2}\ e_2 = (\sqrt{2} - 2, \sqrt{2}) = u$
  × $(f - 2\mathrm{Id})(e_2) = \sqrt{2}\ e_1 - (\sqrt{2} + 2)\ e_2 = (\sqrt{2}, -(\sqrt{2} + 2)) = z$
- Ces deux vecteurs sont colinéaires.
Plus précisément : $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2} - 2}\ u = \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2} - 2}\ (\sqrt{2} - 2, \sqrt{2}) = (\sqrt{2}, -(\sqrt{2} + 2)) = z$.
En effet :
$$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2} - 2}\ (\sqrt{2} - 2) = \sqrt{2}$$
$$\text{et}\quad \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2} - 2}\ \sqrt{2} = \frac{2}{\sqrt{2} - 2} = \frac{2\ (\sqrt{2} + 2)}{(\sqrt{2} - 2)\ (\sqrt{2} + 2)} = \frac{2\ (\sqrt{2} + 2)}{2 - 4} = -(\sqrt{2} + 2)$$
$$\boxed{\mathrm{Im}(f - 2\mathrm{Id}) = \mathrm{Vect}\,(f(e_1), f(e_2)) = \mathrm{Vect}\left(u, \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2} - 2}\ u\right) = \mathrm{Vect}\,(u)}$$
- La famille (u) est :
  × génératrice de $\mathrm{Im}(f - 2\mathrm{Id})$,
  × libre car constituée d'un vecteur non nul.
C'est donc une base de $\mathrm{Im}(f - 2\mathrm{Id})$.
$$\boxed{\dim(\mathrm{Im}(f - 2\mathrm{Id})) = 1}$$
- Par le théorème du rang :
$$\begin{array}{ccccc} \dim(\mathbb{R}^2) & = & \dim(\mathrm{Ker}(f - 2\mathrm{Id})) & + & \dim(\mathrm{Im}(f - 2\mathrm{Id})) \\ \shortparallel & & & & \shortparallel \\ 2 & & & & 1 \end{array}$$
$$\boxed{\dim(\mathrm{Ker}(f - 2\mathrm{Id})) = 1}$$

- Soit $w = (x, y) \in \mathbb{R}^2$. On note $W = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(w)$.

$$\begin{array}{cl} & w \in \mathrm{Ker}(f - 2\mathrm{Id}) \\ \Longleftrightarrow & (f - 2\mathrm{Id})(w) = 0 \\ \Longleftrightarrow & (A - 2I)\ W = 0 \\ \Longleftrightarrow & \begin{pmatrix} \sqrt{2} - 2 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & -\sqrt{2} - 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \Longleftrightarrow & \left\{ \begin{array}{rcrcl} (\sqrt{2} - 2)\ x & + & \sqrt{2}\ y & = & 0 \\ \sqrt{2}\ x & - & (\sqrt{2} + 2)\ y & = & 0 \end{array} \right. \\ \overset{L_1 \leftarrow L_1 - L_2}{\Longleftrightarrow} & \left\{ \begin{array}{rcrcl} -2\ x & + & (2\ \sqrt{2} + 2)\ y & = & 0 \\ \sqrt{2}\ x & - & (\sqrt{2} + 2)\ y & = & 0 \end{array} \right. \\ & \textit{(pour se débarrasser d'un } \sqrt{2}\textit{)} \\ \overset{L_2 \leftarrow \sqrt{2}\ L_2 + L_1}{\Longleftrightarrow} & \left\{ \begin{array}{rcrcl} -2\ x & + & (2\ \sqrt{2} + 2)\ y & = & 0 \\ & & 0 & = & 0 \end{array} \right. \\ \Longleftrightarrow & \left\{ \ x = (\sqrt{2} + 1)\ y \right. \end{array}$$

On en déduit que :

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{Ker}(f - 2\mathrm{Id}) & = & \{(x, y) \mid x = (\sqrt{2} + 1)\ y\} \\ & = & \{((\sqrt{2} + 1)\ y, y) \mid y \in \mathbb{R}\} \\ & = & \{y \cdot (\sqrt{2} + 1, 1) \mid y \in \mathbb{R}\} \end{array}$$

$$\boxed{\mathrm{Ker}(f - 2\mathrm{Id}) = \mathrm{Vect}\left((\sqrt{2} + 1, 1)\right) = \mathrm{Vect}\left((\sqrt{2} + 2, \sqrt{2})\right)}$$

Dans la suite, on note $v = (\sqrt{2} + 2, \sqrt{2})$. □

b) Montrer que $G = \mathrm{Ker}(f + 2\,\mathrm{Id})$.

Démonstration.

- Soit $w = (x, y) \in \mathbb{R}^2$. On note $W = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(w)$.

$$\begin{array}{rcl} w \in \mathrm{Ker}(f + 2\mathrm{Id}) & \Longleftrightarrow & (f + 2\mathrm{Id})(w) = 0 \\ & \Longleftrightarrow & (A + 2I)\ W = 0 \\ & \Longleftrightarrow & \begin{pmatrix} \sqrt{2} + 2 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & -\sqrt{2} + 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ & \Longleftrightarrow & \left\{ \begin{array}{rcrcl} (\sqrt{2} + 2)\ x & + & \sqrt{2}\ y & = & 0 \\ \sqrt{2}\ x & + & (-\sqrt{2} + 2)\ y & = & 0 \end{array} \right. \\ & \overset{L_1 \leftarrow L_1 - L_2}{\Longleftrightarrow} & \left\{ \begin{array}{rcrcl} 2\ x & + & (2\ \sqrt{2} - 2)\ y & = & 0 \\ \sqrt{2}\ x & + & (-\sqrt{2} + 2)\ y & = & 0 \end{array} \right. \\ & & \textit{(pour se débarrasser d'un } \sqrt{2}\textit{)} \\ & \overset{L_2 \leftarrow \sqrt{2}\ L_2 - L_1}{\Longleftrightarrow} & \left\{ \begin{array}{rcrcl} 2\ x & + & (2\ \sqrt{2} - 2)\ y & = & 0 \\ & & 0 & = & 0 \end{array} \right. \\ & \Longleftrightarrow & \left\{ \ x = (1 - \sqrt{2})\ y \right. \end{array}$$

On en déduit que :

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{Ker}(f+2\mathrm{Id}) & = & \{(x,y) \mid x = (1-\sqrt{2})\ y\} \\ & = & \{((1-\sqrt{2})\ y, y) \mid y \in \mathbb{R}\} \\ & = & \{y \cdot (1-\sqrt{2}, 1) \mid y \in \mathbb{R}\} \end{array}$$

$$\boxed{\mathrm{Ker}(f+2\mathrm{Id}) = \mathrm{Vect}\left((1-\sqrt{2},1)\right) = \mathrm{Vect}\left((\sqrt{2}-2, \sqrt{2})\right) = \mathrm{Vect}\,(u)}$$

Remarque

On pouvait raisonner autrement.

- Dans un premier temps, on démontre que $G = \mathrm{Vect}\,(u) \subset \mathrm{Ker}(f + 2\ \mathrm{Id})$.
Pour ce faire, il suffit de démontrer que : $u \in \mathrm{Ker}(f+2\ \mathrm{Id})(u)$. Or :

$$\begin{array}{rcl} u \in \mathrm{Ker}(f+2\ \mathrm{Id})(u) & \Leftrightarrow & (f+2\ \mathrm{Id})(u) = 0 \\ & \Leftrightarrow & (A+2\ I)\ U = 0 \\ & \Leftrightarrow & \begin{pmatrix} \sqrt{2}+2 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & -\sqrt{2}+2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{2}-2 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

Cette dernière égalité est bien vérifiée car :

× $(\sqrt{2}+2)(\sqrt{2}-2) + \sqrt{2}\ \sqrt{2} = 2-4+2 = 0$

× $\sqrt{2}\ (\sqrt{2}-2) + (-\sqrt{2}+2)\ \sqrt{2} = 2 - 2\ \sqrt{2} - 2 + 2\ \sqrt{2} = 0$

On en déduit que : $u \in \mathrm{Ker}(f+2\mathrm{Id})$ et donc que : $G = \mathrm{Vect}\,(u) \subset \mathrm{Ker}(f+2\mathrm{Id})$.

- Pour conclure sur l'égalité de ces deux espaces vectoriels, il suffit de démontrer qu'ils sont de même dimension.

  Supposons par l'absurde que $\dim(\mathrm{Ker}(f+2\mathrm{Id})) = 2$.
Comme $\mathrm{Ker}(f+2\mathrm{Id}) \subset \mathbb{R}^2$, on en conclut que : $\mathrm{Ker}(f+2\mathrm{Id}) = \mathbb{R}^2$.
Ainsi : $\forall w \in \mathbb{R}^2,\ (f+2\mathrm{Id})(w) = 0$. Autrement dit : $f + 2\ \mathrm{Id} = 0$ ou encore $f = -2\ \mathrm{Id}$.
Ceci est impossible car $A \neq -2\ I$.
Ainsi, $\dim(\mathrm{Ker}(f+2\mathrm{Id})) = 1$.
(on note que $\dim(\mathrm{Ker}(f+2\mathrm{Id})) = 0$ est exclu puisque $\mathrm{Ker}(f+2\mathrm{Id}) \supset \mathrm{Vect}\,(u)$).

- On retiendra en particulier (c'est une propriété importante !) que si $g \in \mathscr{L}(E)$ où E est un espace vectoriel de dimension n :

$$\begin{array}{rcl} \dim(\mathrm{Ker}(g)) = n & \Leftrightarrow & \mathrm{Ker}(g) = E \\ & \Leftrightarrow & \forall x \in E,\ g(x) = 0 \\ & \Leftrightarrow & g = 0_{\mathscr{L}(E)} \end{array}$$

□

3. a) Justifier que (u,v) est une base de $\mathbb{R}^2$.

Démonstration.

- On a vu dans la question précédente que $\mathrm{Ker}(f + 2\ \mathrm{Id}) = \mathrm{Vect}\,(u)$ avec $u \neq 0$.
On en déduit que u est un vecteur propre de f associé à la valeur propre -2.
- De même, d'après la question ***2.a)***, v est un vecteur propre associé à la valeur propre 2.
- Les vecteurs u et v sont des vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes. On en déduit que la famille $\mathcal{F} = (u,v)$ est libre.
Or : $\mathrm{Card}(\mathcal{F}) = 2 = \dim(\mathbb{R}^2)$.

$$\boxed{\text{Ainsi, } (u,v) \text{ est une base de } \mathbb{R}^2.}$$

Remarque

- Il faut savoir lire les questions de l'énoncé. Il est ici demander de « Justifier » que (u, v) est une base de $\mathbb{R}^2$. On introduit donc une nuance par rapport à question classique qui commencerait par « Démontrer ». Lorsque le terme « justifier » apparaît dans une question c'est :
  - × soit que l'on s'attend à une justification en français d'une propriété mathématique (*Justifier que les v.a.r. sont indépendantes*),
  - × soit que l'on s'attend à ce que le candidat cite un théorème permettant de ne pas avoir à mener une démonstration plus lourde. C'est le cas ici.
- Évidemment, il était aussi possible de démontrer que la famille (u, v) était libre en repassant à la définition. Mais, comme expliqué dans cette remarque, ce n'est pas l'esprit de l'énoncé. □

b) Montrer que f est diagonalisable ; préciser les valeurs propres de f et donner la matrice de passage de la base canonique à une base de vecteurs propres.

Démonstration.

- D'après ce qui précède, l'endomorphisme f possède deux valeurs propres distinctes (-2 et 2). Or $\dim(\mathbb{R}^2) = 2$. On en déduit que f est diagonalisable.
- Par ailleurs, la famille $\mathscr{B}' = (u, v)$ est une base de $\mathbb{R}^2$ constituée de vecteurs propres. La matrice de passage de $\mathscr{B}$ à $\mathscr{B}'$ est alors :

$$\boxed{P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'} = \begin{pmatrix} \sqrt{2}-2 & \sqrt{2}+2 \\ \sqrt{2} & \sqrt{2} \end{pmatrix}}$$

  car :
  - × $u = (\sqrt{2}-2, \sqrt{2}) = (\sqrt{2}-2)\ e_1 + \sqrt{2}\ e_2$,
  - × $v = (\sqrt{2}+2, \sqrt{2}) = (\sqrt{2}+2)\ e_1 + \sqrt{2}\ e_2$.

Remarque
Dans la base $\mathscr{B}' = (u, v)$, la matrice représentative de f est :

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(f) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

ce qui n'est qu'une réécriture différente du fait que : $f(u) = -2\ u$ et $f(v) = 2\ v$.

□

B. Étude du cas général

On se place désormais dans le cas où n est supérieur ou égal à 2, et on considère un endomorphisme f de E vérifiant l'équation $(*)$.

4. a) Justifier que f est un automorphisme de E et exprimer l'automorphisme réciproque f^{-1} en fonction de f.

Démonstration.
L'endomorphisme f vérifiant $(*)$, on en déduit que :

$$f \circ \left(\frac{1}{4}\ f\right) = \left(\frac{1}{4}\ f\right) \circ f = \mathrm{Id}$$

$$\boxed{\text{Ainsi, } f \text{ est une application bijective et } f^{-1} = \frac{1}{4}\ f.}$$

□

b) Déterminer les valeurs propres possibles de f.

Démonstration.

- D'après la relation $(*)$: $f^2 - 4\ \mathrm{Id} = 0$.
  On en déduit que $P(X) = X^2 - 4 = (X-2)(X+2)$ est un polynôme annulateur de f.
- Ainsi : $\mathrm{Sp}(f) \subset \{\text{racines de } P\ \} = \{-2, 2\}$.

$$\boxed{\text{Les réels } -2 \text{ et } 2 \text{ sont les deux seuls valeurs propres possibles de l'endomorphisme } f.}$$

Remarque
On parle de valeurs propres **possibles**.
C'est une autre manière de dire « Exhiber un polynôme annulateur de f ». □

c) Vérifier que $2\,\mathrm{Id}$ et $-2\,\mathrm{Id}$ satisfont l'équation $(*)$.

Démonstration.

- Tout d'abord :
$$(2\ \mathrm{Id}) \circ (2\ \mathrm{Id}) = 4\ \mathrm{Id}^2 = 4\ \mathrm{Id}$$
- Ensuite :
$$(-2\ \mathrm{Id}) \circ (-2\ \mathrm{Id}) = 4\ \mathrm{Id}^2 = 4\ \mathrm{Id}$$

$$\boxed{\text{Les endomorphismes } -2\ \mathrm{Id} \text{ et } 2\ \mathrm{Id} \text{ satisfont } (*).}$$

□

On suppose dans la suite de l'exercice que $f \neq 2\,\mathrm{Id}$ et $f \neq -2\,\mathrm{Id}$ et on note $F = \mathrm{Ker}(f - 2\ \mathrm{Id})$ et $G = \mathrm{Im}(f - 2\ \mathrm{Id})$.

5. Soit x un élément de E. Montrer que $(f(x) - 2x) \in \mathrm{Ker}(f + 2\ \mathrm{Id})$ et que $(f(x) + 2x) \in F$.
En déduire que $G \subset \mathrm{Ker}\,(f + 2\,\mathrm{Id})$ et que $\mathrm{Im}\,(f + 2\,\mathrm{Id}) \subset F$.
Montrer que 2 et -2 sont les valeurs propres de f.

Démonstration.

- Démontrons que $(f(x) - 2x) \in \mathrm{Ker}(f + 2\ \mathrm{Id})$.

$$\begin{array}{rcll} (f + 2\ \mathrm{Id})(f(x) - 2x) & = & f(f(x) - 2x) + 2\ \mathrm{Id}(f(x) - 2x) & \\ & = & (f \circ f)(x) - 2\ \cancel{f(x)} + 2\ (\cancel{f(x)} - 2x) & \textit{(par linéarité de } f\textit{)} \\ & = & (4\ \mathrm{Id})(x) - 4x & \textit{(car } f \circ f = 4\ \mathrm{Id}\textit{)} \\ & = & 4x - 4x = 0 & \end{array}$$

$$\boxed{(f(x) - 2x) \in \mathrm{Ker}(f + 2\ \mathrm{Id})}$$

- Démontrons que $(f(x) + 2x) \in \mathrm{Ker}(f - 2\ \mathrm{Id})$.

$$\begin{array}{rcll} (f - 2\ \mathrm{Id})(f(x) + 2x) & = & f(f(x) + 2x) - 2\ \mathrm{Id}(f(x) + 2x) & \\ & = & (f \circ f)(x) + 2\ \cancel{f(x)} - 2\ (\cancel{f(x)} + 2x) & \textit{(par linéarité de } f\textit{)} \\ & = & (4\ \mathrm{Id})(x) - 4x & \textit{(car } f \circ f = 4\ \mathrm{Id}\textit{)} \\ & = & 4x - 4x = 0 & \end{array}$$

$$\boxed{(f(x) + 2x) \in \mathrm{Ker}(f - 2\ \mathrm{Id})}$$

- Démontrons maintenant que $G = \mathrm{Im}(f - 2\ \mathrm{Id}) \subset \mathrm{Ker}(f + 2\ \mathrm{Id})$.

  Soit $y \in \mathrm{Im}(f - 2\ \mathrm{Id})$. Il existe donc $x \in E$ tel que : $y = (f - 2\ \mathrm{Id})(x) = f(x) - 2x$.
  D'après ce qui précède, $y \in \mathrm{Ker}(f + 2\ \mathrm{Id})$.

  $$\boxed{G \subset \mathrm{Ker}(f + 2\ \mathrm{Id})}$$

- De même, on démontre que $\mathrm{Im}(f + 2\ \mathrm{Id}) \subset F = \mathrm{Ker}(f - 2\ \mathrm{Id})$.

  Soit $y \in \mathrm{Im}(f + 2\ \mathrm{Id})$. Il existe donc $x \in E$ tel que : $y = (f + 2\ \mathrm{Id})(x) = f(x) + 2x$.
  D'après ce qui précède, $y \in \mathrm{Ker}(f - 2\ \mathrm{Id})$.

  $$\boxed{\mathrm{Im}(f + 2\ \mathrm{Id}) \subset F}$$

- Pour démontrer que -2 est valeur propre de f, il suffit de démontrer qu'il existe $y \neq 0$ tel que $y \in \mathrm{Ker}(f + 2\ \mathrm{Id})$ *(y est un vecteur propre associé à la valeur propre -2).*

  Supposons par l'absurde que : $\mathrm{Ker}(f + 2\ \mathrm{Id}) = \{0\}$.
  D'après ce qui précède : $\mathrm{Im}(f-2\ \mathrm{Id}) \subset \mathrm{Ker}(f+2\ \mathrm{Id}) = \{0\}$. On en déduit que $\mathrm{Im}(f-2\ \mathrm{Id}) = \{0\}$.
  Or, par le théorème du rang :

  $$\begin{array}{ccccc} \dim(\mathbb{R}^n) & = & \dim(\mathrm{Ker}(f - 2\mathrm{Id})) & + & \dim(\mathrm{Im}(f - 2\mathrm{Id})) \\ \shortparallel & & & & \shortparallel \\ n & & & & 0 \end{array}$$

  Ainsi : $\dim(\mathrm{Ker}(f - 2\mathrm{Id})) = n$. Comme $\dim(\mathbb{R}^n) = n$, on en conclut que : $\mathrm{Ker}(f - 2\mathrm{Id}) = \mathbb{R}^n$.
  Ceci démontre que : $\forall x \in \mathbb{R}^n,\ (f - 2\mathrm{Id})(x) = 0$ ou encore que : $f - 2\mathrm{Id} = 0$, soit : $f = 2\ \mathrm{Id}$.
  Impossible car, par hypothèse de l'énoncé, $f \neq 2\ \mathrm{Id}$.

  $$\boxed{\text{Ainsi, } \mathrm{Ker}(f + 2\ \mathrm{Id}) \neq \{0\}\text{. Ce qui démontre que } -2 \text{ est valeur propre de } f.}$$

- On démontre alors que 2 est valeur propre de f.
  Pour ce faire, en procédant par l'absurde, on démontre que :

  $$\mathrm{Ker}(f - 2\ \mathrm{Id}) \neq \{0\}$$

  (sinon on aurait $f = -2\ \mathrm{Id}$).

  $$\boxed{\text{Ainsi, 2 est valeur propre de } f.}$$

□

6. Soit x un vecteur de $\mathrm{Ker}(f + 2\ \mathrm{Id})$.

a) Exprimer $(f - 2\ \mathrm{Id})(x)$ en fonction de x uniquement.
En déduire que x appartient à G, puis que $G = \mathrm{Ker}\,(f + 2\,\mathrm{Id})$.

Démonstration.

- Tout d'abord : $(f - 2\ \mathrm{Id})(x) = f(x) - 2\ \mathrm{Id}(x) = f(x) - 2x$.
- Or, comme $x \in \mathrm{Ker}(f + 2\ \mathrm{Id})$ alors : $(f + 2\ \mathrm{Id})(x) = 0$. On en déduit que :

  $$f(x) + 2x = 0 \quad \text{ou encore} \quad f(x) = -2x$$

$$\boxed{\text{On en déduit que : } (f - 2\ \mathrm{Id})(x) = f(x) - 2x = -2x - 2x = -4x.}$$

- On en déduit que :
$$x = -\frac{1}{4}\,(f - 2\,\mathrm{Id})(x) = (f - 2\,\mathrm{Id})\left(-\frac{1}{4}\,x\right)$$
la dernière égalité étant obtenue par linéarité de l'application $f - 2\,\mathrm{Id}$.
$$\boxed{\text{Ainsi, } x \in \mathrm{Im}(f - 2\,\mathrm{Id}).}$$

- On vient de démontrer que tout x élément de $\mathrm{Ker}(f + 2\,\mathrm{Id})$ est élément de $\mathrm{Im}(f - 2\,\mathrm{Id})$.
Autrement dit : $\mathrm{Ker}(f + 2\,\mathrm{Id}) \subset \mathrm{Im}(f - 2\,\mathrm{Id})$.
Or, d'après la question ***5.***, $\mathrm{Im}(f - 2\,\mathrm{Id}) \subset \mathrm{Ker}(f + 2\,\mathrm{Id})$.
$$\boxed{\mathrm{Im}(f - 2\,\mathrm{Id}) = \mathrm{Ker}(f + 2\,\mathrm{Id})}$$

$\square$

b) Montrer que f est diagonalisable.

Démonstration.

- D'après le théorème du rang :
$$\dim(\mathbb{R}^n) \quad = \quad \dim(\mathrm{Ker}(f - 2\mathrm{Id})) \quad + \quad \underset{\dim(\mathrm{Ker}(f + 2\mathrm{Id}))}{\underset{\shortparallel}{\dim(\mathrm{Im}(f - 2\mathrm{Id}))}}$$
car $\mathrm{Im}(f - 2\mathrm{Id}) = \mathrm{Ker}(f + 2\mathrm{Id})$ d'après la question précédente.
- D'après la question ***5.***, on sait que -2 et 2 sont valeurs propres de f. Ce sont les seules valeurs propres d'après la question ***4.b)***. On vient de démontrer que :
$$\dim(E_2(f)) + \dim(E_{-2}(f)) = \dim(\mathbb{R}^n)$$
$$\boxed{\text{Ceci démontre que } f \text{ est diagonalisable.}}$$

$\square$

II. PROBLÈME (HEC 2009)

Dans tout le problème, on considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 0$, $u_1 = 1$ et la relation :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$$

La partie II est indépendante de la partie I et la partie III est indépendante de la partie II.

Partie I. Analyse

1. a) Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante d'entiers naturels.

Démonstration.

- Montrons par récurrence double que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$, où $\mathcal{P}(n)$: $u_n \in \mathbb{N}$.
  - **Initialisation** : $u_0 = 0 \in \mathbb{N}$ et $u_1 = 1 \in \mathbb{N}$.
    Donc $\mathcal{P}(0)$ et $\mathcal{P}(1)$ sont vraies.
  - **Hérédité** : Soit $n \in \mathbb{N}$.
    Supposons $\mathcal{P}(n)$ et $\mathcal{P}(n+1)$, et démontrons $\mathcal{P}(n+2)$ (*i.e.* $u_{n+2} \in \mathbb{N}$).
    Par hypothèse de récurrence, $u_n \in \mathbb{N}$ et $u_{n+1} \in \mathbb{N}$.
    Or $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$. Donc $u_{n+2} \in \mathbb{N}$.
    D'où $\mathcal{P}(n+2)$ est vraie.

  $$\boxed{\text{Ainis, par principe de récurrence : } \forall n \in \mathbb{N},\ u_n \in \mathbb{N}.}$$

- Soit $n \in \mathbb{N}^*$. La suite (u_n) vérifie : $\forall m \in \mathbb{N},\ u_{m+2} = u_{m+1} + u_m$. En choisissant $m = n-1 \in \mathbb{N}$, on obtient : $u_{n+1} = u_n + u_{n-1}$. Ainsi :

  $$u_{n+1} - u_n = u_{n-1} \geqslant 0$$

  car, d'après la question précédente, $u_{n-1} \in \mathbb{N}$.
  De plus : $u_1 - u_0 = 1 - 0 = 1$.

  $$\boxed{\text{On en déduit que : } \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} - u_n \geqslant 0. \text{ La suite } (u_n) \text{ est donc croissante.}}$$

□

b) La suite est-elle convergente ?

Démonstration.

- Supposons par l'absurde que (u_n) est majorée. La suite (u_n) est donc :
  × croissante d'après la question ***1.a)***,
  × majorée.

  donc elle converge vers un réel ℓ.
  De plus, (u_n) est croissante et $u_1 \geqslant 1$, donc : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \geqslant u_1 = 1$. On en déduit que $\ell = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n \geqslant 1$.
- D'autre part, par définition : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$.
  Par passage à la limite, on obtient :

  $$\ell = \ell + \ell \ \Leftrightarrow\ \ell = 0$$

  ce qui est absurde.
  Donc (u_n) n'est pas majorée.
- La suite (u_n) est croissante et non majorée.

  $$\boxed{\text{On en déduit que la suite } (u_n) \text{ est divergente et que } \lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty.}$$

Remarque
Certaines questions se traitent presque toujours grâce à un raisonnement par l'absurde.
Par exemple :

× montrer qu'une suite n'est pas majorée

× montrer qu'une matrice admettant une unique valeur propre est diagonalisable.

Dans ces 2 cas, au moins, on pensera en priorité à utiliser un raisonnement par l'absurde. □

Dans toute la suite du problème, a **et** b ($a > b$) **désignent les deux solutions de l'équation du second degré suivante :** $x^2 - x - 1 = 0$.

2. a) Montrer que : $b = 1 - a = -\dfrac{1}{a}$. Établir l'encadrement suivant $1 < a < 2$.

Démonstration.
Les réels a et b sont les 2 racines du polynôme $X^2 - X - 1$ de discriminant :
$\Delta = (-1)^2 - 4 \times 1 \times (-1) = 5$.
Donc, comme $a > b$, on obtient :

$$a = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \quad \text{et} \quad b = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

On remarque ensuite que :

$$1 - a = 1 - \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \frac{2-1-\sqrt{5}}{2} = \frac{1-\sqrt{5}}{2} = b$$

De plus :

$$-\frac{1}{a} = -\frac{2}{1+\sqrt{5}} = -\frac{2\,(1-\sqrt{5})}{(1+\sqrt{5})(1-\sqrt{5})} = -\frac{2\,(1-\sqrt{5})}{1^2-(\sqrt{5})^2} = -\frac{2\,(1-\sqrt{5})}{-4} = \frac{1-\sqrt{5}}{2} = b$$

$$\boxed{b = 1 - a = -\frac{1}{a}}$$

On remarque que :

$$1 < a < 2 \ \Leftrightarrow\ 1 < \frac{1+\sqrt{5}}{2} < 2 \ \Leftrightarrow\ 2 < 1+\sqrt{5} < 4 \ \Leftrightarrow\ 1 < \sqrt{5} < 3 \ \Leftrightarrow\ 1 < 5 < 9$$

où la dernière équivalence est vraie car la fonction $x \mapsto x^2$ est strictement croissante sur $[0, +\infty[$.
On a bien que $1 < 5 < 9$.

$$\boxed{\text{Par raisonnement par équivalence, } 1 < a < 2.}$$

Remarque

- On pouvait aussi raisonner de la manière suivante :
  Les réels a et b sont les 2 racines du polynôme $X^2 - X - 1$. Donc :

  $$X^2 - X - 1 = (X-a)(X-b) = X^2 - (a+b)X + ab$$

  Donc, par identification, on obtient :

  $$\left\{\begin{array}{l} a+b = 1 \\ ab = -1 \end{array}\right. \quad \Leftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{l} b = 1-a \\ b = -\frac{1}{a} \end{array}\right.$$

- On appelle ce type de relations des relations « coefficients / racines ».
  Elles sont hors programme, mais il est régulièrement utile de savoir les retrouver (surtout pour des polynômes de degré 2). □

b) Montrer que, pour tout n de $\mathbb{N}$, on a : $u_n = \dfrac{1}{\sqrt{5}}\,(a^n - b^n)$.

Démonstration.
La suite (u_n) vérifie : $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$. C'est donc une suite récurrente linéaire d'ordre 2.

- L'équation caractéristique associée à la suite (u_n) est : $x^2 = x + 1$.
  Notons P le polynôme : $P(X) = X^2 - X - 1$.
  Ce polynôme admet deux racines disctinctes : a et b.
- On en déduit la formule explicite de (u_n) : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \lambda \times a^n + \mu \times b^n$
  où les valeurs λ et μ sont données par le système :

$$(S)\ \left\{\begin{array}{rcrcl} \lambda & + & \mu & = & 0 \\ a\,\lambda & + & b\,\mu & = & 1 \end{array}\right. \qquad \begin{array}{l} \textit{(valeur de } u_0\textit{)} \\ \textit{(valeur de } u_1\textit{)} \end{array}$$

  Résolvons-le.

$$(S) \overset{L_2 \leftarrow L_2 - a\,L_1}{\iff} \left\{\begin{array}{rcrcl} \lambda & + & \mu & = & 0 \\ & & (b-a)\,\mu & = & 1 \end{array}\right.$$

  Notons enfin que : $b - a \ = \ \dfrac{1-\sqrt{5}}{2} - \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} \ = \ -\sqrt{5}$.
  On en déduit que : $\lambda = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$ et $\mu = -\dfrac{1}{\sqrt{5}}$.
- Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$u_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\ a^n - \frac{1}{\sqrt{5}}\ b^n$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\,(a^n - b^n)}$$

□

c) En déduire un équivalent de (u_n) lorsque n tend vers $+\infty$.

Démonstration.

- Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$u_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\,a^n\left(1 - \frac{b^n}{a^n}\right) = \frac{1}{\sqrt{5}}\,a^n\left(1 - \left(\frac{b}{a}\right)^n\right)$$

- La suite $\left(\left(\dfrac{b}{a}\right)^n\right)$ est géométrique de raison $\dfrac{b}{a}$.
  On cherche donc à savoir si $\left|\dfrac{b}{a}\right| < 1$.
  D'après la question ***2.a)***, on commence par remarquer que : $\dfrac{b}{a} = \dfrac{-\frac{1}{a}}{a} = -\dfrac{1}{a^2}$.
  De plus on a :

$$\begin{array}{rcll} 1 < a < 2 & \Leftrightarrow & 1 < a^2 < 4 & \textit{(car } x \mapsto x^2 \textit{ est strictement croissante sur } \mathbb{R}_+^*\textit{)} \\ & \Leftrightarrow & 1 > \dfrac{1}{a^2} > \dfrac{1}{4} & \textit{(car } x \mapsto \dfrac{1}{x} \textit{ est strictement décroissante sur } \mathbb{R}_+^*\textit{)} \\ & \Leftrightarrow & -1 < -\dfrac{1}{a^2} < -\dfrac{1}{4} & \end{array}$$

Donc $\left|\frac{b}{a}\right| < 1$ et la suite $\left(\left(\frac{b}{a}\right)^n\right)$ converge vers 0.

- Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\frac{u_n}{\frac{1}{\sqrt{5}}\, a^n} = \frac{\cancel{\frac{1}{\sqrt{5}}\, a^n} \left(1 - \left(\frac{b}{a}\right)^n\right)}{\cancel{\frac{1}{\sqrt{5}}\, a^n}} = 1 - \left(\frac{b}{a}\right)^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$$

$$\boxed{u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{5}}\, a^n}$$

□

3. On pose, pour tout n de $\mathbb{N}$: $\beta_n = u_{n+1} - a\, u_n$.
Exprimer, pour tout n de $\mathbb{N}$, β_n en fonction de n et b.

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} \beta_n &= u_{n+1} - a\, u_n \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}}(a^{n+1} - b^{n+1}) - a\, \frac{1}{\sqrt{5}}(a^n - b^n) && \textit{(d'après } \textbf{\textit{2.b)}}\textit{)} \\ &= \cancel{\frac{1}{\sqrt{5}}\, a^{n+1}} - \frac{1}{\sqrt{5}}\, b^{n+1} - \cancel{\frac{1}{\sqrt{5}}\, a^{n+1}} + \frac{1}{\sqrt{5}}\, a\, b^n \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}}\, (a-b)\, b^n \ = \ \frac{1}{\cancel{\sqrt{5}}}\, \cancel{\sqrt{5}}\, b^n \\ &= b^n \end{aligned}$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ \beta_n = b^n}$$

□

4. On rappelle que pour tout réel x, la partie entière de x est l'entier noté $\lfloor x \rfloor$ qui vérifie :

$$\lfloor x \rfloor \leqslant x < \lfloor x \rfloor + 1$$

a) Établir, pour tout n de $\mathbb{N}$, l'égalité suivante : $\lfloor a\, u_{2n} \rfloor = u_{2n+1} - 1$.

Démonstration.

- On commence par remarquer que, d'après la question ***1.***, $u_{2n+1} \in \mathbb{N}$, donc $u_{2n+1} - 1 \in \mathbb{Z}$.
On sait de plus que :
$$\lfloor a\, u_{2n} \rfloor \leqslant a\, u_{2n} < \lfloor a\, u_{2n} \rfloor + 1$$
On cherche donc à montrer que :
$$u_{2n+1} - 1 \leqslant a\, u_{2n} < u_{2n+1} - 1 + 1 = u_{2n+1}$$
- Tout d'abord :
$$u_{2n+1} - a\, u_{2n} = \beta_{2n} = b^{2n} = (b^n)^2 > 0$$
Donc : $u_{2n+1} > a\, u_{2n}$.
- On a ensuite :
$$u_{2n+1} - a\, u_{2n} - 1 = \beta_{2n} - 1 = b^{2n} - 1$$
On sait que : $1 < a < 2$. Donc $-1 < b < 0$. Donc $0 < b^2 < 1$, car $x \mapsto x^2$ est strictement décroissante sur $]-1, 0[$.
Donc $0 < b^{2n} < 1$, car $x \mapsto x^n$ est strictement croissante sur $[0, +\infty[$.
Finalement : $u_{2n+1} - a\, u_{2n} - 1 = b^{2n} - 1 \leqslant 0$.

On a donc bien : $u_{2n+1} - 1 \leqslant a\, u_{2n} < u_{2n+1} - 1 + 1 = u_{2n+1}$

$$\boxed{\text{D'où } \lfloor a\, u_{2n} \rfloor = u_{2n+1} - 1.}$$

□

b) Exprimer, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $\lfloor a\, u_{2n-1} \rfloor$, en fonction de u_{2n}.

Démonstration.

- On commence par remarquer que, d'après la question ***1.***, $u_{2n} \in \mathbb{N}$.
  On cherche un encadrement de $a\, u_{2n-1}$:
  $$\lfloor a\, u_{2n-1} \rfloor \leqslant a\, u_{2n-1} < \lfloor a\, u_{2n-1} \rfloor + 1$$
  On raisonne comme dans la question précédente.
- Tout d'abord, comme $b < 0$:
  $$u_{2n} - a\, u_{2n-1} = \beta_{2n-1} = b^{2n-1} = \frac{1}{b}\, (b^n)^2 < 0$$
  Donc : $u_{2n} \leqslant a\, u_{2n-1}$.
  On va donc chercher à montrer que $\lfloor a\, u_{2n-1} \rfloor = u_{2n}$
- On veut donc montrer que :
  $$a\, u_{2n-1} < u_{2n} + 1$$
  On remarque que :
  $$u_{2n} - a\, u_{2n-1} + 1 = \beta_{2n-1} + 1 = b^{2n-1} - 1$$
  D'après le même raisonnement qu'en question ***4.b)***, on obtient que : $-1 < b^{2n-1} < 0$.
  Finalement : $u_{2n} - a\, u_{2n-1} + 1 = b^{2n-1} + 1 > 0$.

On a donc bien : $u_{2n} \leqslant a\, u_{2n-1} < u_{2n} + 1$

$$\boxed{\text{D'où } \lfloor a\, u_{2n-1} \rfloor = u_{2n}.}$$

□

5. Soit y un réel fixé vérifiant $|y| < 1$ et k un entier fixé de $\mathbb{N}$.

a) Montrer que la série $\sum\limits_{n \geqslant 1} n^k\, y^n$ est absolument convergente.

Démonstration.

- La série $\sum\limits_{n \geqslant 1} n^k\, y^n$ est absolument convergente si et seulement si $\sum\limits_{n \geqslant 1} |n^k\, y^n|$ converge, *i.e.* ssi $\sum\limits_{n \geqslant 1} n^k\, |y|^n$ converge.
- Démontrons que $n^k\, |y|^n \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$.
  Soit $n \geqslant 1$.
  $$\frac{n^k\, |y|^n}{\frac{1}{n^2}} = n^2\, (n^k\, |y|^n) = n^{k+2}\, |y|^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$
  par croissance comparées.
  $$\boxed{n^k\, |y|^n \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{n^2}\right)}$$

- Ainsi :
  × $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $n^k |y|^n \geqslant 0$ et $\dfrac{1}{n^2} \geqslant 0$,
  × $n^k |y|^n \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$,
  × la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{1}{n^2}$ est une série de Riemann d'exposant $2 > 1$, donc elle est convergente.

  D'après le critère de comparaison des séries à termes positifs, la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} n^k |y|^n$ est convergente.

$$\boxed{\text{La série } \sum_{n\geqslant 1} n^k y^n \text{ est absolument convergente.}}$$

□

b) En déduire la convergence de la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} n^k \dfrac{u_n}{2^{n+1}}$.

Démonstration.

- D'après la question ***2.c)***, $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{\sqrt{5}}\, a^n$. Donc :

$$n^k \frac{u_n}{2^{n+1}} \underset{n\to+\infty}{\sim} n^k \frac{\frac{1}{\sqrt{5}}\, a^n}{2^{n+1}} = \frac{1}{2\sqrt{5}}\, n^k \left(\frac{a}{2}\right)^n$$

- Il s'agit alors d'appliquer la question ***5.a)*** avec $y = \dfrac{a}{2}$.

  Cela est possible car, d'après la question ***2.a)***, $1 < a < 2$, donc $|y| < 1$.

  Ainsi, d'après la question ***5.a)***, la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} n^k \left(\dfrac{a}{2}\right)^n$ est absolument convergente, donc elle est convergente. La série $\dfrac{1}{2\sqrt{5}} \sum\limits_{n\geqslant 1} n^k \left(\dfrac{a}{2}\right)^n$ est donc elle aussi convergente.

  (on ne change pas la nature d'une série en multipliant son terme général par un réel **non nul***)*
- Finalement, on sait que :
  × $\forall n \geqslant 1, \quad n^k \dfrac{u_n}{2^{n+1}} \geqslant 0$ et $\dfrac{1}{2\sqrt{5}}\, n^k \left(\dfrac{a}{2}\right)^n \geqslant 0$,
  × $n^k \dfrac{u_n}{2^{n+1}} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{2\sqrt{5}}\, n^k \left(\dfrac{a}{2}\right)^n$,
  × la série $\dfrac{1}{2\sqrt{5}} \sum\limits_{n\geqslant 1} n^k \left(\dfrac{a}{2}\right)^n$ converge.

$$\boxed{\text{D'après le critère d'équivalence des séries à termes positifs, la série } \sum_{n\geqslant 1} n^k \frac{u_n}{2^{n+1}} \text{ converge.}}$$

Remarque
On pouvait aussi répondre à cette question de la façon suivante :

- D'après la question ***2.b)*** : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = \dfrac{1}{\sqrt{5}}\, a^n - \dfrac{1}{\sqrt{5}}\, b^n$.

  Donc, soit $N \geqslant 1$:

$$\sum_{n=1}^{N} n^k \frac{u_n}{2^{n+1}} = \sum_{n=1}^{N} n^k \frac{\frac{1}{\sqrt{5}}\, a^n - \frac{1}{\sqrt{5}}\, b^n}{2^{n+1}} = \frac{1}{2\sqrt{5}} \sum_{n=1}^{N} n^k \left(\frac{a}{2}\right)^n - \frac{1}{2\sqrt{5}} \sum_{n=1}^{N} n^k \left(\frac{b}{2}\right)^n$$

- On souhaite donc appliquer la question ***5.a)*** avec $y_a = \dfrac{a}{2}$ et $y_b = \dfrac{b}{2}$.

  Pour cela, on se rappelle que, d'après la question ***2.a)***, $1 < a < 2$, donc $|y_a| < 1$.
  On a de plus montré, en question ***4.a)***, que $-1 < b < 0$, donc $|y_b| < 1$.
  On peut donc appliquer la question ***5.a)*** à y_a et y_b.

- D'après la question ***5.a)***, les séries $\sum\limits_{n\geqslant 1} n^k \left(\dfrac{a}{2}\right)^n$ et $\sum\limits_{n\geqslant 1} n^k \left(\dfrac{b}{2}\right)^n$ sont absolument convergentes, donc elles sont convergentes.

  Donc les séries $\dfrac{1}{2\sqrt{5}} \sum\limits_{n\geqslant 1} n^k \left(\dfrac{a}{2}\right)^n$ et $-\dfrac{1}{2\sqrt{5}} \sum\limits_{n\geqslant 1} n^k \left(\dfrac{b}{2}\right)^n$ sont convergentes.

  (on ne change pas la nature d'une série en multipliant son terme général par un réel **non nul***)*

Par somme de séries convergentes, la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} n^k \dfrac{u_n}{2^{n+1}}$ est donc convergente. □

c) En utilisant la définition de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, calculer $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{u_n}{2^{n+1}}$.

Démonstration.

- D'après la question ***5.b)*** appliquée à $k = 0$, on obtient que la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{u_n}{2^{n+1}}$ est convergente.

  On note ℓ sa limite.
- Soit $N \geqslant 1$.

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{N} \frac{u_n}{2^{n+1}} &= \sum_{n=1}^{N} \frac{u_{n+2} - u_{n+1}}{2^{n+1}} && \textit{(par définition de } (u_n)\textit{)} \\
&= \sum_{n=1}^{N} \frac{u_{n+2}}{2^{n+1}} - \sum_{n=1}^{N} \frac{u_{n+1}}{2^{n+1}} \\
&= \sum_{n=3}^{N+2} \frac{u_n}{2^{n-1}} - \sum_{n=2}^{N+1} \frac{u_n}{2^{n}} && \textit{(par ré-indiciation)} \\
&= 4\sum_{n=3}^{N+2} \frac{u_n}{2^{n+1}} - 2\sum_{n=2}^{N+1} \frac{u_n}{2^{n+1}} \\
&= 4\left(\sum_{n=1}^{N+2} \frac{u_n}{2^{n+1}} - \frac{u_2}{2^3} - \frac{u_1}{2^2}\right) - 2\left(\sum_{n=1}^{N+1} \frac{u_n}{2^{n+1}} - \frac{u_1}{2^2}\right) \\
&= 4\sum_{n=1}^{N+2} \frac{u_n}{2^{n+1}} - 2\sum_{n=1}^{N+1} \frac{u_n}{2^{n+1}} - \cancel{4 \times \frac{1}{8}} - 4 \times \frac{1}{4} + \cancel{2 \times \frac{1}{4}} \\
&= 4\sum_{n=1}^{N+2} \frac{u_n}{2^{n+1}} - 2\sum_{n=1}^{N+1} \frac{u_n}{2^{n+1}} - 1
\end{aligned}$$

- En passant à la limite dans cette égalité (ce qui est autorisé car on a montré que la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{u_n}{2^{n+1}}$ converge), on obtient :

$$\ell = 4\,\ell - 2\,\ell - 1 \ \Leftrightarrow\ \ell = 1$$

$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{u_n}{2^{n+1}} = 1}$$ □

Partie II. Algèbre et algorithmique

6. Soit A la matrice carrée d'ordre 4 définie par : $A = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

a) La matrice A est-elle inversible ?

Démonstration.

$$\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\right) \overset{L_4 \leftarrow L_4 - L_1}{=} \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right) < 4$$

$$\boxed{\text{Donc } A \text{ n'est pas inversible.}}$$

□

b) Calculer A^2 et A^3. Vérifier que A^3 est une combinaison linéaire de A et A^2.

Démonstration.

- Tout d'abord :

$$A^2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \times \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 & 4 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 4 & 2 & 2 & 4 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

- D'autre part :

$$A^3 = A^2 \times A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \times \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 6 & 4 & 4 & 6 \\ 4 & 2 & 2 & 4 \\ 4 & 2 & 2 & 4 \\ 6 & 4 & 4 & 6 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

- On remarque que : $A^3 = A^2 + A$.

$$\boxed{A^2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad A^3 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A^3 = A^2 + A.}$$

□

c) Déterminer les valeurs propres de A.

Démonstration.

- D'après la question ***6.a)***, A est inversible. Donc 0 est valeur propre de A.
- Déterminons alors les valeurs propres de A différentes de 0.
  Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\lambda \neq 0$. Rappelons que :

$$\lambda \in \mathrm{Sp}(A) \;\Leftrightarrow\; A - \lambda\, I \text{ n'est pas inversible}$$

  Afin de déterminer si $A - \lambda\, I_4$ est inversible, on procède au calcul du rang de cette matrice.

$$\begin{array}{rcl}
\mathrm{rg}(A-\lambda\, I_4) & = & \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix} \frac{1}{2}-\lambda & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\lambda & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & -\lambda & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}-\lambda \end{pmatrix}\right) \\
& = & \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix} 1-2\lambda & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2\lambda & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -2\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1-2\lambda \end{pmatrix}\right) \\
& \underset{}{\overset{L_1 \leftrightarrow L_4}{=}} & \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1-2\lambda \\ 1 & -2\lambda & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -2\lambda & 1 \\ 1-2\lambda & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\right) \\
& \overset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 - (1-2\lambda)\, L_1}}{=} & \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1-2\lambda \\ 0 & -(1+2\lambda) & -1 & 2\lambda \\ 0 & -1 & -(1+2\lambda) & 2\lambda \\ 0 & 2\lambda & 2\lambda & 4\lambda(1-\lambda) \end{pmatrix}\right) \\
& \overset{L_2 \leftrightarrow L_3}{=} & \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1-2\lambda \\ 0 & -1 & -(1+2\lambda) & 2\lambda \\ 0 & -(1+2\lambda) & -1 & 2\lambda \\ 0 & 2\lambda & 2\lambda & 4\lambda(1-\lambda) \end{pmatrix}\right) \\
& \overset{\substack{L_3 \leftarrow L_3 - (1+2\lambda)\, L_2 \\ L_4 \leftarrow L_4 + 2\lambda\, L_2}}{=} & \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1-2\lambda \\ 0 & -1 & -(1+2\lambda) & 2\lambda \\ 0 & 0 & 4\lambda(1+\lambda) & -4\lambda^2 \\ 0 & 0 & -4\lambda^2 & 4\lambda \end{pmatrix}\right) \\
& \overset{L_3 \leftrightarrow L_4}{=} & \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1-2\lambda \\ 0 & -1 & -(1+2\lambda) & 2\lambda \\ 0 & 0 & -4\lambda^2 & 4\lambda \\ 0 & 0 & 4\lambda(1+\lambda) & -4\lambda^2 \end{pmatrix}\right) \\
& \overset{L_4 \leftarrow \lambda\, L_4 + (1+\lambda)\, L_3}{=} & \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1-2\lambda \\ 0 & -1 & -(1+2\lambda) & 2\lambda \\ 0 & 0 & -4\lambda^2 & 4\lambda \\ 0 & 0 & 0 & -4\lambda(\lambda^2-\lambda-1) \end{pmatrix}\right)
\end{array}$$

La dernière opération est autorisée car $\lambda \neq 0$.
La réduite obtenue est une matrice triangulaire supérieure.
Elle est non inversible ssi l'un au moins de ses cœfficients diagonaux est nul. Ainsi :

$$\begin{array}{rcl}
A-\lambda\, I_4 \text{ n'est pas inversible} & \Leftrightarrow & -4\lambda^2 = 0 \ \texttt{OU} \ -4\lambda(\lambda^2-\lambda-1) = 0 \\
& \Leftrightarrow & \lambda = 0 \ \texttt{OU} \ -4\lambda = 0 \ \texttt{OU} \ \lambda^2-\lambda-1 = 0 \\
& \Leftrightarrow & \lambda = 0 \ \texttt{OU} \ (\lambda-a)(\lambda-b) = 0 \\
& \Leftrightarrow & \lambda = 0 \ \texttt{OU} \ \lambda = a \ \texttt{OU} \ \lambda = b
\end{array}$$

Ainsi, a et b sont valeurs propres de A (on a déjà vu que $\lambda = 0$ est valeur propre et on a exclu cette possibilité dans ce cas).

$$\boxed{\text{Finalement, en combinant les deux cas : } \mathrm{Sp}(A) = \{0\} \cup \{a,b\} = \{0,a,b\}.}$$

Remarque

- Le calcul de rang précédent est effectué algorithmiquement mais sans finesse. De meilleurs choix dans les opérations élémentaires permettaient des calculs plus simples et plus rapides. C'est ce qui est attendu de candidats à HEC.

  Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.
  On pouvait par exemple effectuer les opérations suivantes :

$$\begin{aligned}
\mathrm{rg}(A - \lambda I_4) \quad &= \quad \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix} 1-2\lambda & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2\lambda & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -2\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1-2\lambda \end{pmatrix}\right) \\
&\overset{C_1 \leftarrow C_1 - C_4}{=} \quad \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix} -2\lambda & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2\lambda & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2\lambda & 1 \\ 2\lambda & 1 & 1 & 1-2\lambda \end{pmatrix}\right) \\
&\overset{L_4 \leftarrow L_4 + L_1}{=} \quad \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix} -2\lambda & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2\lambda & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2\lambda & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 2(1-\lambda) \end{pmatrix}\right) \\
&\overset{L_2 \leftrightarrow L_4}{=} \quad \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix} -2\lambda & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 2(1-\lambda) \\ 0 & 0 & -2\lambda & 1 \\ 0 & -2\lambda & 0 & 1 \end{pmatrix}\right) \\
&\overset{L_4 \leftarrow L_4 + \lambda L_2}{=} \quad \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix} -2\lambda & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 2(1-\lambda) \\ 0 & 0 & -2\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 2\lambda & 1+2\lambda(1-\lambda) \end{pmatrix}\right) \\
&\overset{L_4 \leftarrow L_4 + L_3}{=} \quad \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix} -2\lambda & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 2(1-\lambda) \\ 0 & 0 & -2\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2(\lambda^2-\lambda-1) \end{pmatrix}\right)
\end{aligned}$$

  La réduite obtenue est triangulaire supérieure.
  Elle est non inversible ssi l'un au moins de ses cœfficients diagonaux est nul. Donc :

$$\begin{aligned}
A - \lambda I_4 \text{ n'est pas inversible} \quad &\Leftrightarrow \quad -2\lambda = 0 \ \texttt{OU} \ -2\,(\lambda^2-\lambda-1) = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad \lambda = 0 \ \texttt{OU} \ \lambda = a \ \texttt{OU} \ \lambda = b
\end{aligned}$$

  Donc $\mathrm{Sp}(A) = \{0, a, b\}$.

- On pouvait aussi traiter la question de la manière suivante :
  - D'après la question ***6.b)***, le polynôme P défini par $P(X) = X^3 - X^2 - X$ est un polynôme annulateur de A.
    Donc : $\mathrm{Sp}(A) \subset \{\text{racines de } P\}$.
  - D'après la **Partie I**, on a :

$$P(X) = X^3 - X^2 - X = X(X^2 - X - 1) = X(X-a)(X-b)$$

    Donc $\mathrm{Sp}(A) \subset \{0, a, b\}$.

- Vérifions que 0, a et b sont bien des valeurs propres de A.

  D'après la question ***6.a)***, A n'est pas inversible. Donc 0 est valeur propre de A.

  Montrons que $A - a\, I_4$ n'est pas inversible, *i.e.* $\text{rg}(A - a\, I_4) < 4$.

$$\begin{aligned} A - a\, I_4 &= A - \frac{1+\sqrt{5}}{2}\, I_4 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1+\sqrt{5} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1+\sqrt{5} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1+\sqrt{5} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1+\sqrt{5} \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -\sqrt{5} & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1-\sqrt{5} & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1-\sqrt{5} & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -\sqrt{5} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

  On obtient donc :

$$\begin{aligned} \text{rg}(A - a\, I_4) &= \text{rg}\left(\begin{pmatrix} -\sqrt{5} & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1-\sqrt{5} & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1-\sqrt{5} & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -\sqrt{5} \end{pmatrix}\right) \\ &\overset{C_1 \leftrightarrow C_1 - C_4}{=} \text{rg}\left(\begin{pmatrix} -(1+\sqrt{5} & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -(1+\sqrt{5}) & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -(1+\sqrt{5}) & 1 \\ 1+\sqrt{5} & 1 & 1 & -\sqrt{5} \end{pmatrix}\right) \\ &\overset{L_4 \leftarrow L_4 + L_1}{=} \text{rg}\left(\begin{pmatrix} -(1+\sqrt{5} & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -(1+\sqrt{5}) & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -(1+\sqrt{5}) & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 1-\sqrt{5} \end{pmatrix}\right) \\ &\overset{L_2 \leftrightarrow L_4}{=} \text{rg}\left(\begin{pmatrix} -(1+\sqrt{5} & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 1-\sqrt{5} \\ 0 & 0 & -(1+\sqrt{5}) & 1 \\ 0 & -(1+\sqrt{5}) & 0 & 1 \end{pmatrix}\right) \\ &\overset{L_4 \leftarrow 2\, L_4 + (1+\sqrt{5})\, L_2}{=} \text{rg}\left(\begin{pmatrix} -(1+\sqrt{5} & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 1-\sqrt{5} \\ 0 & 0 & -(1+\sqrt{5}) & 1 \\ 0 & 0 & 2(1+\sqrt{5}) & -2 \end{pmatrix}\right) \\ &\overset{L_4 \leftarrow L_4 + 2\, L_3}{=} \text{rg}\left(\begin{pmatrix} -(1+\sqrt{5} & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 1-\sqrt{5} \\ 0 & 0 & -(1+\sqrt{5}) & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right) \end{aligned}$$

  Donc $\text{rg}(A - a\, I_4) < 4$. Donc $a \in \text{Sp}(A)$.

  De même, $\text{rg}(A - b\, I_4) < 4$, donc b est bien valeur propre de A.

  Finalement, on a bien $\text{Sp}(A) = \{0, a, b\}$.
  Remarquons bien que cette méthode était hautement coûteuse en temps de calculs. □

d) Établir l'existence de deux suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ telles que, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on ait :

$$A^n = a_n\, A + b_n\, A^2$$

Démonstration.
Montrons par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{P}(n)$,
où $\mathcal{P}(n)$: il existe $a_n \in \mathbb{R}$ et $b_n \in \mathbb{R}$ tels que $A^n = a_n\, A + b_n\, A^2$.

- **Initialisation** : On pose $a_1 = 1$ et $b_1 = 0$. Alors on a : $A^1 = A = a_1\, A + b_1\, A^2$.
  Donc $\mathcal{P}(1)$ est vraie.
- **Hérédité** : Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
  Supposons $\mathcal{P}(n)$ et démontrons $\mathcal{P}(n+1)$ (*i.e.* il existe $a_{n+1} \in \mathbb{R}$ et $b_{n+1} \in \mathbb{R}$ tels que : $A^{n+1} = a_{n+1}\, A + b_{n+1}\, A^2$).
  Par hypothèse de récurrence, il existe $a_n \in \mathbb{R}$ et $b_n \in \mathbb{R}$ tels que : $A^n = a_n\, A + b_n\, A^2$.
  On obtient donc :

$$\begin{array}{rcll} A^{n+1} & = & A \times A^n & \\ & = & A\,(a_n\, A + b_n\, A^2) & \textit{(par hypothèse de récurrence)} \\ & = & a_n\, A^2 + b_n A^3 & \\ & = & a_n\, A^2 + b_n\,(A^2 + A) & \textit{(d'après } \textbf{\textit{6.b)}}\textit{)} \\ & = & b_n\, A + (a_n + b_n)\, A^2 & \end{array}$$

  On pose $a_{n+1} = b_n$ et $b_{n+1} = a_n + b_n$. Alors $A^{n+1} = a_{n+1}\, A + b_{n+1}\, A^2$.
  Donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{Par principe de récurrence, il existe deux suites } (a_n) \text{ et } (b_n) \text{ telles que :}\\ \forall n \in \mathbb{N}^*,\ A^n = a_n\, A + b_n\, A^2\end{array}}$$

□

e) Exprimer, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, a_{n+1} et b_{n+1} en fonction de a_n et b_n.
Montrer que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ vérifient une relation de récurrence linéaire d'ordre 2.

Démonstration.

- La récurrence de la question ***6.d)*** nous fournit les relations entre a_{n+1} et b_{n+1} avec a_n et b_n.

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \left\{\begin{array}{rcl} a_{n+1} & = & b_n \\ b_{n+1} & = & a_n + b_n \end{array}\right.}$$

- D'après les relations précédentes, on obtient :
  - × d'une part, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:
  $$a_{n+2} = b_{n+1} = a_n + b_n = a_n + a_{n+1}$$
  Donc la suite (a_n) vérifie la relation de récurrence linéaire d'ordre 2 :
  $$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ a_{n+2} - a_{n+1} - a_n = 0$$
  - × d'autre part, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:
  $$b_{n+2} = a_{n+1} + b_{n+1} = b_n + b_{n+1}$$
  Donc la suite (b_n) vérifie la relation de récurrence linéaire d'ordre 2 :
  $$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ b_{n+2} - b_{n+1} - b_n = 0$$

$$\boxed{\text{Les suites } (a_n) \text{ et } (b_n) \text{ vérifient une relation de récurrence linéaire d'ordre 2.}}$$

□

7. On propose la fonction **Scilab** suivante :

```
function f = suite(n)
  u = 0
  v = 1
  for k = 1:(n-1)
    temp = ...........
    v = .............
    u = .............
  end
  f = ..............
endfunction
```

Compléter cette fonction aux quatre places signalées par des pointillés de façon que la valeur renvoyée soit u_n.

Démonstration.

- Initialement, la variable `u` contient la valeur u_0 et la variable `v` contient u_1.
- L'idée de l'algorithme est de stocker les valeurs successives de u_n dans la variable `u` et les valeurs successives de u_{n+1} dans la variable `v`.
  Plus précisément, en sortie du $k^{\text{ème}}$ tour de boucle, `u` contient u_k et `v` contient u_{k+1}.
- Détaillons cet invariant de boucle. À l'entrée du $(k+1)^{\text{ème}}$ tour de boucle :
  × on commence par créer une variable temporaire `temp` permettant de sauvegarder une copie du contenu de `v`.

```
temp = v
```

  La variable `temp` contient alors u_{k+1}.

  × on met alors à jour la variable `v`.

```
v = temp + u
```

  La variable `v` contient alors $u_{k+1} + u_k = u_{k+2}$.
  (l'introduction de `temp` *a permis de ne pas écraser le contenu précédent de* `v` *à savoir* u_{k+1}*)*

  × on met alors à jour la variable `u`.

```
u = temp
```

  La variable `u` contient alors u_{k+1}.

  Ainsi, en sortie du $(k+1)^{\text{ème}}$ tour, les variables `u` et `v` contiennent bien les valeurs annoncées.
- En sortie du $(n-1)^{\text{ème}}$ tour de boucle, `v` contient donc la valeur recherchée u_n.

```
f = v
```

Remarque
On a naturellement envie d'écrire :

```
v = u + v
u = v
```

Mais attention : en écrivant cela, on effectue les calculs suivants :

$$\begin{array}{lcl}
\texttt{v} = \texttt{u + v} & \longleftrightarrow & \texttt{v} \text{ contient } u_{n+1} + u_n = u_{n+2} \\
\texttt{u} = \texttt{v} & \longleftrightarrow & \texttt{u} \text{ contient } u_{n+2} \quad \textit{(et non } u_{n+1}\textit{)}
\end{array}$$

D'où l'utilisation d'une variable auxiliaire. □

8. Soit n un entier de $\mathbb{N}^*$. On dit que n admet une Z-décomposition s'il existe un entier r de $\mathbb{N}^*$ tel que l'on puisse écrire $n = u_{k_1} + u_{k_2} + \cdots + u_{k_r}$, où, pour tout i de $[\![1, r]\!]$, k_i est un entier supérieur ou égal à 2 et où, pour tout i de $[\![1, r-1]\!]$ (avec $r \geqslant 2$), on a : $k_{i+1} - k_i \geqslant 2$.

a) Montrer que les entiers 37 et 272 admettent une Z-décomposition.

Démonstration.
Listons les premiers termes de la suite (u_n) :

$$\begin{array}{lll} u_0 = 0 & u_5 = 5 & u_{10} = 55 \\ u_1 = 1 & u_6 = 8 & u_{11} = 89 \\ u_2 = 1 & u_7 = 13 & u_{12} = 144 \\ u_3 = 2 & u_8 = 21 & u_{14} = 233 \\ u_4 = 3 & u_9 = 34 & \end{array}$$

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{On obtient les } Z\text{-décompositions suivantes :} \\ 37 = u_4 + u_9 \quad \text{ et } \quad 272 = u_5 + u_9 + u_{13}.\end{array}}$$

□

b) Soit n un entier admettant une Z-décomposition de la forme $n = u_{k_1} + u_{k_2} + \cdots + u_{k_r}$.
Montrer, par récurrence sur r, que l'on a : $n < u_{k_r+1}$. En déduire l'unicité de r.

Démonstration.
Montrons par récurrence que : $\forall r \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{P}(r)$,
où $\mathcal{P}(r)$: tout $m \in \mathbb{N}$ admettant une Z-décomposition de la forme $m = u_{k_1} + u_{k_2} + \cdots + u_{k_r}$ vérifie $m < u_{k_r+1}$.
(autrement dit, $\mathcal{P}(r)$: $\forall m \in \mathbb{N},\ (m = u_{k_1} + u_{k_2} + \cdots + u_{k_r}) \Rightarrow (m < u_{k_r+1})$)

- **Initialisation** :
  Soit $m \in \mathbb{N}$. On suppose que m admet une Z-décomposition de la forme $m = u_{k_1}$.
  La suite $(u_n)_{n\geqslant 2}$ est strictement croissante, donc $u_{k_1+1} > u_{k_1} = m$.
  Donc $\mathcal{P}(1)$ est vérifiée.
- **Hérédité** : soit $r \in \mathbb{N}^*$.
  - Supposons $\mathcal{P}(r)$ et démontrons $\mathcal{P}(r+1)$ (*i.e.* tout $m \in \mathbb{N}$ admettant une Z-décomposition de la forme $n = u_{k_1} + u_{k_2} + \cdots + u_{k_r} + u_{k_{r+1}}$ vérifie $m < u_{k_{r+1}+1}$).

    Soit $m \in \mathbb{N}$. On suppose que m admet une Z-décomposition de la forme :
    $$m = u_{k_1} + u_{k_2} + \cdots + u_{k_r} + u_{k_{r+1}}$$
    Alors : $m - u_{k_{r+1}} = u_{k_1} + u_{k_2} + \cdots + u_{k_r}$.
    Par hypothèse de récurrence, on a alors : $m - u_{k_{r+1}} < u_{k_r+1}$.
    $$\boxed{\text{Ainsi, } m < u_{k_{r+1}} + u_{k_r+1}}$$
  - Démontrons alors que $u_{k_r+1} \leqslant u_{k_{r+1}-1}$. On a :
    × par définition : $k_{r+1} - k_r \geqslant 2$, donc $k_{r+1} - 1 \geqslant k_r + 1$,
    × la suite (u_n) est croissante.
    Donc $u_{k_{r+1}-1} \geqslant u_{k_r+1}$.
    $$\boxed{\text{On en déduit que : } m < u_{k_{r+1}} + u_{k_r+1} \leqslant u_{k_{r+1}} + u_{k_{r+1}-1} = u_{k_{r+1}+1}.}$$
    (en notant $j = k_{r+1}$, la dernière inégalité n'est autre que l'écriture : $u_j + u_{j-1} = u_{j+1}$)

    Donc $\mathcal{P}(r+1)$ est vérifiée.

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{Ainsi, par principe de récurrence :} \\ \forall r \in \mathbb{N}, \forall m \in \mathbb{N},\ (m = u_{k_1} + u_{k_2} + \cdots + u_{k_r}) \Rightarrow (m < u_{k_r+1})\end{array}}$$

- Cette propriété est notamment vraie pour l'entier n de l'énoncé qui admet une Z-décomposition à r éléments : $n = u_{k_1} + u_{k_2} + \cdots + u_{k_r}$. D'après ce qui précède :
  × $n < u_{k_r+1}$
  × $n = u_{k_1} + u_{k_2} + \cdots + u_{k_r} \geqslant u_{k_r}$ car pour tout $j \in \mathbb{N}$, $u_j \geqslant 0$.

  On en déduit que : $u_{k_r} \leqslant n < u_{k_r+1}$.
  Ainsi, u_{k_r} est le plus grand terme de la suite (u_n) inférieur ou égal à n.

  $$\boxed{\text{Le plus grand nombre de Fibonacci apparaissant dans une } Z\text{-décomposition d'un entier } n \text{ est le plus grand terme de la suite } (u_n) \text{ inférieur ou égal à } n.}$$

- Il reste à démontrer l'unicité du nombre de termes apparaissant dans la décomposition.
  Démontrons par récurrence **forte** que : $\forall m \in \mathbb{N}^*,\ \mathcal{P}(m)$
  où $\mathcal{P}(m)$: (m admet deux Z-décompositions à r_1 et r_2 éléments) $\Rightarrow$ $(r_1 = r_2)$

  ▸ **Initialisation** :
  Supposons que $m = 1$ admet deux Z-décompositions à r_1 et r_2 éléments. Alors $r_1 = r_2 = 1$ car $m = 1$ s'écrit de manière unique en la Z-décomposition $m = u_2$ (si $j \geqslant 3$, $u_j > 1$ et donc u_j ne peut intervenir dans la Z-décomposition).

  ▸ **Hérédité** : soit $m \in \mathbb{N}^*$.

  - Supposons que pour tout $k \in [\![1, m]\!]$, $\mathcal{P}(k)$ est vérifiée et démontrons $\mathcal{P}(m+1)$ (($m+1$ admet deux Z-décompositions à r_1 et r_2 éléments) $\Rightarrow$ $(r_1 = r_2)$).
  - Supposons que $m + 1$ admet deux Z-décompositions à r_1 et r_2 éléments. Autrement dit, on suppose qu'il existe un r_1-uplet $(k_1, \ldots, k_{r_1})$ et un r_2-uplet $(j_1, \ldots, j_{r_2})$ vérifiant les propriétés introduites en ***8.*** tels que :

  $$\begin{aligned} m+1 &= u_{k_1} + \ldots + u_{k_{r_1-1}} + u_{k_{r_1}} \\ &= u_{j_1} + \ldots + u_{j_{r_2-1}} + u_{j_{r_2}} \end{aligned}$$

    Or, d'après la remarque précédente, $u_{k_{r_1}}$, plus grand nombre de Fibonacci apparaissant dans la première Z-décomposition est le plus grand terme de la suite (u_n) inférieur ou égal à n. Il en est de même de $u_{j_{r_2}}$ puisque c'est le plus grand nombre de Fibonacci apparaissant dans la première Z-décomposition.

    $$\boxed{\text{Ainsi, } u_{k_{r_1}} = u_{j_{r_2}}}$$

  - On en déduit que :

  $$\begin{aligned} (m+1) - u_{k_{r_1}} &= u_{k_1} + \ldots + u_{k_{r_1-1}} \\ &= u_{j_1} + \ldots + u_{j_{r_2-1}} \end{aligned}$$

    Deux cas se présentent.
    Si $m + 1 = u_{k_{r_1}}$:
    Alors $r_1 = 1 = r_2$ car les deux Z-décompositions s'écrivent : $m + 1 = u_{k_{r_1}}$.
    Si $m + 1 \neq u_{k_{r_1}}$: alors $(m+1) - u_{k_{r_1}} \in [\![1, m]\!]$.
    D'après l'hypothèse de récurrence appliquée à $(m+1)-u_{k_{r_1}}$, les deux Z-décompositions de $(m+1) - u_{k_{r_1}}$ sont de même taille.
    On en déduit que les deux Z-décompositions de $m + 1$ sont elle aussi de même taille.

  D'où $\mathcal{P}(m+1)$.

  $$\boxed{\text{Par principe de récurrence : } \forall m \in \mathbb{N}^*, \mathcal{P}(m).}$$

(toutes les Z-décompositions d'un entier $m \in \mathbb{N}^*$ ont le même nombre d'éléments) □

c) Montrer que, pour tout entier p supérieur ou égal à 2, tout entier n qui vérifie $1 \leqslant n \leqslant u_p$ admet une unique Z-décomposition (on pourra faire un raisonnement par récurrence sur p).

Démonstration.
Montrons par récurrence que : $\forall p \geqslant 2$, $\mathcal{P}(p)$,
où $\mathcal{P}(p)$: tout $n \in \mathbb{N}$ tel que $1 \leqslant n \leqslant u_p$ admet une unique Z-décomposition.
(autrement dit, $\mathcal{P}(p)$: $\forall n \in \mathbb{N},\ (1 \leqslant n \leqslant u_p) \Rightarrow n$ admet une unique Z-décomposition)

- **Initialisation** :
  Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $1 \leqslant n \leqslant u_2$.
  Or $u_2 = 1$ donc $n = 1$. Ainsi n admet la Z-décomposition : $n = u_2$.
  Cette Z-décomposition est unique (déjà traité dans l'initialisation précédente).
  Donc $\mathcal{P}(2)$ est vérifiée.
- **Hérédité** : soit $p \geqslant 2$.
  - Supposons pour tout $m \in [\![2, p]\!]$, $\mathcal{P}(m)$ et démontrons $\mathcal{P}(p+1)$ (*i.e.* tout $n \in \mathbb{N}$ tel que $1 \leqslant n \leqslant u_{p+1}$ admet une unique Z-décomposition).
  - Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $1 \leqslant n \leqslant u_{p+1}$ et démontrons que n admet une unique Z-décomposition.
    Dans la démonstration de la question précédente, on a vu que si n admet une Z-décomposition, alors le plus grand terme de cette Z-décomposition est le plus grand terme de la suite (u_n) inférieur à n. Il faut ici démontrer la réciproque.
    Notons u_s, le plus grand terme de la suite (u_n) inférieur à n. Ainsi, n vérifie :
    $$u_s \ \leqslant \ n \ \leqslant \ u_{p+1}$$
    Traitons tout de suite le cas où $n = u_s$. Dans ce cas, on vient d'exhiber une Z-décomposition à un terme. D'après la question précédente, tout autre Z-décomposition ne contient qu'un terme. Ainsi, $n = u_s$ est la seule Z-décomposition possible de n et $\mathcal{P}(p+1)$ est vérifiée.
    Dans le cas $n = u_{p+1}$ alors, par définition de u_s, on obtient : $u_s = u_{p+1} = n$. Et on est donc ramené au cas précédent. On peut donc supposer dans la suite que :
    $$u_s \ < \ n \ < \ u_{p+1}$$
  - Il reste à déterminer où se situe u_p. Deux cas se présentent alors :
    × si $u_p \geqslant n$: alors $n \in [\![1, u_p]\!]$ admet une unique Z-décomposition car on peut appliquer l'hypothèse de récurrence $\mathcal{P}(p)$.
    Ainsi, dans ce cas, $\mathcal{P}(p+1)$ est vérifiée.
    × si $u_p \leqslant n$: alors, par définition $u_s \geqslant u_p$ (u_s est le plus grand terme de la suite plus petit que n). Ainsi :
    $$u_p \leqslant u_s < n < u_{p+1}$$
    Ceci n'est possible que si $p = s$ (u_s ne peut être strictement compris entre deux termes consécutifs de la suite (u_n)). On écrit alors :
    $$n = u_s + (n - u_s)$$
    et on remarque que :
    $$n - u_s < u_{p+1} - u_s = u_{p+1} - u_p = u_{p-1} \leqslant u_p$$
    On applique alors l'hypothèse de récurrence à l'entier $n - u_s \in [\![1, u_p]\!]$.
    ($n - u_s \geqslant 1$ car le cas $n = u_s$ a déjà été traité)
    L'entier $n - u_s$ admet une unique Z-décomposition. Ce qui signifie qu'il existe un unique r-uplet $(k_1, \ldots, k_r)$ vérifiant les propriétés de la question ***8.*** tel que :
    $$n - u_s = u_{k_1} + \ldots + u_{k_r}$$

Et ainsi :

$$n = u_{k_1} + \ldots + u_{k_r} + u_s$$

Il faut alors démontrer que cette écriture est bien une Z-décomposition. Il s'agit de démontrer que : $k_r - s \geqslant 2$. Supposons par l'absurde que tel n'est pas le cas.
Alors $k_r \in \{s-1, s\}$. Et ainsi :

$$n \geqslant u_{k_r} + u_s \geqslant u_{s-1} + u_s = u_{s+1}$$

C'est impossible car $n < u_{s+1}$.

On en déduit que l'écriture :

$$n = u_{k_1} + \ldots + u_{k_r} + u_s$$

est bien une Z-décomposition de n.
Cette Z-décomposition est unique. En effet :

– comme n admet une Z-décomposition de taille $r+1$, toutes les Z-décompositions de n ont $r+1$ termes.
– le plus grand terme est le plus grand élément de (u_n) plus petit que n.
– les r premiers éléments de la Z-décomposition sont définis de manière unique (sinon, on contredirait l'unicité de la Z-décomposition de $n - u_s$).

Finalement $\mathcal{P}(p+1)$ est vérifiée aussi dans ce cas.

$$\boxed{\text{Ainsi, par principe de récurrence : } \forall p \geqslant 2, \mathcal{P}(p).}$$

□

9. On suppose donnés un entier $p \geqslant 1$ et un vecteur `u` de $\mathbb{R}^{p-1}$ contenant les termes $u_2, u_3, \cdots, u_p$.
Compléter le programme suivant pour qu'il renvoie la Z-décomposition d'un entier `n` tel que $1 \leqslant$ `n` $\leqslant u_p$. Expliquer et justifier l'algorithme utilisé.

```
n = input('Entrez un entier n inférieur à u_p')
Decomp = []
i = p - 1
while i <> 0
  if u(i) > n then
    i = .............
  else
    Decomp = [u(i), Decomp]
    n = .............
    i = .............
  end
end
```

Démonstration.

- Le vecteur `u` contient les termes $u_2, \ldots, u_p$. C'est donc un vecteur ligne qui contient $p-1$ colonnes. Ainsi, pour tout `i` $\in [\![1, p-1]\!]$, la `i`$^{\text{ème}}$ case de `u` (autrement dit `u(i)`) contient $u_{\mathtt{i}+1}$.
- D'après la question ***8.***, pour déterminer la Z-décomposition de n, l'idée est de sélectionner le plus grand terme u_s de (u_n) plus petit que n. Puis de sélectionner le plus grand terme de (u_n) plus petit que $n - u_s$. Et ainsi de suite.
Plus précisément, on procède comme suit :

1. On détermine le plus grand élément de la Z-décomposition. Il s'agit du plus grand élément de la suite (u_n) plus petit que `n`. Autrement dit, il s'agit de trouver le plus grand indice i tel que :

$$u_i \leqslant n$$

Pour ce faire, on teste successivement (à l'aide d'une structure itérative) les éléments de `u` à partir de la fin et en descendant vers le début.

```
i = p - 1 // indice de la dernière case de u (elle contient u_p)
```

Si on tombe sur un élément tel que `u(i) > n`, on doit tester le suivant.

```
  if u(i) > n then
    i = i - 1
    // on teste successivement tous les éléments de u du dernier au premier
```

Sinon, on tombe sur un élément tel que `n <= u(i)`.
On doit alors ajouter ce terme à la décomposition :

```
  else
    Decomp = [u(i), Decomp]
    // on ajoute u(i) à la fin de la liste contenant la Z-décomposition
```

2. On doit alors continuer pour trouver une Z-décomposition de `n - u(i)`.
On met alors à jour `n`.

```
    n = n - u(i)
```

Le terme testé à la suite sera celui directement inférieur à `u(i)`.
On met alors à jour la variable `i`.

```
    i = i - 1
```

3. L'algorithme s'arrête lorsque tous les termes de `u` ont été testés.
Le dernier terme testé est celui en case 1. La variable `i` est mis à jour à 0 et on s'arrête alors. □

Prenons un peu de recul ...

- Ce résultat de décomposition est connu sous le nom de théorème de Zeckendorf. Il stipule que tout entier naturel peut être décomposé comme somme de nombres de Fibonacci non consécutifs.
- La démonstration la plus classique se réalise en deux temps.
  1) On commence par démontrer l'existence d'une Z-décomposition de n. Pour ce faire, on choisit dans la Z-décomposition u_s le plus grand élément de la suite (u_n) plus petit que n. Puis on recommence avec $n - u_s$. C'est le principe de l'algorithme.
  *(c'est l'idée développée en partie dans la question **8.c)**)*
  2) L'unicité provient du fait que la somme de tout ensemble non vide de nombres de Fibonacci distincts et non consécutifs, dont le plus grand élément est u_j, est inférieur à u_{j+1}. On le démontre par récurrence sur le nombre d'éléments d'un tel ensemble.
  *(c'est précisément le résultat **8.b)**)*

  On en déduit généralement l'unicité de la Z-décomposition en procédant par récurrence forte. On remarque que le plus grand élément d'une Z-décomposition est déterminé de manière unique (c'est le u_s défini plus haut) puis on applique l'hypothèse de récurrence à $n - u_s$.
- Ici, le concepteur semble vouloir démontrer l'unicité en montrant tout d'abord que la taille d'une Z-décomposition est unique. Puis que n se décompose de manière unique. La démonstration de ce corrigé suit cette idée même si, à première vue, elle semble un peu lourde.

Partie III. Probabilités

On effectue dans une urne qui contient des boules numérotées 0 ou 1 une suite illimitée de tirages avec remise d'une boule. À chaque tirage, la probabilité de tirer une boule numérotée 1 est p $(0 < p < 1)$ et la probabilité de tirer une boule numérotée 0 est q, avec $q = 1 - p$, et on suppose que les résultats des différents tirages sont indépendants.
On suppose que cette expérience est modélisée par un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$. On s'intéresse au nombre de tirages nécessaires pour obtenir deux boules numérotées 1 de suite, c'est-à-dire lors de deux tirages consécutifs. On définit, pour tout i de $\mathbb{N}^*$, les événements S_i : « le $i^{\text{ème}}$ tirage donne une boule numérotée 1 », et $B_i = S_i \cap S_{i+1}$.
Si au moins un des événements B_i se réalise au cours de l'expérience, on note Y la valeur de l'entier j correspondant au premier événement B_j réalisé. Sinon, c'est-à-dire si aucun des événements B_i ne se réalise, on attribue à Y la valeur 0. On admet que Y est une variable aléatoire définie sur $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$.
Par exemple, si le résultat de l'expérience est : 0, 1, 0, 0, 0, 1, 1, 0, 1, 1, 1, 0.
Alors Y prend la valeur 6.

10. a) Calculer, pour tout i de $\mathbb{N}^*$ la probabilité $\mathbb{P}(B_i)$.

Démonstration.
Soit $i \in \mathbb{N}^*$. Les tirages sont indépendants, on obtient donc :

$$\mathbb{P}(B_i) = \mathbb{P}(S_i \cap S_{i+1}) = \mathbb{P}(S_i)\mathbb{P}(S_{i+1}) = p \times p = p^2$$

$$\boxed{\forall i \in \mathbb{N}^*,\ \mathbb{P}(B_i) = p^2}$$

□

b) Déterminer $Y(\Omega)$. Calculer $\mathbb{P}([Y = 1])$, $\mathbb{P}([Y = 2])$ et $\mathbb{P}([Y = 3])$.

Démonstration.

- - L'événement $[Y = 0]$ est réalisé si et seulement si on n'obtient jamais 2 boules numérotées 1 de manière consécutive.
  - Pour tout $i \in \mathbb{N}^*$, l'événement $[Y = i]$ est réalisé si des boules numérotées 1 sont tirées consécutivement pour la première fois au $i^{\text{ème}}$ et $(i + 1)^{\text{ème}}$ tirages.

$$\boxed{\text{Donc } Y(\Omega) = \mathbb{N}.}$$

- On remarque que : $[Y = 1] = B_1$. Donc :

$$\mathbb{P}([Y = 1]) = \mathbb{P}(B_1) = p^2$$

$$\boxed{\mathbb{P}([Y = 1]) = p^2}$$

- On remarque que : $[Y = 2] = \overline{S_1} \cap S_2 \cap S_3 = \overline{S_1} \cap B_2$.
  Donc, comme les tirages sont indépendants :

$$\mathbb{P}([Y = 2]) = \mathbb{P}(\overline{S_1} \cap B_2) = \mathbb{P}(\overline{S_1})\ \mathbb{P}(B_2) = q \times p^2$$

$$\boxed{\mathbb{P}([Y = 2]) = q\,p^2}$$

- On remarque que :

$$[Y=3] = (\overline{S_1} \cap \overline{S_2} \cap S_3 \cap S_4) \cup (S_1 \cap \overline{S_2} \cap S_3 \cap S_4) = (\overline{S_1} \cap \overline{S_2} \cap B_3) \cup (S_1 \cap \overline{S_2} \cap B_3)$$

Les événements $\overline{S_1} \cap \overline{S_2} \cap B_3$ et $S_1 \cap \overline{S_2} \cap B_3$ sont incompatibles. On obtient donc :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}([Y=3]) &= \mathbb{P}(\overline{S_1} \cap \overline{S_2} \cap B_3) + \mathbb{P}(S_1 \cap \overline{S_2} \cap B_3) \\ &= \mathbb{P}(\overline{S_1})\,\mathbb{P}(\overline{S_2})\,\mathbb{P}(B_3) + \mathbb{P}(S_1)\,\mathbb{P}(\overline{S_2})\,\mathbb{P}(B_3) && \textit{(car les tirages sont indépendants)} \\ &= q \times q \times p^2 + p \times q \times p^2 \end{aligned}$$

$$\boxed{\mathbb{P}([Y=3]) = q^2\,p^2 + q\,p^3}$$

Remarque
Comme d'habitude, on raisonne sur les événements avant de passer aux probabilités. □

11. Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on note C_n, l'événement « lors des n premiers tirages, il n'apparaît jamais deux fois de suite une boule numérotée 1 ». On pose : $C_0 = \Omega$.

a) Calculer $\mathbb{P}(C_0)$, $\mathbb{P}(C_1)$ et $\mathbb{P}(C_2)$.

Démonstration.
- $C_0 = \Omega$. Donc $\mathbb{P}(C_0) = \mathbb{P}(\Omega) = 1$.
- $C_1 = \Omega$. En effet, en un seul tirage, on n'obtient jamais 2 fois une boule numérotée 1.
  Donc $\mathbb{P}(C_1) = \mathbb{P}(\Omega) = 1$
- $\overline{C_2} = B_1$. On obtient :

$$\mathbb{P}(C_2) = 1 - \mathbb{P}(\overline{C_2}) = 1 - \mathbb{P}(B_1) = 1 - p^2$$

$$\boxed{\mathbb{P}(C_0) = 1,\ \mathbb{P}(C_1) = 1 \text{ et } \mathbb{P}(C_2) = 1 - p^2}$$

□

b) Établir, pour tout n de $\mathbb{N}$, la relation : $\mathbb{P}([Y = n+2]) = p^2 q\,\mathbb{P}(C_n)$.

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}$.
L'événement $[Y = n+2]$ est réalisé si et seulement si on obtient 2 boules numérotées 1 pour la première fois aux tirages $(n+2)$ et $(n+3)$, *i.e.* :
- × on a obtenu des boules numérotées 1 au $(n+2)^{\text{ème}}$ et au $(n+3)^{\text{ème}}$ tirages,
- × on a obtenu une boule numérotée 0 au $(n+1)^{\text{ème}}$ tirage (sinon 2 boules numérotées sont obtenues consécutivement pour la première fois aux tirages $(n+1)$ et $(n+2)$),
- × on n'a jamais obtenu 2 boules numérotées 1 consécutivement lors des n premiers tirages.

On obtient donc :

$$[Y = n+2] = B_{n+2} \cap \overline{S_{n+1}} \cap C_n$$

Donc, comme les tirages sont indépendants :

$$\mathbb{P}([Y=n+2]) = \mathbb{P}(B_{n+2} \cap \overline{S_{n+1}} \cap C_n) = \mathbb{P}(B_{n+2})\ \mathbb{P}(\overline{S_{n+1}})\ \mathbb{P}(C_n) = p^2 \times q \times \mathbb{P}(C_n)$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}([Y=n+2]) = p^2\,q\,\mathbb{P}(C_n)}$$

□

12. a) En considérant les résultats possibles des deux premiers tirages, montrer, pour tout entier n supérieur ou égal à 2, l'égalité : $\mathbb{P}(C_n) = q\,\mathbb{P}(C_{n-1}) + pq\,\mathbb{P}(C_{n-2})$.

Démonstration.
Soit $n \geqslant 2$.
On applique la formule des probabilités totales sur le système complet d'événements suivant : $(S_1,\ \overline{S_1})$ On obtient alors :

$$\mathbb{P}(C_n) = \mathbb{P}(S_1 \cap C_n) + \mathbb{P}((\overline{S_1} \cap C_n)$$

- On sait que : $\mathbb{P}(\overline{S_1}) = q \neq 0$. Donc :

$$\mathbb{P}((\overline{S_1} \cap C_n) = \mathbb{P}(\overline{S_1})\,\mathbb{P}_{\overline{S_1}}(C_n) = q\,\mathbb{P}_{\overline{S_1}}(C_n) = q\,\mathbb{P}(C_{n-1})$$

  En effet, sachant que l'événement $\overline{S_1}$ est réalisé, *i.e.* sachant qu'on a obtenu une boule numéroté 0 au 1er tirage, ne jamais obtenir 2 fois de suite de boule numérotée 1 en n tirages revient à ne jamais les obtenir en $(n-1)$ tirages (les $(n-1)$ suivants).
- Pour déterminer $\mathbb{P}(S_1 \cap C_n)$, on applique la formule des probabilités totales sur le système complet d'événements $(S_2, \overline{S_2})$. On obtient :

$$\mathbb{P}(S_1 \cap C_n) = \mathbb{P}(S_1 \cap S_2 \cap C_n) + \mathbb{P}(S_1 \cap \overline{S_2} \cap C_n)$$

  - On remarque que : $S_1 \cap S_2 \cap C_n = \varnothing$. Donc $\mathbb{P}(S_1 \cap S_2 \cap C_n) = \mathbb{P}(\varnothing) = 0$.
  - On sait que, par indépendance des tirages, $\mathbb{P}(S_1 \cap \overline{S_2}) = \mathbb{P}(S_1)\,\mathbb{P}(\overline{S_2}) = p\,q \neq 0$. Donc :

$$\mathbb{P}(S_1 \cap \overline{S_2} \cap C_n) = \mathbb{P}(S_1 \cap \overline{S_2})\,\mathbb{P}_{S_1 \cap \overline{S_2}}(C_n) = p\,q\,\mathbb{P}_{S_1 \cap \overline{S_2}}(C_n) = p\,q\,\mathbb{P}(C_{n-2})$$

  En effet, sachant que l'événement $S_1 \cap \overline{S_2}$ est réalisé, *i.e.* sachant qu'on a obtenu une boule numéroté 0 au 1er tirage et une boule numérotée 0 au 2ème, ne jamais obtenir 2 fois de suite de boule numérotée 1 en n tirages revient à ne jamais les obtenir en $(n-2)$ tirages (les $(n-2)$ suivants).

$$\boxed{\text{Finalement, on a bien : } \forall n \geqslant 2,\ \mathbb{P}(C_n) = q\,\mathbb{P}(C_{n-1}) + p\,q\,\mathbb{P}(C_{n-2})}$$

□

b) Déterminer, pour tout n de $\mathbb{N}^*$ une relation entre $\mathbb{P}([Y = n+2])$, $\mathbb{P}([Y = n+1])$ et $\mathbb{P}([Y = n])$.

Démonstration.
- Soit $n \geqslant 2$.

$$\begin{array}{rcll} \mathbb{P}([Y = n+2]) & = & p^2\,q\,\mathbb{P}(C_n) & \textit{(d'après } \textbf{\textit{11.b)}}\textit{)} \\ & = & p^2\,q\,(q\,\mathbb{P}(C_{n-1}) + p\,q\,\mathbb{P}(C_{n-2})) & \textit{(d'après } \textbf{\textit{12.a)}}\textit{, car } n \geqslant 2\textit{)} \\ & = & p^2\,q^2\,\mathbb{P}(C_{n-1}) + p^3\,q^2\,\mathbb{P}(C_{n-2}) & \\ & = & q\,(p^2\,q\,\mathbb{P}(C_{n-1})) + p\,q\,(p^2\,q\mathbb{P}(C_{n-2})) & \\ & = & q\,\mathbb{P}([Y = n+1]) + p\,q\,\mathbb{P}([Y = n]) & \textit{(d'après } \textbf{\textit{11.b)}}\textit{)} \end{array}$$

- Vérifions que cette égalité est toujours vraie pour $n = 1$.
  D'après la question ***10.b)***, on a :

$$q\,\mathbb{P}([Y = 2]) + p\,q\,\mathbb{P}([Y = 1]) = q^2\,p^2 + q\,p^3 = \mathbb{P}([Y = 3])$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \mathbb{P}([Y = n+2]) = q\,\mathbb{P}([Y = n+1]) + p\,q\,\mathbb{P}([Y = n])}$$

□

13. On suppose dans cette question que $p = q = \frac{1}{2}$.

a) Montrer que, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on a : $\mathbb{P}([Y = n]) = \dfrac{u_n}{2^{n+1}}$ où la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a été définie dans le préambule du problème.

Démonstration.
On veut montrer que la suite définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \ v_n = 2^{n+1}\ \mathbb{P}([Y = n])$$

vérifie les relations suivantes :

$$\begin{cases} v_1 = u_1 \\ v_2 = u_2 \\ \forall n \in \mathbb{N}^*, \ v_{n+2} = v_{n+1} + v_n \end{cases}$$

- $v_1 = 2^2\ \mathbb{P}([Y = 1]) = 4 \times \left(\dfrac{1}{2}\right)^2 = 1 = u_1$, d'après la question ***10.b)***.
- $v_2 = 2^3\ \mathbb{P}([Y = 2]) = 8 \times \left(1 - \dfrac{1}{2}\right)\left(\dfrac{1}{2}\right)^2 = 1 = u_2$, toujours d'après la question ***10.b)***.
- Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{array}{rcll} v_{n=2} & = & 2^{(n+2)+1}\ \mathbb{P}([Y = n+2]) & \textit{(par définition de } (v_n)\textit{)} \\ & = & 2^{n+3}\left(\dfrac{1}{2}\ \mathbb{P}([Y = n+1]) + \dfrac{1}{4}\ \mathbb{P}([Y = n])\right) & \textit{(d'après } \textbf{\textit{12.b)}}\textit{)} \\ & = & 2^{n+2}\ \mathbb{P}([Y = n+1]) + 2^{n+1}\ \mathbb{P}([Y = n]) & \\ & = & 2^{(n+1)+1}\ \mathbb{P}([Y = n+1]) + 2^{n+1}\ \mathbb{P}([Y = n]) & \\ & = & v_{n+1} + v_n & \textit{(par définition de } (v_n)\textit{)} \end{array}$$

Donc : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = u_n$, *i.e.* :

$$2^{n+1}\ \mathbb{P}([Y = n]) = u_n$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \mathbb{P}([Y = n]) = \dfrac{u_n}{2^{n+1}}}$$

□

b) Que vaut $\mathbb{P}([Y = 0])$?

Démonstration.
La famille $([Y = n])_{n\in\mathbb{N}^*}$ est un système complet d'événements. On obtient donc :

$$\begin{array}{rcll} \mathbb{P}([Y = 0]) & = & 1 - \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}([Y = n]) & \\ & = & 1 - \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{u_n}{2^{n+1}} & \\ & = & 1 - 1 & \textit{(d'après } \textbf{\textit{5.c)}}\textit{)} \\ & = & 0 & \end{array}$$

$$\boxed{\mathbb{P}([Y = 0]) = 0}$$

□

c) On note $\mathbb{E}(Y)$ l'espérance de Y. Montrer que $\mathbb{E}(Y) = 5$.

Démonstration.

- La v.a.r. Y admet une espérance ssi la série $\sum n\,\mathbb{P}([Y=n])$ est absolument convergente.
  Cette série étant à termes positifs, cela revient à démontrer qu'elle est convergente.
- Soit $N \geqslant 1$.

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{N} k\ \mathbb{P}([Y=k]) &= \sum_{k=1}^{N} k\ \frac{u_k}{2^{k+1}} \\
&= \sum_{k=1}^{N} \frac{k}{2^{k+1}} \frac{1}{\sqrt{5}}(a^k - b^k) && \textit{(d'après } \textbf{2.a)}\textit{)} \\
&= \frac{a}{4\sqrt{5}} \sum_{k=1}^{N} k\ \left(\frac{a}{2}\right)^{k-1} - \frac{b}{4\sqrt{5}} \sum_{k=1}^{N} k\ \left(\frac{b}{2}\right)^{k-1}
\end{aligned}$$

- On reconnaît les sommes partielles d'ordre N de séries géométriques dérivées de raisons $\frac{a}{2}$ et $\frac{b}{2}$ avec $\left|\frac{a}{2}\right| < 1$ et $\left|\frac{b}{2}\right| < 1$.
  Donc elles convergent.
  Donc Y admet une espérance.
- Commençons par calculer $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} k\left(\frac{a}{2}\right)^{k-1}$.

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{+\infty} k\left(\frac{a}{2}\right)^{k-1} &= \frac{1}{(1-\frac{a}{2})^2} = \frac{4}{(2-a)^2} \\
&= \frac{4}{\left(2 - \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2} = \frac{4^2}{(4-(1+\sqrt{5}))^2} \\
&= \frac{4^2}{(3-\sqrt{5})^2} = \frac{4^2\,(3+\sqrt{5})^2}{(3-\sqrt{5})^2(3+\sqrt{5})^2} \\
&= \frac{4^2\,(3+\sqrt{5})^2}{\left((3-\sqrt{5})(3+\sqrt{5})\right)^2} = \frac{4^2\,(3+\sqrt{5})^2}{(9-5)^2} \\
&= \frac{\cancel{4^2}\,(3+\sqrt{5})^2}{\cancel{4^2}} = 14 + 6\sqrt{5}
\end{aligned}$$

De même : $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} k\ \left(\frac{b}{2}\right)^{k-1} = 14 - 6\sqrt{5}$.

- On obtient alors :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(Y) &= \frac{a}{4\sqrt{5}}(14+6\sqrt{5}) - \frac{b}{4\sqrt{5}}(14-6\sqrt{5}) \\
&= \frac{1+\sqrt{5}}{4\sqrt{5}}(7+3\sqrt{5}) - \frac{1-\sqrt{5}}{4\sqrt{5}}(7-3\sqrt{5}) \\
&= \frac{\cancel{22}+10\sqrt{5}}{4\sqrt{5}} - \frac{\cancel{22}-10\sqrt{5}}{4\sqrt{5}} = \frac{20\cancel{\sqrt{5}}}{4\cancel{\sqrt{5}}} = 5
\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathbb{E}(Y) = 5}$$

Remarque
On pouvait remarquer directement que Y admettait une espérance :
La v.a.r. Y admet une espérance ssi la série $\sum n\,\mathbb{P}([Y=n])$ est absolument convergente.

Cette série étant à termes positifs, cela revient à démontrer qu'elle est convergente.

On veut donc montrer que $\sum n\ \mathbb{P}([Y=n])$ est convergente, *i.e.* $\sum n\ \dfrac{u_n}{2^{n+1}}$ est convergente.
C'est effectivement le cas d'après la question ***5.b)*** appliquée à $k=1$.
Donc Y admet une espérance.
Cependant comme l'énoncé demandait la valeur de $\mathbb{E}(Y)$, autant se lancer directement dans le calcul de celle-ci.

□

d) Calculer la variance $\mathbb{V}(Y)$ de Y.

Démonstration.
- La v.a.r. Y admet une variance ssi la série $\sum n^2\,\mathbb{P}([Y=n])$ est absolument convergente.

  Cette série étant à termes positifs, cela revient à démontrer qu'elle est convergente.
- Soit $N \geqslant 1$.

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{N} k^2\ \mathbb{P}([Y=k]) &= \sum_{k=1}^{N} k^2\ \frac{u_k}{2^{k+1}} \\
&= \sum_{k=1}^{N} \frac{k^2}{2^{k+1}} \frac{1}{\sqrt{5}}(a^k - b^k) && \textit{(d'après } \textbf{\textit{2.a)}}\textit{)} \\
&= \frac{1}{2\sqrt{5}} \left(\sum_{k=1}^{N} k^2 \left(\frac{a}{2}\right)^k - \sum_{k=1}^{N} k^2 \left(\frac{b}{2}\right)^k \right) \\
&= \frac{1}{2\sqrt{5}} \left(\sum_{k=1}^{N} k(k-1) \left(\frac{a}{2}\right)^k + \sum_{k=1}^{N} k \left(\frac{a}{2}\right)^k \right. \\
&\qquad \left. - \sum_{k=1}^{N} k(k-1) \left(\frac{b}{2}\right)^k - \sum_{k=1}^{N} k \left(\frac{b}{2}\right)^k \right) \\
&= \frac{1}{4\sqrt{5}} \left(\frac{a^2}{2} \sum_{k=1}^{N} k(k-1) \left(\frac{a}{2}\right)^{k-2} + a \sum_{k=1}^{N} k \left(\frac{a}{2}\right)^{k-1} \right. \\
&\qquad \left. - \frac{b^2}{2} \sum_{k=1}^{N} k(k-1) \left(\frac{b}{2}\right)^{k-2} - b \sum_{k=1}^{N} k \left(\frac{b}{2}\right)^{k-1} \right)
\end{aligned}$$

- On reconnaît les sommes partielles d'ordre N de séries géométriques dérivées et dérivées seconde de raisons $\dfrac{a}{2}$ et $\dfrac{b}{2}$ avec $\left|\dfrac{a}{2}\right| < 1$ et $\left|\dfrac{b}{2}\right| < 1$.
  Donc elles convergent.
  Donc Y admet une variance.
- Déterminons $\mathbb{E}(Y^2)$.
  - On sait déjà que :

$$\frac{a}{4\sqrt{5}} \sum_{k=1}^{+\infty} k\ \left(\frac{a}{2}\right)^{k-1} - \frac{b}{4\sqrt{5}} \sum_{k=1}^{+\infty} k\ \left(\frac{b}{2}\right)^{k-1} = \mathbb{E}(Y) = 5$$

- Calculons $\sum\limits_{k=2}^{+\infty} k(k-1)\left(\frac{a}{2}\right)^{k-2}$.

$$\begin{aligned}
\sum_{k=2}^{+\infty} k(k-1)\left(\frac{a}{2}\right)^{k-2} &= \frac{2}{(1-\frac{a}{2})^3} = \frac{16}{(2-a)^3} \\
&= \frac{2^4}{\left(2-\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^3} = \frac{2^7}{(4-(1+\sqrt{5}))^3} \\
&= \frac{2^7}{(3-\sqrt{5})^3} = \frac{2^7\,(3+\sqrt{5})^3}{(3-\sqrt{5})^3(3+\sqrt{5})^3} \\
&= \frac{2^7\,(3+\sqrt{5})^3}{((3-\sqrt{5})(3+\sqrt{5}))^3} = \frac{2^7(3+\sqrt{5})^3}{(9-5)^3} \\
&= \frac{2^7(3+\sqrt{5})^3}{4^3} = \frac{2^7(3+\sqrt{5})^3}{2^6} \\
&= 2(3+\sqrt{5})^3 = 2(72+32\sqrt{5}) = 2^4\,(9+4\sqrt{5})
\end{aligned}$$

De même : $\sum\limits_{k=2}^{+\infty} k(k-1)\left(\frac{a}{2}\right)^{k-2} = 2^4\,(9-4\sqrt{5})$.

- On obtient alors :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(Y^2) &= \frac{a^2}{2^3\sqrt{5}}\,2^4\,(9+4\sqrt{5}) - \frac{b^2}{2^3\sqrt{5}}2^4\,(9-4\sqrt{5}) + \mathbb{E}(Y) \\
&= 2\,\frac{(1+\sqrt{5})^2}{4\sqrt{5}}(9+4\sqrt{5}) - 2\,\frac{(1-\sqrt{5})^2}{4\sqrt{5}}(9-4\sqrt{5}) + 5 \\
&= \frac{\cancel{94}+42\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} - \frac{\cancel{94}-42\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} + 5 \\
&= \frac{42\cancel{\sqrt{5}}}{2\cancel{\sqrt{5}}} + \frac{42\cancel{\sqrt{5}}}{2\cancel{\sqrt{5}}} + 5 \;=\; 42+5 = 47
\end{aligned}$$

- D'après la formule de Koenig-Huyghens :

$$\mathbb{V}(Y) = \mathbb{E}(Y^2) - (\mathbb{E}(Y))^2 = 47 - 5^2 = 47 - 25 = 22$$

$$\boxed{\mathbb{V}(Y) = 22}$$

Remarque
Là encore, on pouvait directement montrer l'existence de $\mathbb{V}(Y)$ grâce à la question ***5.b)***. □

14. On revient au cas général : $0 < p < 1$ et $q = 1-p$.

a) Montrer que l'équation du second degré $x^2 - qx - pq = 0$ admet deux racines distinctes. On les note r et s, avec $r > s$.

Démonstration.
Le discriminant du polynôme $X^2 - q\,X - p\,q$ est :

$$\Delta = (-q)^2 - 4\times 1\times(-p\,q) = q^2 + 4\,p\,q > 0$$

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{L'équation } x^2 - q\,x - p\,q = 0 \text{ admet deux solutions distinctes :} \\ r = \dfrac{q+\sqrt{\Delta}}{2} \text{ et } s = \dfrac{q-\sqrt{\Delta}}{2}\ (r > s)\end{array}}$$

□

b) Établir les inégalités suivantes : $-1 < s < 0 < r < 1$ et $r > |s|$.

Démonstration.
On définit la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \ f(x) = x^2 - q\,x - pq$$

La fonction f est polynomiale de degré 2, de coefficient dominant positif. On obtient donc le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$	s	0	$\frac{q}{2}$	r	$+\infty$
Variations de f	$+\infty$	0	$-pq$	$f(\frac{q}{2})$	0	$+\infty$

- La fonction f est :
  × continue sur $]-\infty, \frac{q}{2}[$ (car c'est une fonction polynomiale)
  × strictement décroissante sur $]-\infty, \frac{q}{2}[$
  Ainsi f réalise une bijection de $]-\infty, \frac{q}{2}]$ sur $f(]-\infty, \frac{q}{2}]) = [f(\frac{q}{2}), +\infty[$. On note g sa réciproque.
- De même, la fonction f réalise une bijection de $[\frac{q}{2}, +\infty[$ sur $[f(\frac{q}{2}), +\infty[$. On note h sa réciproque.
- On note que : $f(-1) = (-1)^2 - q(-1) - pq = 1 + q - pq = 1 + q(1-p) = 1 + q^2 > 0$ et $f(0) = -pq < 0$.
  De plus $f(s) = 0$ (d'après ***14.a)***). Ainsi :

$$f(0) < f(s) < f(-1)$$

  Donc, par stricte décroissance de g, on obtient : $-1 < s < 0$.
- De même, comme $f(1) = 1 - q - pq = p - pq = p(1-q) = p^2 > 0$, on obtient :

$$f(0) < f(r) < f(1)$$

  Par stricte croissance de h, on obtient : $0 < r < 1$.

$$\boxed{-1 < s < 0 < r < 1}$$

- On sait que $s < 0$. Donc $|s| = -s$.
  On remarque de plus que $r + s = q$ (simple calcul). Donc $r + s > 0$, *i.e.* $r > -s$.

$$\boxed{r > |s|}$$

□

c) On pose $\Delta = q^2 + 4pq$. Montrer que, pour tout n de $\mathbb{N}^*$ on a : $\mathbb{P}([Y = n]) = \dfrac{p^2}{\sqrt{\Delta}} (r^n - s^n)$.

Démonstration.
On note : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $w_n = \mathbb{P}([Y = n])$.
D'après la question ***12.b)***, on sait que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \ w_{n+2} - q\,w_{n+1} - p\,q\,w_n = 0$$

Donc (w_n) est une suite récurrente linéaire d'ordre 2.

- L'équation caractéristique associée à la suite (w_n) est : $x^2 - q\,x - pq = 0$.
  Notons Q le polynôme : $Q(X) = X^2 - q\,X - 1$.
  Ce polynôme admet deux racines disctinctes : r et s.
- On en déduit la formule explicite de (w_n) : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ w_n = \lambda \times r^n + \mu \times s^n$
  où les valeurs λ et μ sont données par le système :

$$(S) \left\{ \begin{array}{rcrcl} r\,\lambda & + & s\,\mu & = & p^2 \qquad \textit{(valeur de } w_1\textit{)} \\ r^2\,\lambda & + & s^2\,\mu & = & qp^2 \qquad \textit{(valeur de } w_2\textit{)} \end{array} \right.$$

  Résolvons-le.

$$(S) \overset{L_2 \leftarrow L_2 - r\,L_1}{\Longleftrightarrow} \left\{ \begin{array}{rcrcl} r\,\lambda & + & s\,\mu & = & p^2 \\ & & s(s-r)\,\mu & = & p^2(q-r) \end{array} \right.$$

  Notons que : $s - r \ = \ \dfrac{q-\sqrt{\Delta}}{2} - \dfrac{q+\sqrt{\Delta}}{2} \ = \ -\sqrt{\Delta}$,
  et que : $q - r \ = \ \dfrac{2q - q - \sqrt{\Delta}}{2} \ = \ \dfrac{q-\sqrt{\Delta}}{2} = s$.
  On en déduit que : $\mu = -\dfrac{p^2}{\sqrt{\Delta}}$.
  Ainsi, on obtient :

$$\left\{ \begin{array}{rcrcl} r\,\lambda & + & s\,\mu & = & p^2 \\ & & s(s-r)\,\mu & = & p^2(q-r) \end{array} \right. \overset{L_2 \leftarrow -\frac{1}{\sqrt{\Delta}}L_2}{\Longleftrightarrow} \left\{ \begin{array}{rcrcl} r\,\lambda & + & s\,\mu & = & p^2 \\ & & s\,\mu & = & -s\,\dfrac{p^2}{\sqrt{\Delta}} \end{array} \right.$$

$$\overset{L_1 \leftarrow L_1 - L_2}{\Longleftrightarrow} \left\{ \begin{array}{rcrcl} r\,\lambda & + & & = & p^2 + s\,\dfrac{p^2}{\sqrt{\Delta}} \\ & & s\,\mu & = & -s\,\dfrac{p^2}{\sqrt{\Delta}} \end{array} \right.$$

  Notons enfin que :

$$p^2 + \frac{p^2}{\sqrt{\Delta}} = \frac{p^2}{\sqrt{\Delta}}(\sqrt{\Delta} - s) = \frac{p^2}{\sqrt{\Delta}}\,\frac{2\sqrt{\Delta} + q - \sqrt{\Delta}}{2} = \frac{p^2}{\sqrt{\Delta}}\,\frac{q+\sqrt{\Delta}}{2} = \frac{p^2}{\sqrt{\Delta}}\,r$$

  Donc $\lambda = \dfrac{p^2}{\sqrt{\Delta}}$.
- Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$w_n = \frac{p^2}{\sqrt{\Delta}}\,r^n - \frac{p^2}{\sqrt{\Delta}}\,s^n$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \mathbb{P}([Y = n]) = \frac{p^2}{\sqrt{\Delta}}(r^n - s^n).}$$

□

d) Calculer $\mathbb{P}([Y = 0])$.

Démonstration.
La famille $([Y = n])_{n\in\mathbb{N}^*}$ est un système complet d'événements. On obtient donc :

$$\mathbb{P}([Y=0]) \ = \ 1 - \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}([Y=n]) \ = \ 1 - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{p^2}{\sqrt{\Delta}}(r^n - s^n) \ = \ 1 - \frac{p^2}{\sqrt{\Delta}} \sum_{n=1}^{+\infty} (r^n - s^n)$$

- On reconnaît les sommes de séries géométriques de raison r et s avec $|r| < 1$ et $|s| < 1$ (d'après la question ***14.b)***).
  Donc elles convergent.
- On obtient alors :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}([Y=0]) &= 1 - \frac{p^2}{\sqrt{\Delta}} \left(\frac{1}{1-r} - \cancel{1} - \frac{1}{1-s} + \cancel{1} \right) \\ &= 1 - \frac{p^2}{\sqrt{\Delta}} \frac{\cancel{1} - s - \cancel{1} + r}{(1-r)(1-s)} \\ &= 1 - \frac{p^2}{\cancel{\sqrt{\Delta}}} \frac{\cancel{r-s}}{(1-r)(1-s)}\end{aligned}$$

- Calculons $(1-r)(1-s)$:

$$\begin{aligned}(1-r)(1-s) &= \left(1 - \frac{q+\sqrt{\Delta}}{2}\right)\left(1 - \frac{q-\sqrt{\Delta}}{2}\right) \\ &= \left(\frac{2-q-\sqrt{\Delta}}{2}\right)\left(\frac{2-q+\sqrt{\Delta}}{2}\right) \\ &= \frac{1}{4}\left((2-q)-\sqrt{\Delta}\right)\left((2-q)+\sqrt{\Delta}\right) \\ &= \frac{1}{4}\left((2-q)^2-\Delta\right) \ = \ \frac{4-4q+q^2-\Delta}{4} \\ &= \frac{4(1-q)+\cancel{q^2}-(\cancel{q^2}+4pq)}{4} \\ &= \frac{\cancel{4}p-\cancel{4}pq}{\cancel{4}} = p(1-q) = p^2\end{aligned}$$

- Finalement, on obtient donc :

$$\mathbb{P}([Y=0]) = 1 - \frac{\cancel{p^2}}{\cancel{p^2}} = 1 - 1 = 0$$

$$\boxed{\mathbb{P}([Y=0]) = 0}$$

□

e) Montrer que Y admet des moments de tous ordres et calculer l'espérance de Y.

Démonstration.

- Soit $k \in \mathbb{N}^*$.
  La variable aléatoire Y admet un moment d'ordre k si et seulement si la série $\sum n^k \, \mathbb{P}([Y=n])$ est absolument convergente.
  Or, pour tout $N \geqslant 1$, on note que :

$$\sum_{n=1}^{N} |n^k \mathbb{P}([Y=n])| = \sum_{n=1}^{N} n^k \left| \frac{p^2}{\sqrt{\Delta}}(r^n - s^n) \right| = \frac{p^2}{\sqrt{\Delta}} \sum_{n=1}^{N} n^k |r^n - s^n|$$

Or, par inégalité triangulaire, on sait que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \ |r^n - s^n| \leqslant r^n + s^n$$

Donc :

$$\sum_{n=1}^{N} |n^k \mathbb{P}([Y=n])| \leqslant \frac{p^2}{\sqrt{\Delta}} \left(\sum_{n=1}^{N} n^k\, r^n + \sum_{n=1}^{N} n^k\, s^n \right)$$

- On sait de plus que $|r| < 1$ et $|s| < 1$, donc, d'après la question ***5.a)***, les séries $\sum\limits_{n\geqslant 1} n^k\, r^n$ et $\sum\limits_{n\geqslant 1} n^k\, s^n$ convergent.
- La suite $\left(\sum\limits_{n=1}^{N} |n^k \mathbb{P}([Y=n])| \right)_{N\geqslant 1}$ est donc :
  $\times$ croissante (car c'est une somme de termes positifs),
  $\times$ majorée (par $\dfrac{p^2}{\sqrt{\Delta}} \left(\sum\limits_{n=1}^{+\infty} n^k\, r^n + \sum\limits_{n=1}^{+\infty} n^k\, s^n \right)$)

  Donc elle converge, *i.e.* $\sum n^k\, \mathbb{P}([Y=n])$ converge absolument.

  Ceci est de plus vrai pour tout $k \geqslant 1$.

  $\boxed{\text{La v.a.r. } Y \text{ admet des moments à tout ordre.}}$
- Déterminons alors l'espérance de Y.
  - Soit $N \geqslant 1$.

$$\begin{array}{rcll} \sum\limits_{k=1}^{N} k\ \mathbb{P}([Y=k]) & = & \dfrac{p^2}{\sqrt{\Delta}} \sum\limits_{k=1}^{N} k(r^k - s^k) & \textit{(d'après } \textbf{\textit{14.c)}}\textit{)} \\ & = & \dfrac{r\,p^2}{\sqrt{\Delta}} \sum\limits_{k=1}^{N} k\, r^{k-1} - \dfrac{s\,p^2}{\sqrt{\Delta}} \sum\limits_{k=1}^{N} k\, s^{k-1} & \end{array}$$

  - On reconnaît les sommes partielles d'ordre N de séries géométriques dérivées de raisons r et s avec $|r| < 1$ et $|s| < 1$.
  - Commençons par calculer $\dfrac{r\,p^2}{\sqrt{\Delta}} \sum\limits_{k=1}^{+\infty} k r^{k-1}$.

$$\begin{array}{rcl} \dfrac{r\,p^2}{\sqrt{\Delta}} \sum\limits_{k=1}^{+\infty} k\, r^{k-1} & = & \dfrac{r\,p^2}{\sqrt{\Delta}} \dfrac{1}{(1-r)^2} \ = \ \dfrac{p^2}{\sqrt{\Delta}} \dfrac{\frac{q+\sqrt{\Delta}}{2}}{\left(1 - \frac{q+\sqrt{\Delta}}{2}\right)^2} \\ & = & \dfrac{2p^2}{\sqrt{\Delta}} \dfrac{q+\sqrt{\Delta}}{\left(2-q-\sqrt{\Delta}\right)^2} \\ & = & \dfrac{2p^2}{\sqrt{\Delta}} \dfrac{(q+\sqrt{\Delta})(2-q+\sqrt{\Delta})^2}{\left(2-q-\sqrt{\Delta}\right)^2 \left(2-q+\sqrt{\Delta}\right)^2} \\ & = & \dfrac{2p^2}{\sqrt{\Delta}} \dfrac{(q+\sqrt{\Delta})(2-q+\sqrt{\Delta})^2}{\left((2-q-\sqrt{\Delta})(2-q+\sqrt{\Delta})\right)^2} \\ & = & \dfrac{2p^2}{\sqrt{\Delta}} \dfrac{(q+\sqrt{\Delta})(2-q+\sqrt{\Delta})^2}{\left((2-q)^2-\Delta\right)^2} \\ & = & \dfrac{2p^2}{\sqrt{\Delta}} \dfrac{(q+\sqrt{\Delta})(2-q+\sqrt{\Delta})^2}{(4p^2)^2} \ = \ \dfrac{(q+\sqrt{\Delta})(2-q+\sqrt{\Delta})^2}{8\,p^2\,\sqrt{\Delta}} \end{array}$$

Notons de plus que :

$$\begin{aligned}(q+\sqrt{\Delta})(2-q+\sqrt{\Delta})^2 &= (q+\sqrt{\Delta})(4+q^2+\Delta-4q+4\sqrt{\Delta}-2q\sqrt{\Delta}) \\ &= (4q-4q^2+q^3+5\Delta-2q\Delta)+(4+\Delta-q^2)\sqrt{\Delta}\end{aligned}$$

Finalement, on a :

$$\frac{r\,p^2}{\sqrt{\Delta}} \sum_{k=1}^{+\infty} k\,r^{k-1} = \frac{(4q-4q^2+q^3+5\Delta-2q\Delta)+(4+\Delta-q^2)\sqrt{\Delta}}{8\,p^2\sqrt{\Delta}}$$

De même :

$$\frac{s\,p^2}{\sqrt{\Delta}} \sum_{k=1}^{+\infty} k\,s^{k-1} = \frac{(4q-4q^2+q^3+5\Delta-2q\Delta)-(4+\Delta-q^2)\sqrt{\Delta}}{8\,p^2\sqrt{\Delta}}$$

- On obtient alors :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(Y) &= \frac{r\,p^2}{\sqrt{\Delta}} \sum_{k=1}^{+\infty} k\,r^{k-1} - \frac{s\,p^2}{\sqrt{\Delta}} \sum_{k=1}^{+\infty} k\,s^{k-1} \\ &= 2\,\frac{(4+\Delta-q^2)\cancel{\sqrt{\Delta}}}{8p^2\cancel{\sqrt{\Delta}}} \\ &= \frac{4+(\cancel{q^2}+4pq)-\cancel{q^2}}{4p^2} \\ &= \frac{\cancel{4}(1+pq)}{\cancel{4}p^2} = \frac{1+pq}{p^2}\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathbb{E}(Y) = \frac{1+pq}{p^2}}$$

□

15. a) Montrer, pour tout réel x vérifiant $|x| < \dfrac{1}{r}$, la convergence de la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \mathbb{P}([Y=n])\,x^n$.

On pose alors : $g(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}([Y=n])\,x^n$.

Démonstration.
Montrons que la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \mathbb{P}([Y=n])\,x^n$ est absolument convergente, *i.e.* que la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} |\mathbb{P}([Y=n])x^n|$ est convergente.

- Soit $n \geqslant 1$.

$$\begin{aligned}0 \leqslant |\mathbb{P}([Y=n])x^n| &= \left|\frac{p^2}{\sqrt{\Delta}}(r^n-s^n)x^n\right| \\ &= \frac{p^2}{\sqrt{\Delta}}\,|(rx)^n-(sx)^n| \\ &\leqslant \frac{p^2}{\sqrt{\Delta}}\,(|rx|^n+|sx|^n)\end{aligned}$$

- On sait donc que :
  - × $\forall n \in \mathbb{N}^*, |\mathbb{P}([Y=n])x^n| \leqslant \dfrac{p^2}{\sqrt{\Delta}}(|rx|^n + |sx|^n)$
  - × Les séries $\sum\limits_{n\geqslant 1} |rx|^n$ et $\sum\limits_{n\geqslant 1} |sx|^n$ sont des séries géométriques de raison $|rx| = r|x| < r\,\dfrac{1}{r} = 1$, et $|sx| = |s| \times |x| < r|x| < r\,\dfrac{1}{r} = 1$ (d'après la question ***14.a)***)

    Donc elles convergent. Donc leur somme converge.

  Par critère de comparaison de séries à termes positifs, $\sum\limits_{n\geqslant 1} |\mathbb{P}([Y=n])x^n|$ converge.

  Donc $\sum\limits_{n\geqslant 1} \mathbb{P}([Y=n])x^n$ est une série absolument convergente, donc convergente.

$$\boxed{\text{La série } \sum_{n\geqslant 1} \mathbb{P}([Y=n])x^n \text{ converge}}$$

□

b) Établir, pour tout réel x vérifiant $|x| < \dfrac{1}{r}$, la formule suivante : $g(x) = \dfrac{p^2 x}{1 - qx - pqx^2}$.

Démonstration.
Soit $x \in \mathbb{R}$ tel que $|x| < \dfrac{1}{r}$.

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}([Y=k])\,x^k &= \frac{p^2}{\sqrt{\Delta}} \sum_{k=1}^{+\infty} \left((rx)^k - (sx)^k\right) \\
&= \frac{p^2}{\sqrt{\Delta}} \left(\frac{1}{1-rx} - \cancel{1} - \frac{1}{1-sx} + \cancel{1}\right) \\
&= \frac{p^2}{\sqrt{\Delta}} \left(\frac{\cancel{1} - sx - \cancel{1} + rx}{(1-rx)(1-sx)}\right) \\
&= \frac{p^2}{\sqrt{\Delta}} \, \frac{(r-s)\,x}{1 - (r+s)\,x + rs\,x}
\end{aligned}$$

On remarque de plus que, par définition de r et s, on a :

$$X^2 - q\,X - pq = (X-r)(X-s) = X^2 - (r+s) + rs$$

Donc par identification :

$$r + s = q \qquad \text{et} \qquad rs = -pq$$

On avait déjà calculé que $r - s = \sqrt{\Delta}$. On obtient alors :

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}([Y=k])x^k = \frac{p^2}{\cancel{\sqrt{\Delta}}} \, \frac{\cancel{\sqrt{\Delta}}\, x}{1 - q\,x - pq\,x^2}$$

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R} \text{ tel que } |x| < \frac{1}{r},\ g(x) = \frac{p^2\,x}{1 - q\,x - pq\,x^2}}$$

Remarque
On utilise ici une nouvelle fois les relations coefficients / racines sur le polynôme $X^2 - q\,X - pq$.

□

16. On suppose dans cette question que $p = \frac{2}{3}$.

a) Étudier les variations de la fonction g sur l'intervalle $I = \left]-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right[$.

Démonstration.

- Comme $p = \dfrac{2}{3}$, on obtient l'expression de g suivante :

$$g(x) = \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^2 x}{1 - \frac{1}{3}x - \frac{1}{3}\frac{2}{3}x^2} = \frac{4\,x}{9 - 3\,x - 2\,x^2}$$

- Le discriminant du polynôme $-2X^2 - 3X + 9$ est : $\Delta = (-3)^2 - 4 \times (-2) \times 9 = 81 > 0$.
  Donc il admet deux racines distinctes :

$$r = \frac{3 - \sqrt{81}}{2 \times (-2)} = -\frac{3-9}{4} = \frac{3}{2} \quad \text{et} \quad s = \frac{3 + \sqrt{81}}{2 \times (-2)} = -3$$

  Donc, pour tout $x \in \left]-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right[$, $9 - 3x - 2x^2 \neq 0$.

- La fonction g est donc dérivable sur I en tant que quotient de fonctions dérivables dont le dénominateur ne s'annule pas.
  Soit $x \in I$.

$$g'(x) = \frac{4(9 - 3x - 2x^2) - 4x(-3 - 4x)}{(9 - 3x - 2x^2)^2} = \frac{36 + 8x^2}{(9 - 3x - 2x^2)^2} > 0$$

  On obtient le tableau de variations suivant :

x	$-\frac{3}{2}$ $\qquad$ $\frac{3}{2}$
Signe de $g'(x)$	$+$
Variations de g	$-\frac{2}{3}$ $\nearrow$ $+\infty$

$$\boxed{\text{La fonction } g \text{ est strictement croissante sur } I.}$$

□

b) Montrer l'existence d'un unique réel α de $\left]-\frac{1}{2}, 0\right[$ tel que g soit concave sur l'intervalle $\left]-\frac{3}{2}, \alpha\right[$ et convexe sur l'intervalle $\left]\alpha, \frac{3}{2}\right[$.

Démonstration.

- g est de classe $\mathcal{C}^2$ sur I en tant que quotient de fonctions de classe $\mathcal{C}^2$ sur I dont le dénominateur ne s'annule pas.
  Pour déterminer la concavité de g, on souhaite déterminer le signe de g''.
- Soit $x \in I$;

$$\begin{aligned} g''(x) &= 16\,x\frac{1}{(9 - 3x - 2x^2)^2} + (36 + 8x^2)\frac{-2(-3 - 4x)}{(9 - 3x - 2x^2)^3} \\ &= \frac{16x(9 - 3x - 2x^2) + 2(3 + 4x)(36 + 8x^2)}{(9 - 3x - 2x^2)^3} \\ &= 8\frac{4x^3 + 54x + 27}{(9 - 3x - 2x^2)^3} \end{aligned}$$

On sait déjà que :

× $8 > 0$

× $9 - 3x - 2x^2 > 0$ car c'est un polynôme de degré 2 de coefficient dominant négatif, admettant deux racines -3 et $\dfrac{3}{2}$. Donc il est de signe positif sur $[-3, \frac{3}{2}]$.

Donc en particulier, il est strictement positif sur I.

- Déterminons le signe de $h : x \mapsto 4x^3 + 54x + 27$ sur I.

- La fonction h est dérivable sur I car c'est une fonction polynomiale.
- Soit $x \in I$.

$$h'(x) = 12x^2 + 54 > 0$$

On obtient donc le tableau de variations suivant :

x	$-\frac{3}{2}$	$\frac{3}{2}$
Signe de $h'(x)$	$+$	
Variations de h	$-\frac{135}{2}$ $\nearrow$	$\frac{243}{2}$

- La fonction h est :

× continue sur I,

× strictement croissante sur I.

Ainsi h réalise une bijection de I sur $h(I)$.

$$h(I) = h\left(\left]-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right[\right) = \left]-\frac{135}{2}, \frac{243}{2}\right[$$

Or $0 \in h(I)$. Donc il existe un unique $\alpha \in I$ tel que $h(\alpha) = 0$.

- On obtient alors le tableau de signes suivant pour g'' :

x	$-\frac{3}{2}$		α		$\frac{3}{2}$
Signe de $9 - 3x - 2x^2$		$+$		$+$	
Signe de $(9 - 3x - 2x^2)^3$		$+$		$+$	
Signe de $h(x) = 4x^3 + 54x + 27$		$-$	0	$+$	
Signe de $g''(x)$		$-$	0	$+$	

$$\boxed{\text{Il existe un unique } \alpha \in I \text{ tel que } g \text{ est concave sur } \left]-\tfrac{3}{2}, \alpha\right[\text{ et convexe sur } \left]\alpha, \tfrac{3}{2}\right[.}$$

- Montrons que $\alpha \in \left]-\frac{1}{2}, 0\right[$.

On remarque que : $h(-\frac{1}{2}) = -\frac{1}{2} < 0$ et $h(0) = 27 > 0$.
Donc :

$$h\left(\frac{1}{2}\right) < h(\alpha) < h(0)$$

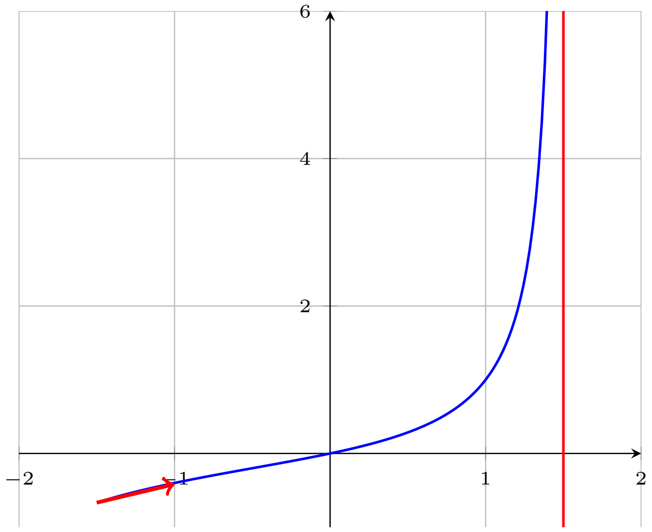
Donc, par stricte croissance de h^{-1}, on obtient : $\alpha \in \left]-\frac{1}{2}, 0\right[$.

$$\boxed{\alpha \in \left]-\tfrac{1}{2}, 0\right[}$$

□

c) Tracer l'allure de la courbe représentative de g sur I dans le plan rapporté à un repère orthonormé.

Démonstration.



□