Lycée Carnot

Concours blanc commun ECE 2

Du 23 janvier 2018 au 26 janvier 2018

Mathématiques I

Le 23 janvier 2018

De 8 h à 12 h

La durée de l'épreuve est 4 heures.

Le sujet comporte 5 pages. Les exercices sont indépendants.

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.
Ils ne doivent faire usage d'aucun document : l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.
Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

Exercice 1 : Suites récurrentes et algèbre linéaire

Soit a un nombre réel. On note $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ l'ensemble des suites réelles définies sur $\mathbb{N}$, et F le sous-ensemble de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ formé des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui vérifient : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+3} = 3a\ u_{n+1} + (1-3a)\ u_n$.

L'objet de cet exercice est l'étude de l'ensemble F.

I. Étude du cas particulier $a = 1$

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par ses trois premiers termes u_0, u_1, u_2, et la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+3} = 3\ u_{n+1} - 2\ u_n$$

Pour tout entier naturel n, on pose : $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \\ u_{n+2} \end{pmatrix}$ et on note M la matrice carrée $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Reconnaître, pour tout entier naturel n, le produit MX_n.
En déduire l'expression de X_n en fonction des matrices M, X_0 et de l'entier naturel n.

2. ***a)*** Déterminer les valeurs propres de la matrice M et leur sous-espace propre associé.

b) La matrice M est-elle diagonalisable ?

3. On note f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à M, c'est-à-dire tel que M soit la matrice de f dans la base canonique $\mathscr{B}$ de $\mathbb{R}^3$.

a) Déterminer une base $\mathscr{B}' = (e'_1, e'_2, e'_3)$ telle que la matrice T de f dans $\mathscr{B}'$ vérifie $T = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$,
et que les vecteurs e'_1, e'_2, e'_3 aient respectivement pour première composante 1, 1 et 0.

b) Déterminer, pour tout entier naturel n, l'expression de T^n.

4. Soit P la matrice de passage de la base $\mathscr{B}$ à la base $\mathscr{B}'$. Exprimer M en fonction de T, P et P^{-1}, puis M^n en fonction des mêmes matrices et de l'entier naturel n.

5. ***a)*** Calculer P^{-1} (les calculs devront figurer sur la copie).

b) Pour tout entier naturel n, calculer les cœfficients de la première ligne de M^n ; en déduire l'expression de u_n en fonction de u_0, u_1, u_2 et de l'entier naturel n.

II. Étude du cas général

On revient au cas général où a est un réel quelconque.

1. **Structure de F**

a) Démontrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

b) On considère l'application $\varphi : \begin{array}{ccc} F & \to & \mathbb{R}^3 \\ (u_n)_{n\in\mathbb{N}} & \mapsto & (u_0, u_1, u_2) \end{array}$
Démontrer que φ est un isomorphisme d'espaces vectoriels.
En déduire que F est de dimension finie et préciser sa dimension.

c) Justifier que des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de F forment une base de F si, et seulement si, la matrice $\begin{pmatrix} u_0 & v_0 & w_0 \\ u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \end{pmatrix}$ est inversible.

d) On suppose dans cette question : $a = 0$.

On note s, s', s'' les suites définies par :

$$s = \varphi^{-1}\left((1,0,0)\right), \quad s' = \varphi^{-1}\left((0,1,0)\right), \quad s'' = \varphi^{-1}\left((0,0,1)\right)$$

Déterminer s, s', s'' (on donnera les dix premiers termes de chacune de ces trois suites).
En déduire la forme générale d'un élément de F.

e) Reprendre la question précédente dans le cas $a = \frac{1}{3}$.

2. **Suites géométriques de F**

a) Démontrer que la suite $(r^n)_{n\in\mathbb{N}}$ appartient à F si, et seulement si, le réel r est racine de la fonction polynomiale $p : x \mapsto x^3 - 3a\ x + 3a - 1$.
(avec la convention : $0^0 = 1$)

b) Déterminer, en fonction du réel a, le nombre de racines de la fonction p ainsi que leur valeur.

3. **Cas où p admet trois racines distinctes**

a) Démontrer que, lorsque la fonction p admet trois racines distinctes 1, r_1 et r_2, les suites $\big(1\big)_{n\in\mathbb{N}}$, $\big({r_1}^n\big)_{n\in\mathbb{N}}$ et $\big({r_2}^n\big)_{n\in\mathbb{N}}$ forment une base de l'espace vectoriel F.

b) Dans le cas où $a = 7$, exprimer, en fonction de l'entier naturel n, le terme général u_n de la suite, appartenant à F, qui vérifie : $u_0 = 1$, $u_1 = 10$, $u_2 = -8$.

4. **Cas où p admet une racine double**

a) Soit r un nombre réel et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de terme général nr^n.
Démontrer que, pour tout n de $\mathbb{N}$:

$$u_{n+3} - 3a\ u_{n+1} - (1-3a)\, u_n = r^n \left(n\ p\,(r) + r\ p'\,(r)\right)$$

b) En déduire que, lorsque p admet une racine double r_0 et une racine simple r_1 la suite $(n\ {r_0}^n)_{n\in\mathbb{N}}$ appartient à F, et démontrer que les suites $({r_0}^n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(n\ {r_0}^n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $({r_1}^n)_{n\in\mathbb{N}}$ forment une base de F.

c) Dans le cas où $a = \frac{1}{4}$, exprimer le terme général u_n d' un élément quelconque $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de F en fonction de u_0, u_1 et u_2 et de l'entier naturel n.
Préciser la limite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 2

Pour tout entier naturel n, on note $I_n = \displaystyle\int_0^1 x^n\ \mathrm{e}^{-x}\ dx$.

1. *a)* Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant I_n \leqslant \dfrac{1}{n+1}$.

b) En déduire que la suite (I_n) converge et donner sa limite.

2. À l'aide d'une intégration par parties, établir que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ I_n = \frac{1}{(n+1)\ \mathrm{e}} + \frac{I_{n+1}}{n+1}$$

3. *a)* En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant I_n - \dfrac{1}{(n+1)\ \mathrm{e}} \leqslant \dfrac{1}{(n+1)(n+2)}$.

b) Trouver un équivalent simple de I_n quand n tend vers $+\infty$.

Problème

La partie ***I*** permet d'établir des résultats utiles pour les parties ***II*** et ***III***.
Les parties ***II*** et ***III*** sont indépendantes entre elles.
On considère la fonction f définie pour tout réel x positif ou nul par $f(x) = 1 - \mathrm{e}^{-x}$.

Partie I

1. a) Dresser le tableau de variations de f.

b) Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}_+,\ f(x) \leqslant x$, l'égalité ayant lieu seulement pour $x = 0$.

2. a) Montrer que, pour tout entier naturel n et pour tout réel x :

$$\mathrm{e}^{-x} = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k\ x^k}{k!} + (-1)^{n+1} \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!}\ \mathrm{e}^{-t}\ dt$$

b) En écrivant l'égalité précédente pour $n = 2$, puis pour $n = 3$, montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+,\ \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} \leqslant x - f(x) \leqslant \frac{x^2}{2}$$

Partie II

On considère la suite (u_n) définie par son premier terme $u_0 = 1$ et par la relation :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n)$$

1. a) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \in \,]0, 1]$.

b) Montrer, grâce à la question ***I.1)***, que : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n - u_{n+1} \geqslant 0$.

c) Conclure quant à la convergence de la suite (u_n) et donner sa limite.

2. a) Simplifier, pour tout n élément de $\mathbb{N}^*$, la somme $\sum\limits_{k=0}^{n-1} (u_k - u_{k+1})$.

b) En déduire que la série de terme général $(u_n - u_{n+1})$ est convergente.

c) En utilisant la question ***I.2)***, montrer que $u_n - u_{n+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{{u_n}^2}{2}$ en $+\infty$.

d) Donner enfin la nature de la série de terme général ${u_n}^2$.

Partie III

1. On note ϕ la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par : $\phi(0) = 1$ et $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ \phi(x) = \dfrac{f(x)}{x}$.
Montrer que ϕ est continue sur $\mathbb{R}_+$.

On considère la fonction réelle g définie par $g(0) = 1$ et $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ g(x) = \dfrac{1}{x} \displaystyle\int_0^x \phi(t)\ dt$.

2. a) Vérifier que g est bien définie et continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

b) Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ 1 - \dfrac{x}{4} \leqslant g(x) \leqslant 1 - \dfrac{x}{4} + \dfrac{x^2}{18}$.

c) En déduire que g est continue en 0, dérivable en 0 puis donner $g'(0)$.

3. ***a)*** Montrer que : $\forall x \in]1, +\infty]$, $\displaystyle\int_1^x \phi(t)\ dt \leqslant \ln(x)$.

b) En déduire que g a une limite finie en $+\infty$ et donner la valeur de cette limite.

4. ***a)*** Pour tout réel x strictement positif, calculer $g'(x)$ et l'écrire sous la forme $g'(x) = \dfrac{h(x)}{x^2}$.

b) Montrer alors que : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $xh'(x) = (x+1)\ \mathrm{e}^{-x} - 1$.

c) Étudier la fonction notée k définie par : $\forall x \in \mathbb{R}_+$, $k(x) = (x+1)\ \mathrm{e}^{-x} - 1$.

d) Donner le signe de k, puis les variations de h et enfin celles de g.

e) Dresser le tableau de variations de g et tracer l'allure de sa courbe représentative dans un repère orthonormé.