**Lycée Carnot**

**Concours blanc commun ECE 2**

**Du 23 janvier 2018 au 26 janvier 2018**

**Mathématiques I**

**Le 23 janvier 2018**

**De 8 h à 12 h**

*La durée de l'épreuve est 4 heures.*

*Le sujet comporte 5 pages. Les exercices sont indépendants.*

---

*La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.*
*Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.*
*Ils ne doivent faire usage d'aucun document : l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.*
*Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.*

---

## Exercice 1 : Suites récurrentes et algèbre linéaire (ESSEC I - 2003)

Soit $a$ un nombre réel. On note $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ l'ensemble des suites réelles définies sur $\mathbb{N}$, et $F$ le sous-ensemble de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ formé des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui vérifient : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+3} = 3a\ u_{n+1} + (1-3a)\ u_n$.

### I. Étude du cas particulier $a = 1$

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par ses trois premiers termes $u_0$, $u_1$, $u_2$, et la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+3} = 3\ u_{n+1} - 2\ u_n$$

Pour tout entier naturel $n$, on pose : $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \\ u_{n+2} \end{pmatrix}$ et on note $M$ la matrice carrée $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$.

***1.*** Reconnaître, pour tout entier naturel $n$, le produit $MX_n$.
En déduire l'expression de $X_n$ en fonction des matrices $M$, $X_0$ et de l'entier naturel $n$.

*Démonstration.*
Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors :

$$MX_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \\ u_{n+2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_{n+2} \\ -2\ u_n + 3\ u_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_{n+2} \\ u_{n+3} \end{pmatrix} = X_{n+1}$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ MX_n = X_{n+1}}$$

$$\boxed{\text{On en déduit, par une récurrence immédiate : } \forall n \in \mathbb{N},\ X_n = M^n X_0.}$$

□

***2. a)*** Déterminer les valeurs propres de la matrice $M$ et leur sous-espace propre associé.

*Démonstration.*

- Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Rappelons que :

$\lambda$ est valeur propre de $M$ $\Leftrightarrow$ $M - \lambda I_3$ n'est pas inversible

$\Leftrightarrow$ l'un (au moins) des cœfficients diagonaux de la réduite (**triangulaire supérieure**) de $M - \lambda I_n$ est nul

- Or :

$$\begin{aligned}
\mathrm{rg}(M-\lambda I) &= \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 \\ -2 & 3 & -\lambda \end{pmatrix}\right) \\
&\overset{L_1 \leftrightarrow L_3}{=} \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix} -2 & 3 & -\lambda \\ 0 & -\lambda & 1 \\ -\lambda & 1 & 0 \end{pmatrix}\right) \\
&\overset{L_3 \leftarrow 2\ L_3 - \lambda\ L_1}{=} \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix} -2 & 3 & -\lambda \\ 0 & -\lambda & 1 \\ 0 & 2-3\ \lambda & \lambda^2 \end{pmatrix}\right) \\
&\overset{L_2 \leftarrow -3\ L_2 + L_3}{=} \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix} -2 & 3 & -\lambda \\ 0 & 2 & -3+\lambda^2 \\ 0 & 2-3\ \lambda & \lambda^2 \end{pmatrix}\right) \\
&\overset{L_3 \leftarrow 2\ L_3 - (2-3\ \lambda)\ L_2}{=} \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix} -2 & 3 & -\lambda \\ 0 & 2 & -3+\lambda^2 \\ 0 & 0 & 2\ \lambda^2 - (2-3\ \lambda)(-3+\lambda^2) \end{pmatrix}\right)
\end{aligned}$$

- Enfin :

$$\begin{aligned} 2\ \lambda^2 - (2-3\ \lambda)(-3+\lambda^2) &= \cancel{2\ \lambda^2} - (-6 + \cancel{2\ \lambda^2} + 9\ \lambda - 3\ \lambda^3) \\ &= 6 - 9\ \lambda + 3\lambda^3 \ = \ 3\ (2 - 3\ \lambda + \lambda^3) \\ &= 3\ (\lambda-1)(\lambda^2+\lambda-2) \\ &= 3\ (\lambda-1)(\lambda-1)(\lambda+2) \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{On en déduit que } \mathrm{Sp}(M) = \{1, -2\}.}$$

- Déterminons alors $E_1(M)$. Soit $U = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

$$\begin{aligned} U \in E_1(M) &\iff (M - I_3)\ U = 0_{\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})} \\ &\iff \left\{ \begin{array}{rcrcrcr} -x & + & y & & & = & 0 \\ & - & y & + & z & = & 0 \\ -2\ x & + & 3\ y & - & z & = & 0 \end{array} \right. \\ &\overset{L_3 \leftarrow L_3 - 2\ L_1}{\iff} \left\{ \begin{array}{rcrcrcr} -x & + & y & & & = & 0 \\ & - & y & + & z & = & 0 \\ & & y & - & z & = & 0 \end{array} \right. \\ &\iff \left\{ \begin{array}{rcrcr} -x & + & y & = & 0 \\ & - & y & = & -z \end{array} \right. \\ &\overset{L_1 \leftarrow L_1 + L_2}{\iff} \left\{ \begin{array}{rcrcr} -x & & & = & -z \\ & - & y & = & -z \end{array} \right. \end{aligned}$$

On en déduit :

$$\begin{aligned} E_1(M) &= \{U = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid (M - I_3)\ U = 0_{\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})}\} \\ &= \{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid x = z \ \texttt{ET} \ y = z\} \\ &= \{\begin{pmatrix} z \\ z \\ z \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid z \in \mathbb{R}\} \\ &= \{z \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \mid z \in \mathbb{R}\} \ = \ \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) \end{aligned}$$

$$\boxed{E_1(M) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)}$$

- Déterminons enfin $E_{-2}(M)$. Soit $U = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

$$\begin{array}{rcl} U \in E_{-2}(M) & \Longleftrightarrow & (M + 2\ I_3)\ U = 0_{\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})} \\ & \Longleftrightarrow & \left\{ \begin{array}{rcrcrcr} 2\ x & + & y & & & = & 0 \\ & & 2\ y & + & z & = & 0 \\ -2\ x & + & 3\ y & + & 2\ z & = & 0 \end{array} \right. \\ & \overset{L_3 \leftarrow L_3 + L_1}{\Longleftrightarrow} & \left\{ \begin{array}{rcrcrcr} 2\ x & + & y & & & = & 0 \\ & & 2\ y & + & z & = & 0 \\ & & 4\ y & + & 2\ z & = & 0 \end{array} \right. \\ & \Longleftrightarrow & \left\{ \begin{array}{rcrcr} 2\ x & + & y & = & 0 \\ & & 2\ y & = & -z \end{array} \right. \\ & \overset{L_1 \leftarrow 2\ L_1 - L_2}{\Longleftrightarrow} & \left\{ \begin{array}{rcrcr} 4\ x & & & = & z \\ & & 2\ y & = & -z \end{array} \right. \end{array}$$

On en déduit :

$$\begin{array}{rcl} E_{-2}(M) & = & \{U = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid (M + 2\ I_3)\ U = 0_{\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})}\} \\ & = & \{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid x = \frac{1}{4} z \ \texttt{ ET } \ y = -\frac{1}{2} z\} \\ & = & \{\begin{pmatrix} \frac{1}{4}\ z \\ -\frac{1}{2}\ z \\ z \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid z \in \mathbb{R}\} \\ & = & \{z \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix} \mid z \in \mathbb{R}\} \ = \ \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}\right) \ = \ \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}\right) \end{array}$$

$$\boxed{E_{-2}(M) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}\right)}$$

**Remarque**

- Lors du calcul du rang, on a effectué l'opération $L_2 \leftarrow -3\ L_2 + L_3$. Le but de cette opération est de se débarrasser du terme en $\lambda$ dans le cœfficient diagonal de la deuxième ligne.
Cela permet de ne pas avoir à mener de discussion sur la valeur de $\lambda$.
- Détaillons la rédaction si on ne suit pas cette idée.

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{rg}(M - \lambda I) & = & \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix} -2 & 3 & -\lambda \\ 0 & -\lambda & 1 \\ 0 & 2 - 3\ \lambda & \lambda^2 \end{pmatrix}\right) \\ & \overset{L_3 \leftarrow \lambda\ L_3 + (2 - 3\ \lambda)\ L_2}{=} & \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix} -2 & 3 & -\lambda \\ 0 & -\lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda^3 + (2 - 3\ \lambda) \end{pmatrix}\right) \quad \textit{(si } \lambda \neq 0\textit{)} \end{array}$$

Cette opération n'est possible que si $\lambda \neq 0$ (sinon, cette opération n'est autre que $L_3 \leftarrow 2\ L_2$, ce qui correspond à écraser la ligne $L_3$).

Il reste alors à traiter le cas $\lambda = 0$.
Dans ce cas, en reprenant le début du calcul précédent, on obtient :

$$\text{rg}(M - 0\ I_3) \ = \ \text{rg}\left(\begin{pmatrix} -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}\right) \overset{C_2 \leftrightarrow C_3}{=} \text{rg}\left(\begin{pmatrix} -2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}\right)$$

La matrice réduite est triangulaire supérieure et tous ses cœfficients diagonaux sont non nuls.
On en déduit qu'elle est inversible (donc de rang 3).
Ainsi, $M$ est inversible ce qui démontre que $\lambda = 0$ n'est pas une valeur propre de $M$.

En réunissant ces deux cas, on en conclut une nouvelle fois que les valeurs propres de $M$ sont les réels $\lambda$ qui annulent $2 - 3\ \lambda + \lambda^2$. □

***b)*** La matrice $M$ est-elle diagonalisable ?

*Démonstration.*

- La famille $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ est :
  × génératrice de $E_1(M)$ d'après la question précédente,
  × libre car constituée d'un vecteur non nul.
  C'est donc une base de $E_1(M)$.

$$\boxed{\dim(E_1(M)) = 1}$$

On démontre de même que la famille $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}\right)$ est une base de $E_{-2}(M)$ et donc :
$\dim(E_{-2}(M)) = 1$.

- La matrice $M$ est carrée d'ordre 3.
  D'après ce qui précède :

$$\dim(E_1(M)) + \dim(E_{-2}(M)) = 1 + 1 = 2 \neq 3$$

$$\boxed{\text{La matrice } M \text{ n'est pas diagonalisable.}}$$

□

***3.*** On note $f$ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à $M$, c'est-à-dire tel que $M$ soit la matrice de $f$ dans la base canonique $\mathscr{B}$ de $\mathbb{R}^3$.

***a)*** Déterminer une base $\mathscr{B}' = (e'_1, e'_2, e'_3)$ telle que la matrice $T$ de $f$ dans $\mathscr{B}'$ vérifie $T = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$,
et que les vecteurs $e'_1, e'_2, e'_3$ aient respectivement pour première composante 1, 1 et 0.

*Démonstration.*

- D'après l'énoncé, $\text{Mat}_{\mathscr{B}'}(f) = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Par définition, cela signifie :

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcr} f(e'_1) & = & -2 \cdot e'_1 & + & 0 \cdot e'_2 & + & 0 \cdot e'_3 \\ f(e'_2) & = & 0 \cdot e'_1 & + & 1 \cdot e'_2 & + & 0 \cdot e'_3 \\ f(e'_3) & = & 0 \cdot e'_1 & + & 1 \cdot e'_2 & + & 1 \cdot e'_3 \end{array} \right.$$

- On en déduit que $e_1' \in E_{-2}(f) = \mathrm{Vect}\left((1,2,-4)\right)$.

$$\boxed{\text{Ainsi } e_1' = (1,2,-4)\text{, seul vecteur de } E_{-2}(f) \text{ de première composante 1.}}$$

- De même $e_2' \in E_1(f) = \mathrm{Vect}\left((1,1,1)\right)$.

$$\boxed{\text{Ainsi } e_2' = (1,1,1)\text{, seul vecteur de } E_1(f) \text{ de première composante 1.}}$$

- Notons alors : $e_3' = (\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$ et déterminons ces 3 réels.
  En appliquant l'isomorphisme de représentation à la dernière égalité du système, on obtient :

$$\begin{array}{ccccc}
\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f(e_3')) & = & & \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(e_2' + e_3') & \\
\shortparallel & & & \shortparallel & \\
\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) \times \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(e_3') & & \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(e_2') & + & \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(e_3') \\
\shortparallel & & \shortparallel & & \shortparallel \\
M \times \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} & = & \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} & + & \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}
\end{array}$$

Et ainsi : $(M - I) \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Ce qui équivaut au système :

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcr}
-\alpha & + & \beta & & & = & 1 \\
 & - & \beta & + & \gamma & = & 1 \\
-2\,\alpha & + & 3\,\beta & - & \gamma & = & 1
\end{array} \right.$$

$$\overset{L_3 \leftarrow L_3 - 2\,L_1}{\iff} \left\{ \begin{array}{rcrcrcr}
-\alpha & + & \beta & & & = & 1 \\
 & - & \beta & + & \gamma & = & 1 \\
 & & \beta & - & \gamma & = & -1
\end{array} \right.$$

$$\iff \left\{ \begin{array}{rcrcr}
\beta & & & = & 1 \\
-\beta & + & \gamma & = & 1
\end{array} \right. \qquad \textit{(car } \alpha = 0 \textit{ d'après l'énoncé)}$$

$$\overset{L_2 \leftarrow L_2 + L_1}{\iff} \left\{ \begin{array}{rcr}
\beta & = & 1 \\
\gamma & = & 2
\end{array} \right.$$

$$\boxed{\text{Ainsi } e_3' = (0,1,2).}$$

**Remarque**

- De manière générale : $E_{-2}(M) \neq E_{-2}(f)$. Rappelons le lien entre ces deux ensembles.
  Soit $u \in \mathbb{R}^3$. Notons $U = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u)$ où $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$, base canonique de $\mathbb{R}^3$.

$$\begin{array}{rccccccccc}
\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} & \Leftrightarrow & u & = & 1 \cdot e_1 & + & 2 \cdot e_2 & - & 4 \cdot e_3 & \\
 & \Leftrightarrow & u & = & 1 \cdot (1,0,0) & + & 2 \cdot (0,1,0) & - & 4 \cdot (0,0,1) & = (1,2,-4)
\end{array}$$

  Connaissant $U$ l'expression de $u$ dépend de l'espace $E$ d'étude. Ici $E = \mathbb{R}^3$.
  Évidemment, si on avait considéré un endomorphisme de $E = \mathbb{R}_2[X]$, on aurait obtenu :

$$u = 1 \cdot P_0 + 2 \cdot P_1 - 4 \cdot P_2$$

- Dans la démonstration, on a fait apparaître l'égalité : $(M-I)\begin{pmatrix}\alpha\\\beta\\\gamma\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$.

  En appliquant $M-I$ de part et d'autre de cette égalité, on obtient :

$$(M-I)^2\begin{pmatrix}\alpha\\\beta\\\gamma\end{pmatrix}=(M-I)\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

  On obtient alors, à l'aide de l'isomorphisme de représentation (passerelle matrice-endomorphisme) :

$$(f-\mathrm{id})^2\ (e_3')=0$$

  Autrement dit : $e_3'\in\mathrm{Ker}((f-\mathrm{id})^2)$.
  Pour trigonaliser l'endomorphisme $f$ (*i.e.* trouver une base dans laquelle $f$ est représenter par une matrice triangulaire supérieure), on a donc choisi une base $(e_1',e_2',e_3')$ telle que :
  × $e_1'\in\mathrm{Ker}(f+2\ \mathrm{id})$,
  × $e_2'\in\mathrm{Ker}(f-\mathrm{id})$,
  × $e_3'\in\mathrm{Ker}((f-\mathrm{id})^2)$.
  On peut remarquer (démonstration classique) : $\mathrm{Ker}(f-\mathrm{id})\subset\mathrm{Ker}((f-\mathrm{id})^2)$.
  Et enfin : $e_3'\in\mathrm{Ker}((f-\mathrm{id})^2)\ \setminus\ \mathrm{Ker}(f-\mathrm{id})$.

  Tout cela participe du cadre classique de la trigonalisation. Mais on s'égare ici du programme de la voie ECE et on n'expliquera pas donc plus avant ces résultats.

□

***b)*** Déterminer, pour tout entier naturel $n$, l'expression de $T^n$.

*Démonstration.*
Soit $n\in\mathbb{N}$.

- Notons $D=\begin{pmatrix}-2&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ et $N=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$, de sorte que : $T=D+N$.
- Remarquons tout d'abord que : $N^2=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$.

$$\boxed{\text{On en déduit donc, par une récurrence immédiate : }\forall k\geqslant 2,\ N^k=0.}$$

  *(ou alors on remarque : $\forall k\geqslant 2$, $N^k=N^2\ N^{k-2}=0\ N^{k-2}=0$)*
- D'autre part :

$$DN=\begin{pmatrix}-2&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=ND$$

$$\boxed{\text{Autrement dit, les matrices } N \text{ et } D \text{ commutent.}}$$

- D'après la formule du binôme de Newton :

$$\begin{array}{rcll} T^n &=& (D+N)^n & \\ &=& \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} D^{n-k}N^k & \\ &=& \displaystyle\sum_{k=0}^{1} \binom{n}{k} D^{n-k}N^k + \sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} D^{n-k}N^k & \textit{(ce découpage est valable si } n \geqslant 1\textit{)} \\ &=& \displaystyle\sum_{k=0}^{1} \binom{n}{k} D^{n-k}N^k & \textit{(car : } \forall k \geqslant 2,\ N^k = 0\textit{)} \\ &=& \displaystyle\binom{n}{0} D^n\ N^0 + \binom{n}{1} D^{n-1}\ N^1 & \\ &=& D^n + n\ D^{n-1}\ N & \end{array}$$

$$\boxed{\text{Ainsi, pour tout } n \in \mathbb{N}^*,\ T^n = D^n + n\ D^{n-1}\ N.}$$

Enfin, si $n = 0$, $T^0 = I_3$.

- Il suffit alors d'exprimer les puissances de la matrice $D$ :

$$\forall m \in \mathbb{N},\ D^m = \begin{pmatrix} (-2)^m & 0 & 0 \\ 0 & 1^m & 0 \\ 0 & 0 & 1^m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-2)^m & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On en déduit que pour tout $n \geqslant 1$ :

$$\begin{array}{rcl} T^n &=& D^n + n\ D^{n-1}\ N \\ &=& \begin{pmatrix} (-2)^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + n \begin{pmatrix} (-2)^{n-1} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &=& \begin{pmatrix} (-2)^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + n \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-2)^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

On remarque de plus que cette formule est encore vérifiée pour $n = 0$.

$$\boxed{\text{En résumé, pour tout } n \in \mathbb{N},\ T^n = \begin{pmatrix} (-2)^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.}$$

**Remarque**

- La « relation de Chasles » stipule que pour tout $(m, p, n) \in \mathbb{N}^3$ tel que $m \leqslant p \leqslant n$ :

$$\sum_{k=m}^{n} u_k = \sum_{k=m}^{p} u_k + \sum_{k=p+1}^{n} u_k$$

*(la deuxième somme est nulle si $p = n$)*
où $(u_n)$ est une suite quelconque de réels ou de matrices.

- Dans cette question, on est dans le cas où $m = 0$ et $p = 1$.
L'argument $n \geqslant 1$ est donc essentiel pour découper la somme.
Le cas $n = 0$ doit donc être traité à part.

- Ici, la matrice $N$ vérifie : $\forall k \geqslant 2,\ N^k = 0$. Elle est dite nilpotente d'indice 2 (ce terme n'est pas au programme et il est préférable de ne pas l'utiliser dans une copie). Si elle avait été nilpotente d'ordre 3, il aurait fallu traiter à part les cas $n = 0$ mais aussi le cas $n = 1$ (le découpage de la somme est alors valable pour $n \geqslant 2$). □

*4.* Soit $P$ la matrice de passage de la base $\mathscr{B}$ à la base $\mathscr{B}'$. Exprimer $M$ en fonction de $T$, $P$ et $P^{-1}$, puis $M^n$ en fonction des mêmes matrices et de l'entier naturel $n$.

*Démonstration.*

- D'après la formule de changement de base :

$$\begin{array}{ccccccc} \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) & = & P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'} & \times & \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(f) & \times & P_{\mathscr{B}',\mathscr{B}} \\ \shortparallel & & \shortparallel & & \shortparallel & & \shortparallel \\ M & = & P & \times & T & \times & P^{-1} \end{array}$$

- On en déduit, par une récurrence immédiate :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ M^n = P \times T^n \times P^{-1}}$$

□

***5. a)*** Calculer $P^{-1}$ (les calculs devront figurer sur la copie).

*Démonstration.*

- Par définition :

$$P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'} = \begin{pmatrix} \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(e'_1) & \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(e'_2) & \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(e'_3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

- On applique l'algorithme du pivot de Gauss.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} \left| \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right.$$

On effectue les opérations $\left\{ \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 + 2\ L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 4\ L_1 \end{array} \right.$. On obtient :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & -3 & 2 \end{pmatrix} \left| \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right.$$

On effectue les opérations $\left\{ L_3 \leftarrow L_3 + L_2 \right.$. On obtient :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \left| \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \right.$$

- La réduite obtenue est triangulaire supérieure. De plus, ses cœfficients diagonaux sont tous non nuls. Ainsi, cette réduite est inversible et il en est de même de la matrice initiale $P$.
*(c'est toujours le cas d'une matrice de passage entre deux bases $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$)*

- On effectue les opérations $\left\{ L_2 \leftarrow 3\, L_2 - \; L_3 \right.$. On obtient :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \left| \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 8 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \right.$$

On effectue les opérations $\left\{ L_1 \leftarrow 9\, L_1 - L_2 \right.$. On obtient :

$$\begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \left| \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 8 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \right.$$

On effectue les opérations $\left\{ \begin{array}{l} L_1 \leftarrow \frac{1}{9}\, L_1 \\ L_2 \leftarrow \frac{1}{9}\, L_2 \\ L_3 \leftarrow \frac{1}{3}\, L_3 \end{array} \right.$. On obtient :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \left| \begin{pmatrix} \frac{1}{9} & -\frac{2}{9} & \frac{1}{9} \\ \frac{8}{9} & \frac{2}{9} & -\frac{1}{9} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \right.$$

$$\boxed{\text{Ainsi } P \text{ est inversible et } P^{-1} = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 8 & 2 & -1 \\ -6 & 3 & 3 \end{pmatrix}.}$$

□

***b)*** Pour tout entier naturel $n$, calculer les cœfficients de la première ligne de $M^n$ ; en déduire l'expression de $u_n$ en fonction de $u_0$, $u_1$, $u_2$ et de l'entier naturel $n$.

*Démonstration.*
Soit $n \in \mathbb{N}$.

- La première ligne de $M^n$ est obtenue par multiplication à gauche par la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
- On a alors :

$$\begin{array}{rcll} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} M^n & = & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} P\, T^n\, P^{-1} & \textit{(d'après la question 4.)} \\ & = & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} T^n\, P^{-1} & \textit{(on récupère la } 1^{\text{ère}} \textit{ ligne de } T^n\textit{)} \\ & = & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (-2)^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1} & \textit{(d'après la question 3.b))} \\ & = & \begin{pmatrix} (-2)^n & 1 & n \end{pmatrix} P^{-1} & \textit{(somme des lignes de } T^n\textit{)} \\ & = & \frac{1}{9} \begin{pmatrix} (-2)^n & 1 & n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 8 & 2 & -1 \\ -6 & 3 & 3 \end{pmatrix} & \textit{(d'après la question 5.a))} \\ & = & \frac{1}{9} \begin{pmatrix} (-2)^n + 8 - 6n & -2\,(-2)^n + 2 + 3n & (-2)^n - 1 + 3n \end{pmatrix} & \end{array}$$

- On en déduit que :

$$\begin{array}{ccc} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} X_n & = & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} M^n \quad X_0 \quad \textit{(d'après la question 1.)} \\ \shortparallel & & \shortparallel \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \\ u_{n+2} \end{pmatrix} & & \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \end{array}$$

Et ainsi :

$$\begin{aligned} u_n &= \frac{1}{9}\Big(\big((-2)^n - 6n + 8\big)\ u_0 \ + \ \big(-2\ (-2)^n + 3n + 2\big)\ u_1 \ + \ \big((-2)^n + 3n - 1\big)\ u_2\Big) \\ &= \frac{1}{9}\Big((-2)^n\ (u_0 - 2u_1 + u_2) + 3n\ (-2u_0 + u_1 + u_2) + (8u_0 + 2u_1 - u_2)\Big) \end{aligned}$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \frac{(-2)^n}{9}\ (u_0 - 2u_1 + u_2) + \frac{n}{3}\ (-2u_0 + u_1 + u_2) + \frac{1}{9}\ (8u_0 + 2u_1 - u_2)}$$

□

## II. Étude du cas général

On revient au cas général où $a$ est un réel quelconque.

***1.*** **Structure de $F$**

***a)*** Démontrer que $F$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

*Démonstration.*

- Rappelons que $F$ le sous-ensemble de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ formé des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui vérifient :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+3} = 3a\ u_{n+1} + (1-3a)\ u_n$$

- Démontrons que $F$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

***(i)*** $F \subset \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$

***(ii)*** $F \neq \varnothing$ car la suite constante nulle $(z_n)$ est un élément de $F$. En effet, pour tout $n \in \mathbb{N}$ :

$$z_{n+3} = 0 \quad \text{ et } \quad 3a\ z_{n+1} + (1-3a)\ z_n = 3a \times 0 + (1-3a) \times 0 = 0$$

***(iii)*** Soit $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ et soit $(u, v) \in F^2$. Alors :

× $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite qui vérifie : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+3} = 3a\ u_{n+1} + (1-3a)\ u_n$.

× $v = (v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite qui vérifie : $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_{n+3} = 3a\ v_{n+1} + (1-3a)\ v_n$.

On considère alors la suite $w = \lambda \cdot u + \mu \cdot v = (\lambda\ u_n + \mu\ v_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors :

$$\begin{aligned} w_{n+3} &= \lambda\ u_{n+3} + \mu\ v_{n+3} \\ &= \lambda\ \big(3a\ u_{n+1} + (1-3a)\ u_n\big) + \mu\ \big(3a\ v_{n+1} + (1-3a)\ v_n\big) \\ &= 3a\ \big(\lambda\ u_{n+1} + \mu\ v_{n+1}\big) + (1-3a)\ \big(\lambda\ u_n + \mu\ v_n\big) \\ &= 3a\ w_{n+1} + (1-3a)\ w_n \end{aligned}$$

Ainsi, $w = \lambda \cdot u + \mu \cdot v$ est une suite de $F$.

$$\boxed{\text{L'ensemble } F \text{ est un sous-espace vectoriel de } \mathbb{R}^{\mathbb{N}}.}$$

□

***b)*** On considère l'application $\varphi : \begin{array}{ccc} F & \to & \mathbb{R}^3 \\ (u_n)_{n\in\mathbb{N}} & \mapsto & (u_0, u_1, u_2) \end{array}$

Démontrer que $\varphi$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels.
En déduire que $F$ est de dimension finie et préciser sa dimension.

*Démonstration.*

- Montrons que $\varphi$ est une application linéaire.
  Soit $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ et soit $(u, v) \in F^2$. Notons $w = \lambda \cdot u + \mu \cdot v = (\lambda\ u_n + \mu\ v_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

$$\begin{array}{rcl} \varphi(\lambda \cdot u + \mu \cdot v) & = & \varphi(w) \\ & = & (w_0, w_1, w_2) \\ & = & (\lambda\ u_0 + \mu\ v_0, \lambda\ u_1 + \mu\ v_1, \lambda\ u_2 + \mu\ v_2) \\ & = & (\lambda\ u_0, \lambda\ u_1, \lambda\ u_2) + (\mu\ v_0, \mu\ v_1, \mu\ v_2) \\ & = & \lambda \cdot (u_0, u_1, u_2) + \mu \cdot (v_0, v_1, v_2) \\ & = & \lambda \cdot \varphi(u) + \mu \cdot \varphi(v) \end{array}$$

$$\boxed{\varphi \text{ est bien une application linéaire.}}$$

- Démontrons que $\varphi$ est injective.
  Soit $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in F$.

$$\begin{array}{rcl} u \in \mathrm{Ker}(\varphi) & \Leftrightarrow & \varphi(u) = 0_{\mathbb{R}^3} \\ & \Leftrightarrow & (u_0, u_1, u_2) = (0, 0, 0) \end{array}$$

  Ainsi, par une récurrence **triple** immédiate : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = 0$.
  *(***initialisation*** : c'est vrai au rang* $0$, $1$, $2$
  ***hérédité*** *: si c'est vrai au rang $n$, $n+1$ et $n+2$, alors* $u_{n+3} = 3a \times 0 + (1 - 3a) \times 0 = 0$*)*

$$\boxed{\text{L'application } \varphi \text{ est injective.}}$$

- Démontrons que $\varphi$ est surjective.
  Soit $X = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Considérons la suite $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\left\{\begin{array}{l} u_0 = x \\ u_1 = y \\ u_2 = z \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+3} = 3a\ u_{n+1} + (1 - 3a)\ u_n \end{array}\right.$$

  Alors, par définition, $u \in F$ et $\varphi(u) = X$.

$$\boxed{\text{L'application } \varphi \text{ est surjective.}}$$

$$\boxed{\text{Ainsi, } \varphi \text{ est un isomorphisme d'espaces vectoriels.}}$$

$$\boxed{\text{On en déduit que : } \dim(F) = \dim(\mathbb{R}^3) = 3.}$$

□

***c)*** Justifier que des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ , $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $F$ forment une base de $F$ si, et seulement si, la matrice $\begin{pmatrix} u_0 & v_0 & w_0 \\ u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \end{pmatrix}$ est inversible.

*Démonstration.*
Notons $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $v = (v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $w = (w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ trois suites de $F$.

- Remarquons tout d'abord :

$$\begin{array}{rcl} \text{La matrice } \begin{pmatrix} u_0 & v_0 & w_0 \\ u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \end{pmatrix} \text{ est inversible} & \Leftrightarrow & \text{rg}\left(\begin{pmatrix} u_0 & v_0 & w_0 \\ u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \end{pmatrix}\right) = 3 \\ & \Leftrightarrow & \text{La famille } \left(\begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} v_0 \\ v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} w_0 \\ w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}\right) \text{ est libre} \\ & \Leftrightarrow & \text{La famille } (\varphi(u), \varphi(v), \varphi(w)) \text{ est libre} \end{array}$$

- Il reste alors à démontrer que :

$$\text{La famille } (\varphi(u), \varphi(v), \varphi(w)) \text{ est libre} \quad \Leftrightarrow \quad \text{La famille } (u, v, w) \text{ est libre}$$

($\Rightarrow$) Supposons que la famille $(\varphi(u), \varphi(v), \varphi(w))$ est libre.
Démontrons que la famille $(u, v, w)$ est libre.

Soit $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3$. Supposons que : $\lambda_1 \cdot u + \lambda_2 \cdot v + \lambda_3 \cdot w = 0_{\mathbb{R}^\mathbb{N}}$.
En appliquant $\varphi$ de part et d'autre, on obtient :

$$\begin{array}{rrcll} & \varphi(\lambda_1 \cdot u + \lambda_2 \cdot v + \lambda_3 \cdot w) & = & 0_{\mathbb{R}^\mathbb{N}} & \\ \text{ainsi, par linéarité de } \varphi & \lambda_1 \cdot \varphi(u) + \lambda_2 \cdot \varphi(v) + \lambda_3 \cdot \varphi(w) & = & (0,0,0) & (\textit{car } \varphi(0_{\mathbb{R}^\mathbb{N}}) = (0,0,0)) \end{array}$$

La famille $(\varphi(u), \varphi(v), \varphi(w))$ étant libre, cette égalité démontre que $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$.
Ainsi, la famille $(u, v, w)$ est libre.

($\Leftarrow$) La démonstration est analogue, à ceci près qu'on applique l'application linéaire $\varphi^{-1}$ : $\mathbb{R}^3 \to F$ à l'égalité obtenue initialement.

$$\begin{array}{rrcl} \text{Si} & \lambda_1 \cdot \varphi(u) + \lambda_2 \cdot \varphi(v) + \lambda_3 \cdot \varphi(w) & = & (0,0,0) \\ \text{alors, par linéarité de } \varphi^{-1} & \lambda_1 \cdot u + \lambda_2 \cdot v + \lambda_3 \cdot w & = & 0_{\mathbb{R}^\mathbb{N}} \end{array}$$

- On en conclut :

$$\begin{array}{rcl} \text{La matrice } \begin{pmatrix} u_0 & v_0 & w_0 \\ u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \end{pmatrix} \text{ est inversible} & \Leftrightarrow & \text{rg}\left(\begin{pmatrix} u_0 & v_0 & w_0 \\ u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \end{pmatrix}\right) = 3 \\ & \Leftrightarrow & \text{La famille } (\varphi(u), \varphi(v), \varphi(w)) \text{ est libre} \\ & \Leftrightarrow & \text{La famille } (u, v, w) \text{ est libre} \\ & \Leftrightarrow & \text{La famille } (u, v, w) \text{ est une base de } F \end{array}$$

La dernière équivalence est vérifiée car $\dim(F) = 3$.

$$\boxed{\text{La famille } (\varphi(u), \varphi(v), \varphi(w)) \text{ est libre} \quad \Leftrightarrow \quad \text{La famille } (u, v, w) \text{ est une base de } F.}$$ □

***d)*** On suppose dans cette question : $a = 0$.

On note $s$, $s'$, $s''$ les suites définies par :

$$s = \varphi^{-1}\left((1,0,0)\right), \quad s' = \varphi^{-1}\left((0,1,0)\right), \quad s'' = \varphi^{-1}\left((0,0,1)\right)$$

Déterminer $s, s', s''$ (on donnera les dix premiers termes de chacune de ces trois suites).
En déduire la forme générale d'un élément de $F$.

*Démonstration.*

- Par définition, $s = \varphi^{-1}\left((1,0,0)\right)$. Ainsi, $s$ est l'unique suite $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que :

$$\left\{\begin{array}{l} \varphi(s) = (1,0,0) \\ s \in F \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} s_0 = 1 \\ s_1 = 0 \\ s_2 = 0 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ s_{n+3} = 3a\ s_{n+1} + (1-3a)\ s_n \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} s_0 = 1 \\ s_1 = 0 \\ s_2 = 0 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ s_{n+3} = s_n \end{array}\right.$$

La dernière équivalence est obtenue car, d'après l'énoncé, $a = 0$.

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{On en déduit que les 10 premiers termes de la suite } (s_n) \text{ sont :} \\ s_0 = 1, \quad s_1 = 0, \quad s_2 = 0, \quad s_3 = 1, \quad s_4 = 0, \quad s_5 = 0, \quad s_6 = 1, \quad s_7 = 0, \quad s_8 = 0, \quad s_9 = 1\end{array}}$$

*(la suite $(s_n)$ est périodique de période 3)*

- De même, $s'$ est l'unique suite $(s'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que :

$$\left\{\begin{array}{l} s'_0 = 0 \\ s'_1 = 1 \\ s'_2 = 0 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ s'_{n+3} = s'_n \end{array}\right.$$

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{On en déduit que les 10 premiers termes de la suite } (s'_n) \text{ sont :} \\ s'_0 = 0, \quad s'_1 = 1, \quad s'_2 = 0, \quad s'_3 = 0, \quad s'_4 = 1, \quad s'_5 = 0, \quad s'_6 = 0, \quad s'_7 = 1, \quad s'_8 = 0, \quad s'_9 = 0\end{array}}$$

*(la suite $(s'_n)$ est périodique de période 3)*

- Enfin, $s''$ est l'unique suite $(s''_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que :

$$\left\{\begin{array}{l} s''_0 = 0 \\ s''_1 = 0 \\ s''_2 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ s''_{n+3} = s''_n \end{array}\right.$$

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{On en déduit que les 10 premiers termes de la suite } (s''_n) \text{ sont :} \\ s''_0 = 0, \quad s''_1 = 0, \quad s''_2 = 1, \quad s''_3 = 0, \quad s''_4 = 0, \quad s''_5 = 1, \quad s''_6 = 0, \quad s''_7 = 0, \quad s''_8 = 1, \quad s''_9 = 0\end{array}}$$

*(la suite $(s''_n)$ est périodique de période 3)*

- La matrice :

$$\begin{pmatrix} s_0 & s'_0 & s''_0 \\ s_1 & s'_1 & s''_1 \\ s_2 & s'_2 & s''_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

est inversible (triangulaire supérieure à cœfficients diagonaux tous non nuls).

$$\boxed{\text{Ainsi, d'après la question précédente, la famille } (s, s', s'') \text{ forme une base de } F.}$$

- Tout élément de $F$ s'écrit de manière unique comme combinaison linéaire des vecteurs de la base $(s, s', s'')$. Ainsi, si $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in F$, il existe un unique triplet $(\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^3$ tel que :

$$u = \lambda_0 \cdot s + \lambda_1 \cdot s' + \lambda_2 \cdot s''$$

Ce qui signifie : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \lambda_0\ s_n + \lambda_1\ s'_n + \lambda_2\ s''_n$.

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{On en déduit que les 10 premiers termes de la suite } (u_n) \text{ sont : } u_0 = \lambda_0, \quad u_1 = \lambda_1,\\ u_2 = \lambda_2, \quad u_3 = \lambda_0, \quad u_4 = \lambda_1, \quad u_5 = \lambda_2, \quad u_6 = \lambda_0, \quad u_7 = \lambda_1, \quad u_8 = \lambda_2, \quad u_9 = \lambda_0\end{array}}$$

*(la suite $(u_n)$ est une suite périodique quelconque de période 3)* □

***e)*** Reprendre la question précédente dans le cas $a = \frac{1}{3}$.

*Démonstration.*

- Par définition, $s = \varphi^{-1}((1,0,0))$. Ainsi, $s$ est l'unique suite $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que :

$$\left\{\begin{array}{l}\varphi(s) = (1,0,0)\\ s \in F\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}s_0 = 1\\ s_1 = 0\\ s_2 = 0\\ \forall n \in \mathbb{N},\ s_{n+3} = 3a\ s_{n+1} + (1-3a)\ s_n\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}s_0 = 1\\ s_1 = 0\\ s_2 = 0\\ \forall n \in \mathbb{N},\ s_{n+3} = \dfrac{1}{3}\ s_{n+1}\end{array}\right.$$

La dernière équivalence est obtenue car, d'après l'énoncé, $a = \frac{1}{3}$.

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{On en déduit que les 10 premiers termes de la suite } (s_n) \text{ sont :}\\ s_0 = 1, \quad s_1 = 0, \quad s_2 = 0, \quad s_3 = 0, \quad s_4 = 0, \quad s_5 = 0, \quad s_6 = 0, \quad s_7 = 0, \quad s_8 = 0, \quad s_9 = 0\end{array}}$$

*(la suite $(s_n)$ est constante nulle, à partir du rang 1)*

- De même, $s'$ est l'unique suite $(s'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que :

$$\left\{\begin{array}{l}s'_0 = 0\\ s'_1 = 1\\ s'_2 = 0\\ \forall n \in \mathbb{N},\ s'_{n+3} = \dfrac{1}{3}\ s'_{n+1}\end{array}\right.$$

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{On en déduit que les 10 premiers termes de la suite } (s'_n) \text{ sont :}\\ s'_0 = 0, \quad s'_1 = 1, \quad s'_2 = 0, \quad s'_3 = 1, \quad s'_4 = 0, \quad s'_5 = 1, \quad s'_6 = 0, \quad s'_7 = 1, \quad s'_8 = 0, \quad s'_9 = 1\end{array}}$$

*(la suite $(s'_n)$ est périodique de période 2)*

- Enfin, $s''$ est l'unique suite $(s''_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que :

$$\left\{\begin{array}{l}s''_0 = 0\\ s''_1 = 0\\ s''_2 = 1\\ \forall n \in \mathbb{N},\ s''_{n+3} = \dfrac{1}{3}\ s''_{n+1}\end{array}\right.$$

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{On en déduit que les 10 premiers termes de la suite } (s''_n) \text{ sont :}\\ s''_0 = 0, \quad s''_1 = 0, \quad s''_2 = 1, \quad s''_3 = 0, \quad s''_4 = 1, \quad s''_5 = 0, \quad s''_6 = 1, \quad s''_7 = 0, \quad s''_8 = 1, \quad s''_9 = 0\end{array}}$$

*(la suite $(s''_n)$ est périodique de période 2, à partir du rang 1)*

- Si $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in F$, il existe un unique triplet $(\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^3$ tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \lambda_0\ s_n + \lambda_1\ s'_n + \lambda_2\ s''_n$$

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{On en déduit que les 10 premiers termes de la suite } (u_n) \text{ sont : } u_0 = \lambda_0, \quad u_1 = \lambda_1, \\ u_2 = \lambda_2, \quad u_3 = \lambda_1, \quad u_4 = \lambda_3, \quad u_5 = \lambda_1, \quad u_6 = \lambda_2, \quad u_7 = \lambda_1, \quad u_8 = \lambda_2, \quad u_9 = \lambda_1\end{array}}$$

*(la suite $(u_n)$ est une suite périodique quelconque de période 2, à partir du rang 1)* □

**2. Suites géométriques de $F$**

***a)*** Démontrer que la suite $(r^n)_{n\in\mathbb{N}}$ appartient à $F$ si, et seulement si, le réel $r$ est racine de la fonction polynomiale $p : x \mapsto x^3 - 3a\ x + 3a - 1$.
(avec la convention : $0^0 = 1$)

*Démonstration.*

- Par définition, la suite $s = (s_n)_{n\in\mathbb{N}} = (r^n)_{n\in\mathbb{N}}$ appartient à $F$ si :

$$\forall n \in \mathbb{N},\quad \underset{\displaystyle r^{n+3}}{\underset{\shortparallel}{s_{n+3}}} = 3a\ \underset{\displaystyle r^{n+1}}{\underset{\shortparallel}{u_{n+1}}} + (1-3a)\ \underset{\displaystyle r^{n}}{\underset{\shortparallel}{u_n}}$$

- Ainsi, si $n = 0$, on obtient : $r^3 = 3a\ r + (1-3a)\ r^0 = 3a\ r + (1-3a)$.
  *(cette égalité est obtenue même si $r = 0$ car d'après la convention, $r^0 = 0$)*
  Ce qui s'écrit :

$$r^3 - 3a\ r + 3a - 1\ =\ 0$$

$$\boxed{\text{Ainsi, si } (r^n)_{n\in\mathbb{N}} \in F \text{ alors } r \text{ est racine de } p.}$$

- Réciproquement, si $r$ est racine de $p$ alors : $r^3 = 3a\ r + (1-3a)$.
  Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on obtient en multipliant par $r^n$ :

$$r^{n+3} = 3a\ r^{n+1} + (1-3a)\ r^n$$

$$\boxed{\text{Ainsi, si } r \text{ est racine de } p \text{ alors } (r^n)_{n\in\mathbb{N}} \in F.}$$

□

***b)*** Déterminer, en fonction du réel $a$, le nombre de racines de la fonction $p$ ainsi que leur valeur.

*Démonstration.*

- Remarquons tout d'abord que 1 est racine évidente de $p$. On en déduit la factorisation :

$$p(X) = (X-1)\ (X^2 + X - (3a-1))$$

Notons $Q(X) = X^2 + X - (3a-1)$. Calculons le discriminant de $Q$ :

$$\Delta = 1 + 4\ (3a-1) = 12a - 3 = 3\ (4a-1)$$

Trois cas se produisent alors :
× si $4a - 1 > 0$ : alors $\Delta > 0$ et $Q$ admet deux racines distinctes :

$$r_+ = \frac{-1 + \sqrt{3}\ \sqrt{4a-1}}{2} \qquad \text{et} \qquad r_- = \frac{-1 - \sqrt{3}\ \sqrt{4a-1}}{2}$$

Il faut alors vérifier si ces racines peuvent être égales à la première racine 1.

$$\begin{array}{rcll} r_+ = 1 & \Leftrightarrow & \dfrac{-1+\sqrt{3}\ \sqrt{4a-1}}{2} = 1 & \\ & \Leftrightarrow & -1+\sqrt{3}\ \sqrt{4a-1} = 2 & \\ & \Leftrightarrow & \sqrt{3}\ \sqrt{4a-1} = 3 & \\ & \Leftrightarrow & 3\ (4a-1) = 9 & \textit{(car } \sqrt{3}\ \sqrt{4a-1} \geqslant 0 \textit{ et } 3 \geqslant 0\textit{)} \\ & \Leftrightarrow & 4a-1 = 3 & \\ & \Leftrightarrow & 4a = 4 \ \Leftrightarrow\ a = 1 & \end{array}$$

Le cas $r_- = 1$ peut être écarté de suite car $r_- \leqslant 0$ et $1 > 0$.

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{Si } a = 1 \text{ alors } p \text{ admet 2 racines distinctes : 1 et } r_-.\\ \text{Sinon, si } a > \frac{1}{4}, \text{ alors } p \text{ admet 3 racines distinctes : } 1,\ r_+ \text{ et } r_-.\end{array}}$$

× si $4a-1=0$ : alors $\Delta = 0$ et $Q$ admet une racine double.

$$\boxed{\text{Si } a = \frac{1}{4} \text{ alors } p \text{ admet 2 racines distinctes : 1 et } -\frac{1}{2}.}$$

× si $4a-1<0$ : alors $\Delta < 0$ et $Q$ n'admet pas de racine réelle.

$$\boxed{\text{Si } a < \frac{1}{4} \text{ alors } p \text{ admet 1 seule racine réelle : 1.}}$$

□

### *3.* Cas où $p$ admet trois racines distinctes

***a)*** Démontrer que, lorsque la fonction $p$ admet trois racines distinctes $1$, $r_1$ et $r_2$, les suites $\big(1\big)_{n\in\mathbb{N}}$, $\big({r_1}^n\big)_{n\in\mathbb{N}}$ et $\big({r_2}^n\big)_{n\in\mathbb{N}}$ forment une base de l'espace vectoriel $F$.

*Démonstration.*

- D'après la question ***II.1.c)***, la famille $((1)_{n\in\mathbb{N}}, (r_1)_{n\in\mathbb{N}}, (r_2)_{n\in\mathbb{N}})$ est une base de $F$ si et seulement si la matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & r_1 & r_2 \\ 1 & r_1^2 & {r_2}^2 \end{pmatrix}$ est inversible.
- Or :

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & r_1 & r_2 \\ 1 & r_1^2 & {r_2}^2 \end{pmatrix}\right) & \underset{}{\overset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1}}{=}} & \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & r_1 - 1 & r_2 - 1 \\ 0 & r_1^2 - 1 & {r_2}^2 - 1 \end{pmatrix}\right) \\ & \overset{L_3 \leftarrow L_3 - (r_1+1)\ L_2}{=} & \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & r_1 - 1 & r_2 - 1 \\ 0 & 0 & ({r_2}^2 - 1) - (r_2 - 1)\ (r_1 + 1) \end{pmatrix}\right) \end{array}$$

Précisons le dernier cœfficient diagonal.

$$\begin{array}{rcl} ({r_2}^2 - 1) - (r_2 - 1)\ (r_1 + 1) & = & (r_2 - 1)\ (r_2 + 1) - (r_2 - 1)\ (r_1 + 1) \\ & = & (r_2 - 1)\ \big((r_2 + 1) - (r_1 + 1)\big) \\ & = & (r_2 - 1)\ (r_2 - r_1) \end{array}$$

Ainsi, si $1$, $r_1$, $r_2$ sont des réels distincts, les cœfficients diagonaux de la réduite triangulaire supérieure obtenue sont tous non nuls.
Cette matrice est donc inversible et il en est de même de la matrice $M$ initiale.

> Si $p$ admet 3 racines distinctes 1, $r_1$ et $r_2$, la famille $\big((1)_{n\in\mathbb{N}}, ({r_1}^n)_{n\in\mathbb{N}}, ({r_2}^n)_{n\in\mathbb{N}}\big)$ forme une base de l'espace vectoriel $F$. □

***b)*** Dans le cas où $a = 7$, exprimer, en fonction de l'entier naturel $n$, le terme général $u_n$ de la suite, appartenant à $F$, qui vérifie : $u_0 = 1$, $u_1 = 10$, $u_2 = -8$.

*Démonstration.*

- Dans le cas où $a = 7$, on a $a \neq 1$ et $a > \frac{1}{4}$.
  On en déduit, d'après la question ***II.2.b)*** que $p$ admet trois racines distinctes :

$$1, \qquad r_1 = \frac{-1+\sqrt{3\times 27}}{2} = \frac{-1+\sqrt{81}}{2} = \frac{-1+9}{2} = 4, \qquad r_2 = \frac{-1-\sqrt{81}}{2} = \frac{-1-9}{2} = -5$$

- Ainsi, la famille $\big((1)_{n\in\mathbb{N}}, ({r_1}^n)_{n\in\mathbb{N}}, ({r_2}^n)_{n\in\mathbb{N}}\big)$ forme une base de $F$.
  Comme $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in F$, il existe un unique triplet $(\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^3$ tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \lambda_0\ 1 + \lambda_1\ {r_1}^n + \lambda_2\ {r_2}^n$$

  En considérant $n = 0$, $n = 1$, $n = 2$, on obtient le système :

$$\left\{\begin{array}{rcl} u_0 & = & \lambda_0\ 1 + \lambda_1\ {r_1}^0 + \lambda_2\ {r_2}^0 \\ u_1 & = & \lambda_0\ 1 + \lambda_1\ r_1 + \lambda_2\ r_2 \\ u_2 & = & \lambda_0\ 1 + \lambda_1\ {r_1}^2 + \lambda_2\ {r_2}^2 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcrcrcr} \lambda_0 & + & \lambda_1 & + & \lambda_2 & = & 1 \\ \lambda_0 & + & 4\ \lambda_1 & - & 5\lambda_2 & = & 10 \\ \lambda_0 & + & 16\ \lambda_1 & + & 25\ \lambda_2 & = & -8 \end{array}\right.$$

$$\underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1}}{\iff} \left\{\begin{array}{rcrcrcr} \lambda_0 & + & \lambda_1 & + & \lambda_2 & = & 1 \\ & & 3\ \lambda_1 & - & 6\ \lambda_2 & = & 9 \\ & & 15\ \lambda_1 & + & 24\ \lambda_2 & = & -9 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcr} \lambda_0 & + & \lambda_1 & + & \lambda_2 & = & 1 \\ & & \lambda_1 & - & 2\ \lambda_2 & = & 3 \\ & & 5\ \lambda_1 & + & 8\ \lambda_2 & = & -3 \end{array}\right.$$

$$\underset{L_3 \leftarrow L_3 - 5\ L_1}{\iff} \left\{\begin{array}{rcrcrcr} \lambda_0 & + & \lambda_1 & + & \lambda_2 & = & 1 \\ & & \lambda_1 & - & 2\ \lambda_2 & = & 3 \\ & & & & 18\ \lambda_2 & = & -18 \end{array}\right.$$

$$\underset{\substack{L_3 \leftarrow \frac{1}{18}\ L_3 \\ L_2 \leftarrow L2 + 2\ L_3 \\ L_1 \leftarrow L_1 - L_3}}{\iff} \left\{\begin{array}{rcrcrcr} \lambda_0 & + & \lambda_1 & & & = & 2 \\ & & \lambda_1 & & & = & 1 \\ & & & & \lambda_2 & = & -1 \end{array}\right.$$

$$\underset{L_1 \leftarrow L_1 - L_2}{\iff} \left\{\begin{array}{rrrcr} \lambda_0 & & & = & 1 \\ & \lambda_1 & & = & 1 \\ & & \lambda_2 & = & -1 \end{array}\right.$$

$$\boxed{\text{Ainsi, pour tout } n \in \mathbb{N},\ u_n = 1 + 4^n - (-5)^n}$$

□

### *4.* Cas où $p$ admet une racine double

***a)*** Soit $r$ un nombre réel et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de terme général $nr^n$.
Démontrer que, pour tout $n$ de $\mathbb{N}$ :

$$u_{n+3} - 3a\ u_{n+1} - (1-3a)\, u_n = r^n \left(n\ p\,(r) + r\ p'\,(r)\right)$$

*Démonstration.*
Soit $n \in \mathbb{N}$. Par définition de la suite $(u_n)$ :

$$\begin{array}{rl} & u_{n+3} - 3a\ u_{n+1} - (1-3a)\ u_n \\ = & (n+3)\ r^{n+3} - 3a\ (n+1)\ r^{n+1} - (1-3a)\ n\ r^n \\ = & r^n\Big((n+3)\ r^3 - 3a\ (n+1)\ r - (1-3a)\ n\Big) \\ = & r^n\Big(n\ \big(r^3 - 3a\ r - (1-3a)\big) + \big(3\ r^3 - 3a\ r\big)\Big) \\ = & r^n\Big(n\ \big(r^3 - 3a\ r + (3a-1)\big) + r\ \big(3\ r^2 - 3a\big)\Big) \\ = & r^n\Big(n\ p(r) + r\ p'(r)\Big) \end{array}$$

$$\boxed{\text{Ainsi, pour tout } n \in \mathbb{N},\ u_{n+3} - 3a\ u_{n+1} - (1-3a)\ u_n = r^n\Big(n\ p(r) + r\ p'(r)\Big).}$$

□

***b)*** En déduire que, lorsque $p$ admet une racine double $r_0$ et une racine simple $r_1$ la suite $(n\ {r_0}^n)_{n\in\mathbb{N}}$ appartient à $F$, et démontrer que les suites $({r_0}^n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(n\ {r_0}^n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $({r_1}^n)_{n\in\mathbb{N}}$ forment une base de $F$.

*Démonstration.*
Supposons que $p$ admet une racine double $r_0$ et une racine simple $r_1$.

- Alors, par définition de $r_0$ : $p(r_0) = 0$ et $p'(r_0) = 0$.
  Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$ :

$$\begin{array}{rcll} u_{n+3} - 3a\ u_{n+1} - (1-3a)\ u_n & = & {r_0}^n\Big(n\ p(r_0) + r_0\ p'(r_0)\Big) & \textit{(d'après la question précédente)} \\ & = & 0 & \end{array}$$

$$\boxed{\text{Ainsi, } (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in F.}$$

- Les suites $({r_0}^n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(n\ {r_0}^n)_{n\in\mathbb{N}}$, $({r_1}^n)_{n\in\mathbb{N}}$ étant dans $F$, alors, d'après la question ***II.1.c)***, elles en forment une base si et seulement si la matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ r_0 & r_0 & r_1 \\ {r_0}^2 & 2\ {r_0}^2 & {r_1}^2 \end{pmatrix}$ est inversible.

- Or :

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ r_0 & r_0 & r_1 \\ {r_0}^2 & 2\ {r_0}^2 & {r_1}^2 \end{pmatrix}\right) & \underset{L_3 \leftarrow L_3 - {r_0}^2\ L_1}{\overset{L_2 \leftarrow L_2 - r_0\ L_1}{=}} & \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & r_0 & r_1 - r_0 \\ 0 & 2\ {r_0}^2 & {r_1}^2 - {r_0}^2 \end{pmatrix}\right) \\ & \overset{L_3 \leftarrow L_3 - 2r_0\ L_2}{=} & \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & r_0 & r_1 - r_0 \\ 0 & 0 & ({r_1}^2 - {r_0}^2) - 2r_0\ (r_1 - r_0) \end{pmatrix}\right) \end{array}$$

Précisons le dernier cœfficient diagonal.

$$\begin{array}{rcl} ({r_1}^2 - {r_0}^2) - 2r_0 \ (r_1 - r_0) & = & {r_1}^2 - 2 \ r_0 r_1 + {r_2}^2 \\ & = & (r_1 - r_0)^2 \end{array}$$

Ainsi, comme $r_0 \neq 0$ (d'après la question ***II.2.b)***, $r_0 = -\frac{1}{2}$), et $r_1 \neq r_0$, les cœfficients diagonaux de la réduite triangulaire supérieure obtenue sont tous non nuls.
Cette matrice est donc inversible et il en est de même de la matrice $M$ initiale.

$$\boxed{\text{La famille } \Big( \big({r_0}^n\big)_{n\in\mathbb{N}}, \big(n \ {r_0}^n\big)_{n\in\mathbb{N}}, \big({r_1}^n\big)_{n\in\mathbb{N}} \Big) \text{ forme une base de } F.}$$

□

***c)*** Dans le cas où $a = \frac{1}{4}$, exprimer le terme général $u_n$ d' un élément quelconque $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $F$ en fonction de $u_0$, $u_1$ et $u_2$ et de l'entier naturel $n$.
Préciser la limite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ .

*Démonstration.*

- D'après la question ***II.2.c)***, le cas $a = \frac{1}{4}$ correspond au cas où $p$ admet une racine double $r_0 = -\frac{1}{2}$ et une racine simple $r_1 = 1$.
- D'après la question précédente, la famille $\big(({r_0}^n)_{n\in\mathbb{N}}, (n{r_0}^n)_{n\in\mathbb{N}}, (1)_{n\in\mathbb{N}}\big)$ forme une base de $F$.
  Comme $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in F$, il existe un unique triplet $(\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^3$ tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \ u_n = \lambda_0 \ {r_0}^n + \lambda_1 \ n{r_0}^n + \lambda_2 \ 1$$

En considérant $n = 0$, $n = 1$, $n = 2$, on obtient le système :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} u_0 & = & \lambda_0 \ {r_0}^0 + \lambda_2 \\ u_1 & = & \lambda_0 \ r_0 + \lambda_1 \ r_0 + \lambda_2 \\ u_2 & = & \lambda_0 \ {r_0}^2 + \lambda_1 \ 2{r_0}^2 + \lambda_2 \end{array} \right.$$

$$\iff \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} \lambda_0 & & & + & \lambda_2 & = & u_0 \\ -\frac{1}{2}\lambda_0 & - & \frac{1}{2} \ \lambda_1 & + & \lambda_2 & = & u_1 \\ \frac{1}{4} \ \lambda_0 & + & \frac{1}{2} \ \lambda_1 & + & \lambda_2 & = & u_2 \end{array} \right.$$

$$\underset{\substack{L_2 \leftarrow 2 \ L_2 \\ L_3 \leftarrow 4 \ L_3}}{\iff} \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} \lambda_0 & & & + & \lambda_2 & = & u_0 \\ -\lambda_0 & - & \lambda_1 & + & 2 \ \lambda_2 & = & 2 \ u_1 \\ \lambda_0 & + & 2 \ \lambda_1 & + & 4 \ \lambda_2 & = & 4 \ u_2 \end{array} \right.$$

$$\underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 + L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1}}{\iff} \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} \lambda_0 & & & + & \lambda_2 & = & u_0 \\ & - & \lambda_1 & + & 3 \ \lambda_2 & = & u_0 + 2 \ u_1 \\ & & 2 \ \lambda_1 & + & 3 \ \lambda_2 & = & -u_0 \quad 4 \ u_2 \end{array} \right.$$

$$\underset{L_3 \leftarrow L_3 + 2 \ L_2}{\iff} \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} \lambda_0 & & & + & \lambda_2 & = & u_0 \\ & - & \lambda_1 & + & 3 \ \lambda_2 & = & u_0 + 2 \ u_1 \\ & & & & 9 \ \lambda_2 & = & u_0 + 4 \ u_1 + 4 \ u_2 \end{array} \right.$$

$$\underset{\substack{L_1 \leftarrow 9 \ L_1 - L_3 \\ L_2 \leftarrow 3 \ L_2 - L_3}}{\iff} \left\{ \begin{array}{rcrcl} 9 \ \lambda_0 & & & = & 8 \ u_0 - 4 \ u_1 - 4 \ u_2 \\ & - \ 3 \ \lambda_1 & & = & 2 \ u_0 + 2 \ u_1 - 4 \ u_2 \\ & & 9 \ \lambda_2 & = & u_0 + 4 \ u_1 + 4 \ u_2 \end{array} \right.$$

On en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$ :
$$u_n = \frac{1}{9}\ (8u_0 - 4u_1 - 4u_2)\ \left(-\frac{1}{2}\right)^n - \frac{1}{3}\ (2u_0 + 2u_1 - 4u_2)\ n \left(-\frac{1}{2}\right)^n + \frac{1}{9}\ (u_0 + 4u_1 + 4u_2)$$

Il reste alors à remarquer :

× $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^n = 0$ car $|-\frac{1}{2}| = \frac{1}{2} < 1$.

× $\lim\limits_{n\to+\infty} n \left(-\frac{1}{2}\right)^n = 0$ pour la raison précédente.

Ainsi, la suite $(u_n)$ est convergente, de limite $\frac{1}{9}\ (u_0 + 4u_1 + 4u_2)$.

□

## Exercice 2 (EML 1996)

Pour tout entier naturel $n$, on note $I_n = \displaystyle\int_0^1 x^n\ \mathrm{e}^{-x}\ dx$.

***1. a)*** Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant I_n \leqslant \dfrac{1}{n+1}$.

*Démonstration.*
Soit $n \in \mathbb{N}$.

- La fonction $f : x \mapsto x^n\ \mathrm{e}^{-x}$ est continue sur $[0, 1]$.
- Soit $x \in [0, 1]$. La fonction $x \mapsto \mathrm{e}^{-x}$ étant décroissante, on a :
$$0 \leqslant \mathrm{e}^{-1} \leqslant \mathrm{e}^{-x} \leqslant \mathrm{e}^{-0} = 1$$
En multipliant par $x^n \geqslant 0$ de part et d'autre :
$$0 \leqslant x^n\ \mathrm{e}^{-x} \leqslant x^n$$
Enfin, par croissance de l'intégrale, les bornes étant dans l'ordre croissant $(1 \geqslant 0)$ :
$$0 \ \leqslant\ \underbrace{\int_0^1 x^n\ \mathrm{e}^{-x}\ dx}_{= I_n} \ \leqslant\ \underbrace{\int_0^1 x^n\ dx}_{= \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1} = \frac{1}{n+1}$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant I_n \leqslant \frac{1}{n+1}}$$

□

***b)*** En déduire que la suite $(I_n)$ converge et donner sa limite.

*Démonstration.*
Remarquons tout d'abord :

× $\lim\limits_{n \to +\infty} 0 = 0$,

× $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{n+1} = 0$.

$$\boxed{\text{Ainsi, par le théorème d'encadrement, la suite } (I_n) \text{ est convergente, et } \lim_{n \to +\infty} u_n = 0.}$$

□

***2.*** À l'aide d'une intégration par parties, établir que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ I_n = \frac{1}{(n+1)\ \mathrm{e}} + \frac{I_{n+1}}{n+1}$$

*Démonstration.*
On procède par intégration par parties (IPP).

$$\left|\begin{array}{ll} u(x) = \mathrm{e}^{-x} & u'(x) = -\mathrm{e}^{-x} \\[2ex] v'(x) = x^n & v(x) = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} \end{array}\right.$$

Cette IPP est valide car $u$ et $v$ sont $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$. On obtient :

$$\begin{array}{rcl} \displaystyle\int_0^1 x^n\ \mathrm{e}^{-x}\ dx & = & \dfrac{1}{n+1}\ \Big[\ x^{n+1}\ \mathrm{e}^{-x}\ \Big]_0^1 \ + \ \dfrac{1}{n+1} \displaystyle\int_0^1 x^{n+1}\ \mathrm{e}^{-x}\ dx \\[2ex] & = & \dfrac{1}{n+1}\ \left(\mathrm{e}^{-1} - 0 \times \mathrm{e}^0\right) \ + \ \dfrac{1}{n+1}\ I_{n+1} \end{array}$$

$$\boxed{\text{Ainsi, pour tout } n \in \mathbb{N},\ I_n = \frac{1}{(n+1)\ \mathrm{e}} + \frac{I_{n+1}}{n+1}}$$

**Remarque**
Évidemment, il est possible de procéder en partant de $I_{n+1}$.
L'intégration par parties s'écrit alors :

$$\left|\begin{array}{ll} u(x) = x^{n+1} & u'(x) = (n+1)\ x^n \\[2ex] v'(x) = \mathrm{e}^{-x} & v(x) = \mathrm{e}^{-x} \end{array}\right.$$

Et on obtient :

$$\begin{array}{rcl} \displaystyle\int_0^1 x^{n+1}\ \mathrm{e}^{-x}\ dx & = & \Big[\ x^{n+1}\ \mathrm{e}^{-x}\ \Big]_0^1 \ - \ (n+1) \displaystyle\int_0^1 x^n\ \mathrm{e}^{-x}\ dx \\[2ex] & = & \left(\mathrm{e}^{-1} - 0 \times \mathrm{e}^0\right) \ - \ (n+1)\ I_n \end{array}$$

On obtient le résultat souhaité en réordonnant.

□

***3.*** ***a)*** En déduire que $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant I_n - \dfrac{1}{(n+1)\ \mathrm{e}} \leqslant \dfrac{1}{(n+1)(n+2)}$.

*Démonstration.*
Soit $n \in \mathbb{N}$.

- D'après la question ***2.*** : $I_n - \dfrac{1}{(n+1)\ \mathrm{e}} = \dfrac{I_{n+1}}{n+1}$.
- Or, d'après la question ***1.a)*** : $0 \leqslant I_{n+1} \leqslant \dfrac{1}{n+2}$. Comme $\dfrac{1}{n+1} \geqslant 0$, on en déduit :

$$0 \leqslant \frac{I_{n+1}}{(n+1)\ \mathrm{e}} \leqslant \frac{1}{(n+1)(n+2)}$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant I_n - \frac{1}{(n+1)\ \mathrm{e}} \leqslant \frac{1}{(n+1)(n+2)}}$$

□

***b)*** Trouver un équivalent simple de $I_n$ quand $n$ tend vers $+\infty$.

*Démonstration.*
Soit $n \in \mathbb{N}$.

- D'après la question précédente :

$$\frac{1}{(n+1)\ \mathrm{e}} \ \leqslant\ I_n \ \leqslant\ \frac{1}{(n+1)\ \mathrm{e}} + \frac{1}{(n+1)(n+2)}$$

- Comme $\dfrac{1}{(n+1)\ \mathrm{e}} > 0$, on en déduit :

$$1 \ \leqslant\ \frac{I_n}{\frac{1}{(n+1)\ \mathrm{e}}} \ \leqslant\ (n+1)\ \mathrm{e}\left(\frac{1}{(n+1)\ \mathrm{e}} + \frac{1}{(n+1)(n+2)}\right) = 1 + \frac{\cancel{(n+1)}\ \mathrm{e}}{\cancel{(n+1)}(n+2)}$$

- Or :
  × $\lim\limits_{n\to+\infty} 1 = 1$,
  × $\lim\limits_{n\to+\infty} 1 + \dfrac{\mathrm{e}}{n+2} = 1$.

  Ainsi, par le théorème d'encadrement : $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{I_n}{\frac{1}{(n+1)\ \mathrm{e}}} = 1$.

  Ce qui revient à dire : $I_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{(n+1)\ \mathrm{e}}$.

$$\boxed{\text{Comme } n+1 \underset{n\to+\infty}{\sim} n, \text{ on en conclut : } I_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n\ \mathrm{e}}}$$

**Remarque**
On pouvait aussi divisier l'encadrement par $\dfrac{1}{n\ \mathrm{e}}$ :

$$\frac{n\ \cancel{\mathrm{e}}}{(n+1)\ \cancel{\mathrm{e}}} \ \leqslant\ I_n \ \leqslant\ \frac{n\ \cancel{\mathrm{e}}}{(n+1)\ \cancel{\mathrm{e}}} + \frac{n\ \mathrm{e}}{(n+1)(n+2)}$$

et conclure une nouvelle fois par le théorème d'encadrement.

□

## Problème (EDHEC 1998)

La partie ***I*** permet d'établir des résultats utiles pour les parties ***II*** et ***III***.
Les parties ***II*** et ***III*** sont indépendantes entre elles.
On considère la fonction $f$ définie pour tout réel $x$ positif ou nul par $f(x) = 1 - \mathrm{e}^{-x}$.

### Partie I

***1. a)*** Dresser le tableau de variations de $f$.

*Démonstration.*

- La fonction $f$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ car la fonction $x \mapsto \mathrm{e}^{-x}$ l'est comme composée de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$.
- Soit $x \in \mathbb{R}_+$. Alors :
$$f'(x) = \mathrm{e}^{-x} > 0$$
- On en déduit le tableau de variations suivant :

| $x$ | $0$ $\qquad\qquad$ $+\infty$ |
|---|---|
| Signe de $f'(x)$ | $+$ |
| Variations de $f$ | $0 \nearrow 1$ |

En effet :

× $\lim\limits_{x\to 0} 1 - \mathrm{e}^{-x} = 1 - \mathrm{e}^{-0} = 1 - 1 = 0$,

× $\lim\limits_{x\to +\infty} 1 - \mathrm{e}^{-x} = 1 - 0 = 1$.

□

***b)*** Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}_+,\ f(x) \leqslant x$, l'égalité ayant lieu seulement pour $x = 0$.

*Démonstration.*

- Notons $h : x \mapsto f(x) - x$.
La fonction $h$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ car $f$ l'est. De plus :
$$\forall x \in \mathbb{R}_+,\ h'(x) = f'(x) - 1 = \mathrm{e}^{-x} - 1 = -f(x)$$
- Or, pour tout $x \in \mathbb{R}_+ \setminus \{0\}$, $f(x) < 0$.
On en déduit que $h$ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+$.
Comme de plus $h(0) = 0$ alors, pour tout $x \in ]0, +\infty[$ : $h(x) < 0$.

$\boxed{\text{On en déduit ainsi que } \forall x \in \mathbb{R}_+,\ f(x) \leqslant x \text{, l'égalité ayant lieu seulement pour } x = 0.}$

**Remarque**

- On pouvait aussi invoquer un argument de convexité.
La fonction $f$ est $\mathcal{C}^2$ sur $]0, +\infty[$. De plus :
$$\forall x \geqslant 0,\ f''(x) = -\mathrm{e}^{-x} < 0$$
Ainsi la fonction $f$ est concave sur $[0, +\infty[$. Sa courbe représentative est donc située en dessous de ses tangentes. En particulier, elle est en dessous de sa tangente en 0, droite d'équation :
$$y = f(0) + f'(0)\ (x - 0) = x$$
- On peut toujours penser à ce type d'argument lorsqu'il s'agit de comparer une fonction $f$ à une fonction affine (dont la courbe représentative est une droite).

□

*2.* ***a)*** Montrer que, pour tout entier naturel $n$ et pour tout réel $x$ :

$$e^{-x} = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k\ x^k}{k!} + (-1)^{n+1} \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!}\ e^{-t}\ dt$$

*Démonstration.*
Démontrons par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$

où $\mathcal{P}(n)$ : $\forall x \in \mathbb{R}$, $e^{-x} = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k\ x^k}{k!} + (-1)^{n+1} \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!}\ e^{-t}\ dt$.

- **Initialisation** :

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{0} \frac{(-1)^k\ x^k}{k!} + (-1)^1 \int_0^x \frac{(x-t)^0}{0!}\ e^{-t}\ dt &= \frac{(-1)^0\ x^0}{0!} - \int_0^x e^{-t}\ dt = 1 - \Big[\ -e^{-t}\ \Big]_0^x \\ &= 1 + \Big[\ e^{-t}\ \Big]_0^x = \cancel{1} + (e^{-x} - \cancel{e^0}) = e^{-x}\end{aligned}$$

  D'où $\mathcal{P}(0)$.

- **Hérédité** : soit $n \in \mathbb{N}$.
  Supposons $\mathcal{P}(n)$ et démontrons $\mathcal{P}(n+1)$

  ($i.e.$ : $\forall x \in \mathbb{R}$, $e^{-x} = \sum\limits_{k=0}^{n+1} \frac{(-1)^k\ x^k}{k!} + (-1)^{n+2} \int_0^x \frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!}\ e^{-t}\ dt$).

  - Soit $x \in \mathbb{R}$. Par hypothèse de récurrence :

$$e^{-x} = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k\ x^k}{k!} + (-1)^{n+1} \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!}\ e^{-t}\ dt$$

  Procédons par intégration par parties (IPP).

$$\left|\begin{array}{ll} u(t) = e^{-t} & u'(t) = -e^{-t} \\ v'(t) = \dfrac{(x-t)^n}{n!} & v(t) = \dfrac{-1}{n+1}\ \dfrac{(x-t)^{n+1}}{n!} = -\dfrac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!} \end{array}\right.$$

  Cette IPP est valide car $u$ et $v$ sont $\mathcal{C}^1$ sur $[0, x]$. On obtient :

$$\begin{aligned}\int_0^t \frac{(x-t)^{n+1}}{n!}\ dt &= \frac{-1}{(n+1)!}\ \Big[\ (x-t)^{n+1}\ e^{-t}\ \Big]_0^x - \int_0^x \frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!}\ e^{-t}\ dt \\ &= \frac{-1}{(n+1)!}\ \big(0 \times e^{-x} - x^{n+1}\ e^{-0}\big) - \int_0^x \frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!}\ e^{-t}\ dt \\ &= \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} - \int_0^x \frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!}\ e^{-t}\ dt\end{aligned}$$

  On en déduit :

$$\begin{aligned}e^{-x} &= \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k\ x^k}{k!} + (-1)^{n+1} \left( \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} - \int_0^x \frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!}\ e^{-t}\ dt \right) \\ &= \sum_{k=0}^{n+1} \frac{(-1)^k\ x^k}{k!} + (-1)^{n+2} \int_0^x \frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!}\ e^{-t}\ dt\end{aligned}$$

  D'où $\mathcal{P}(n+1)$.

Ainsi, par principe de récurrence :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R},\ e^{-x} = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k\ x^k}{k!} + (-1)^{n+1} \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!}\ e^{-t}\ dt}$$

**Remarque**

- Cette question est un cas particulier de la formule de Taylor avec reste intégral.
Considérons une fonction $f$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$ :
$$f(x) \;=\; \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k\ f^{(k)}(0)}{k!}\ x^k + (-1)^{n+1} \int_0^x \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}\ (x-t)^n\ dt$$
ce qu'on peut encore généraliser. Pour tout $a \in \mathbb{R}$ :
$$f(x) \;=\; \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k\ f^{(k)}(a)}{k!}\ (x-a)^k + (-1)^{n+1} \int_a^x \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}\ (x-t)^n\ dt$$
La démonstration se fait exactement comme celle que l'on vient de faire : par récurrence et à l'aide d'une IPP.
- Ce résultat, dont la démonstration ne nécessite que des outils basiques, permet de démontrer qu'une fonction de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur $\mathbb{R}$ (en réalité, l'hypothèse minimale pour ce résultat est d'exiger $f$ $n$ fois dérivable) admet un développement limité en tout point $a \in \mathbb{R}$. Classe ! □

***b)*** En écrivant l'égalité précédente pour $n = 2$, puis pour $n = 3$, montrer que :
$$\forall x \in \mathbb{R}_+,\ \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} \leqslant x - f(x) \leqslant \frac{x^2}{2}$$

*Démonstration.*
Soit $x \in \mathbb{R}_+$.

- Pour $n = 2$, l'égalité se réécrit :
$$\begin{aligned} e^{-x} &= \sum_{k=0}^{2} \frac{(-1)^k\ x^k}{k!} + (-1)^3 \int_0^x \frac{(x-t)^2}{2!}\ e^{-t}\ dt \\ &= \frac{(-1)^0\ x^0}{0!} + \frac{(-1)^1\ x^1}{1!} + \frac{(-1)^2\ x^2}{2} - \int_0^x \frac{(x-t)^2}{2}\ e^{-t}\ dt \\ &= 1 - x + \frac{x^2}{2} - \int_0^x \frac{(x-t)^2}{2}\ e^{-t}\ dt \end{aligned}$$
Ainsi :
$$\underbrace{1 - e^{-x}}_{f(x)} \;=\; \cancel{1} - \left(\cancel{1} - x + \frac{x^2}{2} - \int_0^x \frac{(x-t)^2}{2}\ e^{-t}\ dt\right) \;=\; x - \frac{x^2}{2} + \int_0^x \frac{(x-t)^2}{2}\ e^{-t}\ dt$$
Enfin :
$$x - f(x) \;=\; \frac{x^2}{2} - \int_0^x \frac{(x-t)^2}{2}\ e^{-t}\ dt$$
- Or, pour tout $t \in [0, x]$ : $\dfrac{(x-t)^2}{2} \geqslant 0$.
Ainsi, par croissance de l'intégrale, les bornes étant dans l'ordre croissance ($0 \leqslant x$) :
$$\int_0^x \frac{(x-t)^2}{2}\ e^{-t}\ dt \geqslant 0 \quad \text{et} \quad -\int_0^x \frac{(x-t)^2}{2}\ e^{-t}\ dt \leqslant 0$$
$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}_+,\ x - f(x) \;\leqslant\; \frac{x^2}{2} - \int_0^x \frac{(x-t)^2}{2}\ e^{-t}\ dt \;\leqslant\; \frac{x^2}{2}}$$

- On procède de même pour $n = 3$. L'égalité se réécrit :

$$e^{-x} \quad = \quad 1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + \int_0^x \frac{(x-t)^3}{6} \ e^{-t} \ dt$$

Ainsi :

$$x - f(x) \ = \ \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + \int_0^x \frac{(x-t)^3}{6} \ e^{-t} \ dt$$

- Or, pour tout $t \in [0, x]$ : $\dfrac{(x-t)^3}{2} \geqslant 0$.
Ainsi, par croissance de l'intégrale, les bornes étant dans l'ordre croissance $(0 \leqslant x)$ :

$$\int_0^x \frac{(x-t)^3}{6} \ e^{-t} \ dt \geqslant 0$$

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}_+, \ x - f(x) \ \geqslant \ \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + \int_0^x \frac{(x-t)^3}{6} \ e^{-t} \ dt \ \geqslant \ \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6}}$$

□

## Partie II

On considère la suite $(u_n)$ définie par son premier terme $u_0 = 1$ et par la relation :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \ u_{n+1} = f(u_n)$$

***1. a)*** Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, \ u_n \in \, ]0, 1]$.

*Démonstration.*
Démontrons par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}, \mathcal{P}(n)$ où $\mathcal{P}(n) : u_n \in \, ]0, 1]$.

- **Initialisation** :
D'après l'énoncé : $u_0 = 1 \in \, ]0, 1]$.
D'où $\mathcal{P}(0)$.
- **Hérédité** : soit $n \in \mathbb{N}$.
Supposons $\mathcal{P}(n)$ et démontrons $\mathcal{P}(n+1)$ (*i.e.* $u_{n+1} \in \, ]0, 1]$).
Par hypothèse de récurrence : $0 < u_n \leqslant 1$.
Par application de la fonction $f$, strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$ :

$$\begin{array}{ccccc} f(0) & < & f(u_n) & \leqslant & f(1) \\ \shortparallel & & \shortparallel & & \shortparallel \\ 0 & & u_{n+1} & & 1 \end{array}$$

D'où $\mathcal{P}(n+1)$.

$$\boxed{\text{Par principe de récurrence : } \forall n \in \mathbb{N}, \, u_n \in \, ]0, 1].}$$

□

***b)*** Montrer, grâce à la question ***I.1)***, que : $\forall n \in \mathbb{N}, \ u_n - u_{n+1} \geqslant 0$.

*Démonstration.*
Soit $n \in \mathbb{N}$. Nous avons démontré, en question ***I.1)*** :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \ f(x) \ \leqslant \ x$$

En appliquant cette inégalité à $x = u_n \in \, ]0, 1] \subset \mathbb{R}_+$, on obtient : $u_{n+1} \leqslant u_n$.

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \, u_{n+1} \leqslant u_n}$$

□

***c)*** Conclure quant à la convergence de la suite $(u_n)$ et donner sa limite.

*Démonstration.*

- La suite $(u_n)$ est :
  - × décroissante d'après la question précédente,
  - × minorée par 0 d'après la question ***II.1.a)***.

  Elle est donc convergente vers une limite $\ell \in [0, 1]$.
  De plus, comme $f$ est continue en $\ell$ (puisque continue sur $\mathbb{R}$) la suite $(f(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente, de limite $f(\ell)$.
- On passe alors à la limite dans l'égalité de définition de la suite $(u_n)$ :

$$\begin{array}{ccc} u_{n+1} & = & f(u_n) \\ {\scriptstyle n\to+\infty}\downarrow & & {\scriptstyle n\to+\infty}\downarrow \\ \ell & = & f(\ell) \end{array}$$

  Ainsi, $\ell$ est un point fixe de $f$.
  Or, d'après la question ***I.1.b)***, le seul point fixe de $f$ est 0.

$$\boxed{\text{La suite } (u_n) \text{ est convergente de limite } \ell = 0}$$

□

***2. a)*** Simplifier, pour tout $n$ élément de $\mathbb{N}^*$, la somme $\sum\limits_{k=0}^{n-1} (u_k - u_{k+1})$.

*Démonstration.*
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On reconnaît une somme télescopique :

$$\sum_{k=0}^{n-1} (u_k - u_{k+1}) = u_0 - u_n$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=0}^{n-1} (u_k - u_{k+1}) = 1 - u_n}$$

□

***b)*** En déduire que la série de terme général $(u_n - u_{n+1})$ est convergente.

*Démonstration.*

$$\sum_{k=0}^{n-1} (u_k - u_{k+1}) = 1 - u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1 - 0 = 1$$

$$\boxed{\text{Ainsi, la série } \sum (u_n - u_{n+1}) \text{ est convergente, de somme } \sum_{k=0}^{+\infty} (u_k - u_{k+1}) = 1.}$$

□

***c)*** En utilisant la question ***I.2)***, montrer que $u_n - u_{n+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{{u_n}^2}{2}$ en $+\infty$.

*Démonstration.*

- On a démontré en quesiton ***I.2.b)*** :

$$\forall x \in \mathbb{R}^+,\ \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} \ \leqslant\ x - f(x) \ \leqslant\ \frac{x^2}{2}$$

  On applique cette inégalité à $x = u_n \in \,]0,1] \subset \mathbb{R}_+$. On obtient :

$$\frac{{u_n}^2}{2} - \frac{{u_n}^3}{6} \ \leqslant\ u_n - f(u_n) \ \leqslant\ \frac{{u_n}^2}{2}$$

- Ainsi, en divisant par $\dfrac{{u_n}^2}{2} > 0$, on obtient :

$$\frac{\frac{{u_n}^2}{2}}{\frac{{u_n}^2}{2}} - \frac{\frac{{u_n}^3}{6}}{\frac{{u_n}^2}{2}} \ \leqslant\ \frac{u_n - u_{n+1}}{\frac{{u_n}^2}{2}} \ \leqslant\ \frac{\frac{{u_n}^2}{2}}{\frac{{u_n}^2}{2}}$$

  ce qui se simplifie en :

$$1 - \frac{u_n}{3} \ \leqslant\ \frac{u_n - u_{n+1}}{\frac{{u_n}^2}{2}} \ \leqslant\ 1$$

- Enfin :
  × $\lim\limits_{n\to+\infty} 1 - \dfrac{u_n}{3} = 1$,
  × $\lim\limits_{n\to+\infty} 1 = 1$.

  Ainsi, par théorème d'encadrement, la suite $\left(\dfrac{u_n - u_{n+1}}{\frac{{u_n}^2}{2}}\right)$ est convergente, de limite 1.

$$\boxed{u_n - u_{n+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{{u_n}^2}{2}}$$

□

***d)*** Donner enfin la nature de la série de terme général ${u_n}^2$.

*Démonstration.*
D'après ce qui précède :

× ${u_n}^2 \underset{n\to+\infty}{\sim} 2\ (u_n - u_{n+1})$ $(\geqslant 0)$

× La série $\sum\ (u_n - u_{n+1})$ est convergente.
Il en est de même de la série $\sum\ 2\ (u_n - u_{n+1})$.
*(on ne change pas la nature d'une série en multipliant son terme général par* $2 \neq 0$*)*

Ainsi, d'après le théorème d'équivalence des séries à termes positifs, la série $\sum\ {u_n}^2$ est convergente.

$$\boxed{\text{La série } \sum\ {u_n}^2 \text{ est convergente.}}$$

□

## Partie III

***1.*** On note $\phi$ la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par : $\phi(0) = 1$ et $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \ \ \phi(x) = \dfrac{f(x)}{x}$.
Montrer que $\phi$ est continue sur $\mathbb{R}_+$.

*Démonstration.*

- La fonction $\phi$ est continue sur $]0, +\infty[$ car est le quotient de :
  - $\times$ $f$ continue sur $]0, +\infty[$,
  - $\times$ $x \mapsto x$ continue sur $]0, +\infty[$ car polynomiale,
    et qui `NE S'ANNULE PAS` sur $]0, +\infty[$.
- De plus, en divisant l'inégalité de la question ***II.2.b)*** par $x > 0$ :

$$\frac{x}{2} - \frac{x^2}{6} \ \leqslant \ 1 - \frac{f(x)}{x} \ \leqslant \ \frac{x}{2}$$

Ainsi :

$$-1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{6} \ \leqslant \ -\frac{f(x)}{x} \ \leqslant \ -1 + \frac{x}{2}$$

Enfin :

$\times$ $\lim\limits_{x \to 0^+} \ -1 + \dfrac{x}{2} - \dfrac{x^2}{6} = -1$,

$\times$ $\lim\limits_{x \to 0^+} \ -1 + \dfrac{x}{2} = -1$.

Donc, par théorème d'encadrement : $\lim\limits_{x \to 0^+} \ -\dfrac{f(x)}{x} = -1$ et ainsi : $\lim\limits_{x \to 0^+} \ \phi(x) = 1$.

$$\boxed{\text{Comme } \phi(0) = 1, \text{ on en déduit que } \phi \text{ est continue en } 0.}$$

$$\boxed{\text{En conclusion, } \phi \text{ est continue sur } \mathbb{R}_+.}$$

□

On considère la fonction réelle $g$ définie par $g(0) = 1$ et $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \ \ g(x) = \dfrac{1}{x} \displaystyle\int_0^x \ \phi(t) \ dt$.

***2.*** ***a)*** Vérifier que $g$ est bien définie et continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

*Démonstration.*

- La fonction $\phi$ est continue sur $\mathbb{R}_+$.
  Ainsi, elle admet une primitive $H$ sur $\mathbb{R}_+$ qui est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$.
  On en déduit, pour tout $x > 0$ :

$$\begin{array}{rcl} g(x) & = & \dfrac{1}{x} \displaystyle\int_0^x \ \phi(t) \ dt \\ & = & \dfrac{1}{x} \ \big[ \ H(t) \ \big]_0^x = \dfrac{1}{x} \ \left( H(x) - H(0) \right) \end{array}$$

- La fonction $g$ est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ car est le produit de $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ et $x \mapsto H(x) - H(0)$ qui sont toutes les deux $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

$$\boxed{\text{La fonction } g \text{ est donc notamment continue sur } \mathbb{R}_+^*.}$$

□

***b)*** Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ 1 - \dfrac{x}{4} \leqslant g(x) \leqslant 1 - \dfrac{x}{4} + \dfrac{x^2}{18}$.

*Démonstration.*

- Comme on l'a démontré dans la question ***III.1***, pour tout $t > 0$ :

$$1 - \frac{t}{2} \ \leqslant \ \frac{f(t)}{t} \ \leqslant \ 1 - \frac{t}{2} + \frac{t^2}{6}$$

- Soit $x > 0$. Par croissance de l'intégrale, les bornes étant dans l'ordre croissant ($x > 0$) :

$$\int_0^x \left(1 - \frac{t}{2}\right) dt \ \leqslant \ \int_0^x \frac{f(t)}{t}\, dt \ \leqslant \ \int_0^x \left(1 - \frac{t}{2} + \frac{t^2}{6}\right) dt$$

$$x - \frac{x^2}{4} = \left[ t - \frac{t^2}{4} \right]_0^x \qquad\qquad \left[ t - \frac{t^2}{4} + \frac{t^3}{18} \right]_0^x = x - \frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{18}$$

On obtient alors le résultat en multipliant de part et d'autre par $\dfrac{1}{x} > 0$.

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ 1 - \frac{x}{4} \ \leqslant \ g(x) \ \leqslant \ 1 - \frac{x}{4} + \frac{x^2}{18}}$$

□

***c)*** En déduire que $g$ est continue en 0, dérivable en 0 puis donner $g'(0)$.

*Démonstration.*

- Tout d'abord :
  × $\lim\limits_{x \to 0^+} 1 - \dfrac{x}{4} = 1$.
  × $\lim\limits_{x \to 0^+} 1 - \dfrac{x}{4} + \dfrac{x^2}{18} = 1$.

  On en déduit, par théorème d'encadrement, que $g$ admet une limite en $0^+$.
  De plus : $\lim\limits_{x \to 0^+} g(x) = 1$.

$$\boxed{\text{Comme } g(0) = 1, \text{ la fonction } g \text{ est continue en 0.}}$$

- Soit $x > 0$.
  En réordonnant les éléments de la double inégalité précédente, on obtient :

$$-\frac{x}{4} \ \leqslant \ g(x) - 1 \ \leqslant \ -\frac{x}{4} + \frac{x^2}{18}$$

puis, par multiplication par $\dfrac{1}{x} > 0$ :

$$-\frac{1}{4} \ \leqslant \ \frac{g(x) - 1}{x} \ \leqslant \ -\frac{1}{4} + \frac{x}{18}$$

$$\frac{g(x) - 1}{x} = \frac{g(x) - g(0)}{x - 0}$$

Or :

$$\lim_{x\to 0^+} -\frac{1}{4} = -\frac{1}{4} = \lim_{x\to 0^+} -\frac{1}{4} + \frac{x}{18}$$

On en déduit par le théorème d'encadrement que la fonction $x \mapsto \dfrac{g(x)-g(0)}{x-0}$ admet une limite en $0^+$. Plus précisément : $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{g(x)-g(0)}{x-0} = -\frac{1}{4}$.

$$\boxed{\text{Ainsi, la fonction } g \text{ est dérivable en } 0 \text{ et } g'(0) = -\frac{1}{4}.}$$

□

*3.* ***a)*** Montrer que : $\forall x \in \,]1,+\infty[$, $\displaystyle\int_1^x \phi(t)\, dt \leqslant \ln(x)$.

*Démonstration.*
Soit $x \in \,]1,+\infty[$.

- Soit $t \in [1,x]$. Remarquons tout d'abord :

$$0 \leqslant 1 - e^{-t} \leqslant 1$$

On en déduit, par multiplication par $\dfrac{1}{t} > 0$ : $\phi(t) = \dfrac{1-e^{-t}}{t} \leqslant \dfrac{1}{t}$.

- Enfin, par croissance de l'intégrale, les bornes étant dans l'ordre croissant $(x > 1)$ :

$$\int_1^x \phi(t)\, dt \leqslant \int_1^x \frac{1}{t}\, dt = [\ \ln(t)\ ]_1^x = \ln(x) - \cancel{\ln(1)}$$

$$\boxed{\forall x > 1, \int_1^x \phi(t)\, dt \leqslant \ln(x)}$$

□

***b)*** En déduire que $g$ a une limite finie en $+\infty$ et donner la valeur de cette limite.

*Démonstration.*
Soit $x > 1$.

- En multipliant par $\dfrac{1}{x} > 0$ l'inégalité précédente, on obtient :

$$0 \leqslant \frac{1}{x} \int_1^x \phi(t)\, dt \leqslant \frac{\ln(x)}{x}$$

- Or : $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} 0 = 0 = \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x}$ (par croissances comparées).

$$\boxed{\text{On en déduit, en utilisant une nouvelle fois le théorème d'encadrement, que la fonction } g \text{ admet une limite en } +\infty. \text{ Plus précisément : } \lim_{x\to+\infty} g(x) = 0.}$$

□

*4.* ***a)*** Pour tout réel $x$ strictement positif, calculer $g'(x)$ et l'écrire sous la forme $g'(x) = \dfrac{h(x)}{x^2}$.

*Démonstration.*

- La fonction $g$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ d'après la démonstration faite en ***II.2.a)***.
- Soit $x > 0$. En reprenant les notation de la question ***II.2.a)*** :

$$g(x) = \frac{1}{x}\big(H(x) - H(0)\big)$$

- On en déduit :

$$\begin{array}{rcl} g'(x) & = & \dfrac{-1}{x^2}\ \big(H(x) - H(0)\big) + \dfrac{1}{x}\ H'(x) \\ & = & \dfrac{-1}{x^2}\ \big(H(x) - H(0)\big) + \dfrac{1}{x}\ \phi(x) \\ & = & \dfrac{-1}{x^2}\ \displaystyle\int_0^x \phi(t)\ dt + \dfrac{1}{x}\ \phi(x) \\ & = & \dfrac{1}{x^2}\ \left(x\ \phi(x) - \displaystyle\int_0^x \phi(t)\ dt\right) \end{array}$$

$$\boxed{\text{En posant } h : x \mapsto x\ \phi(x) - \int_0^x \phi(t)\ dt, \text{ on obtient bien : } g'(x) = \frac{h(x)}{x^2}.}$$

□

***b)*** Montrer alors que : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $xh'(x) = (x+1)\ \mathrm{e}^{-x} - 1$.

*Démonstration.*

- La fonction $h : x \mapsto x\ \phi(x) - (H(x) - H(0))$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ car les fonction $\phi$ et $H$ le sont.
- Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$.

$$h'(x) \ = \ \phi(x) + x\ \phi'(x) - H'(x) \ = \ \phi(x) + x\ \phi'(x) - \phi(x) \ = \ x\ \phi'(x)$$

- La fonction $\phi$ est dérivable sur $]0, +\infty[$ car est le quotient de :
  - × $f : x \mapsto 1 - \mathrm{e}^{-x}$ dérivable sur $]0, +\infty[$,
  - × $x \mapsto x$ dérivable sur $]0, +\infty[$ car polynomiale,
    et qui `NE S'ANNULE PAS` sur $]0, +\infty[$.

  De plus, pour tout $x > 0$ :

$$\phi'(x) \ = \ \frac{\mathrm{e}^{-x}\ x - (1 - \mathrm{e}^{-x})}{x^2} \ = \ \frac{(x+1)\ \mathrm{e}^{-x} - 1}{x^2}$$

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ xh'(x) = x^2\ \phi'(x) = (x+1)\ \mathrm{e}^{-x} - 1}$$

□

***c)*** Étudier la fonction notée $k$ définie par : $\forall x \in \mathbb{R}_+$, $k(x) = (x+1)\ \mathrm{e}^{-x} - 1$.

*Démonstration.*

- La fonction $k$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ car la fonction $x \mapsto (x+1)\ \mathrm{e}^{-x}$ l'est comme produits de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}_+$.
- Soit $x \in \mathbb{R}_+$.

$$k'(x) \ = \ \mathrm{e}^{-x} + (x+1)\ (-\mathrm{e}^{-x}) = -x\ \mathrm{e}^{-x} \leqslant 0$$

  On remarque de plus : $k'(x) = 0 \ \Leftrightarrow\ x = 0$.
  *(la fonction $k'$ ne s'annule qu'en un point)*

$$\boxed{\text{La fonction } k \text{ est strictement décroissante sur } \mathbb{R}_+.}$$

□

***d)*** Donner le signe de $k$, puis les variations de $h$ et enfin celles de $g$.

*Démonstration.*

- D'après la quesiton précédente, $k$ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+$.
  Or : $k(0) = 1 - 1 = 0$.

  $$\boxed{\text{On en déduit que pour tout } x \in \mathbb{R}_+^*,\ k(x) < k(0) = 0.}$$

- D'après la question ***II.4.b)***, pour tout $x > 0$ : $h'(x) = \dfrac{k(x)}{x} < 0$.

  $$\boxed{\text{On en déduit que } h \text{ est strictement décroissante sur } \mathbb{R}_+.}$$

- On en déduit que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $h(x) < h(0) = 0$.
  Or, d'après la question ***II.4.a)*** : $\forall x > 0,\ g'(x) = \dfrac{h(x)}{x^2}$.

$$\boxed{\text{Ainsi, pour tout } x > 0,\ g'(x) < 0, \text{ ce qui démontre que } g \text{ est strictement décroissante sur } \mathbb{R}_+.}$$

□

***e)*** Dresser le tableau de variations de $g$ et tracer l'allure de sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

*Démonstration.*
D'après les questions précédentes, $g$ admet le tableau de variation suivant.

| $x$ | $0$ | $+\infty$ |
|---|---|---|
| Signe de $g'(x)$ | $-$ | |
| Variations de $g$ | $1$ ↘ | $0$ |

□