Lycée Carnot

Concours blanc commun ECE 2

Du 23 janvier 2018 au 26 janvier 2018

Mathématiques II

Le 26 janvier 2018

De 8 h à 12 h

La durée de l'épreuve est 4 heures.

Le sujet comporte 6 pages. Les exercices sont indépendants.

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.
Ils ne doivent faire usage d'aucun document : l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.
Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

I. Problème

Le but du problème est d'étudier le renouvellement d'un des composants d'un système complexe (une machine, un réseau de distribution d'énergie etc...) formé d'un assemblage de différentes pièces susceptibles de tomber en panne. On s'intéresse donc à une de ces pièces susceptibles de se casser ou de tomber en panne et on se place dans la situation idéale où dès que la pièce est défectueuse, elle est immédiatement remplacée. Dans une première partie, on étudie quelques propriétés fondamentales des variables aléatoires discrètes. Puis, dans une deuxième partie, on étudie la probabilité de devoir changer la pièce un certain jour donné. Enfin, dans une troisième partie on cherche à estimer le temps de fonctionnement du système avec un certain nombre de pièces de rechange à disposition.
Dans tout le problème, on considère un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$. Pour toute variable aléatoire réelle X définie sur $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$, on note, sous réserve d'existence, $\mathbb{E}(X)$ l'espérance de X et $\mathbb{V}(X)$ sa variance.
La deuxième partie peut être traitée en admettant si besoin les résultats de la première partie.

Première partie

Dans cette première partie, on étudie les propriétés asymptotiques d'une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{N}^*$.

1. ***a)*** Montrer que pour tout entier naturel j non nul :

$$\mathbb{P}([X = j]) = \mathbb{P}([X > j-1]) - \mathbb{P}([X > j])$$

b) Soit p un entier naturel non nul. Montrer que :

$$\sum_{j=1}^{p} j\,\mathbb{P}([X = j]) = \sum_{j=0}^{p-1} \mathbb{P}([X > j]) - p\,\mathbb{P}([X > p])$$

2. ***a)*** On suppose que X admet une espérance $\mathbb{E}(X) = \mu$.

i. Justifier la convergence de la série de terme général $k\,\mathbb{P}([X = k])$.

ii. Montrer que :

$$\lim_{p \to +\infty} \sum_{k=p+1}^{+\infty} k\,\mathbb{P}([X = k]) = 0$$

iii. En déduire que :

$$\lim_{p \to +\infty} p\,\mathbb{P}([X > p]) = 0$$

iv. Montrer que la série de terme général $\mathbb{P}([X > j])$ converge.

v. Montrer que :

$$\mu = \sum_{j=0}^{+\infty} \mathbb{P}([X > j])$$

b) On suppose que $\sum\limits_{j=0}^{+\infty} \mathbb{P}([X > j])$ converge.

i. Déterminer le sens de variation de la suite $(v_p)_{p \geqslant 1}$ définie par :

$$v_p = \sum_{j=0}^{p-1} \mathbb{P}([X > j])$$

ii. Comparer $\sum\limits_{j=1}^{p} j\,\mathbb{P}([X = j])$ et $\sum\limits_{j=0}^{+\infty} \mathbb{P}([X > j])$.

iii. En déduire que X admet une espérance.

c) Conclure des questions précédentes que X admet une espérance si et seulement si la série de terme général $\mathbb{P}([X > j])$ converge.

3. On suppose dans cette question qu'il existe un réel α strictement positif tel que pour tout entier naturel j on ait :

$$\mathbb{P}([X > j]) = \frac{1}{(j+1)^\alpha} \qquad (*)$$

a) Légitimer que $(*)$ définit bien une loi de probabilité d'une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}^*$.

b) Montrer que X admet une espérance si et seulement si α est strictement supérieur à 1.

c) Montrer que pour tout entier naturel j non nul :

$$\mathbb{P}([X = j]) = \frac{1}{j^\alpha}\left(1 - \frac{1}{(1+\frac{1}{j})^\alpha}\right)$$

d) i. Étudier les variations de $f : x \mapsto 1 - (1+x)^{-\alpha} - \alpha x$ sur $[0, 1]$.

ii. Montrer que pour tout entier naturel j non nul :

$$\mathbb{P}([X = j]) \leqslant \frac{\alpha}{j^{1+\alpha}}$$

e) Montrer, en utilisant le résultat de ***3.c)***, que :

$$\lim_{j \to +\infty} j^{\alpha+1}\, \mathbb{P}([X = j]) = \alpha$$

f) Montrer que X admet une variance si et seulement si $\alpha > 2$.

Deuxième partie : Étude de la probabilité de panne un jour donné.

Dans cette deuxième partie, on suppose donnée une suite de variables aléatoires $(X_i)_{i \geqslant 1}$ mutuellement indépendantes et de même loi à valeurs dans $\mathbb{N}^*$.
Pour tout entier i non nul, X_i représente la durée de vie en jours du $i^{\text{ème}}$ composant en fonctionnement.
Soit k un entier naturel non nul. On note $T_k = X_1 + ... + X_k$. T_k représente donc le jour où le $k^{\text{ème}}$ composant tombe en panne. On fixe un entier naturel n non nul représentant un jour donné et on considère l'événement A_n : « le composant en place le jour n tombe en panne » c'est-à-dire A_n : « il existe k entier naturel non nul tel que $T_k = n$ », et on se propose d'étudier $\mathbb{P}(A_n)$.

4. Pour tout entier naturel non nul j, on note $p_j = \mathbb{P}([X_1 = j])$ et $u_j = \mathbb{P}(A_j)$. On suppose que pour tout entier naturel non nul j, on a $p_j \neq 0$. On pose de plus par convention $u_0 = 1$.

a) Montrer que : $u_1 = p_1$.

b) i. Montrer que : $A_2 = [X_1 = 2] \,\cup\, ([X_1 = 1] \cap [X_2 = 1])$.

ii. En déduire u_2 en fonction de p_1 et p_2.

c) Pour tout entier naturel i, on pose $\tilde{X}_i = X_{i+1}$.

i. Montrer que les variables $\tilde{X}_i$ sont mutuellement indépendantes, indépendantes de X_1 et de même loi que X_1.

ii. Soit k un entier naturel non nul strictement inférieur à n. Montrer que :

$$A_n \cap [X_1 = k] = [X_1 = k] \,\cap\, \bigcup_{j \geqslant 1} \left[\tilde{X}_1 + \tilde{X}_2 + ... + \tilde{X}_j = n - k\right]$$

iii. En déduire que pour tout entier naturel k non nul strictement inférieur à n :

$$\mathbb{P}_{[X_1 = k]}(A_n) = \mathbb{P}(A_{n-k})$$

d) Montrer que :
$$u_n = u_{n-1}\, p_1 + \dots + u_0\, p_n$$

e) En **Scilab**, soit $P = [p_1, p_2, \dots, p_n]$ le vecteur ligne tel que $P(j) = p_j$ pour j dans $[\![1, n]\!]$.
Écrire un programme en **Scilab** qui calcule u_n à partir de P.

5. Soit λ un réel appartenant à $]0, 1[$.

Dans cette question, on suppose que X_1 suit la loi géométrique de paramètre λ.
Pour tout entier naturel j non nul, on a donc $\mathbb{P}([X_1 = j]) = \lambda(1-\lambda)^{j-1}$.

a) Calculer $\mathbb{P}([X_1 > k])$ pour tout entier naturel k non nul.

b) Calculer $\mathbb{P}_{[X_1>k]}([X_1 = k+1])$.

c) Montrer que pour tout entier naturel n non nul :
$$\mathbb{P}(A_n) = \lambda$$

6. On suppose dans cette question que p_1 vérifie $0 < p_1 < 1$ et que $p_2 = 1 - p_1$.
Pour simplifier, on posera $p = p_1 = 1 - p_2$.

a) Que vaut p_i pour i supérieur ou égal à 3 ?

b) Soit la matrice :
$$M = \begin{pmatrix} p & 1-p \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Montrer que pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2 :
$$\begin{pmatrix} u_n \\ u_{n-1} \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} u_{n-1} \\ u_{n-2} \end{pmatrix}$$

c) i. Diagonaliser la matrice M.

ii. Montrer que :
$$M^{n-1} = \frac{1}{2-p}\begin{pmatrix} 1 & 1-p \\ 1 & 1-p \end{pmatrix} + \frac{(p-1)^{n-1}}{2-p}\begin{pmatrix} 1-p & p-1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

d) i. Exprimer u_n en fonction de p et de n.

ii. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

II. Exercice (uniquement en vA)

> Pour les élèves choisissant la vB :
> Ne pas traiter cet exercice mais traiter le suivant.

On admet l'encadrement suivant : $2,7 < \mathrm{e} < 2,8$.

Partie I : Étude d'une fonction

On considère l'application $f : [0, +\infty[\ \to \mathbb{R}$ définie, pour tout $t \in [0, +\infty[$ par :

$$f(t) = \begin{cases} t\ln(t) - t & \text{si } t \neq 0 \\ 0 & \text{si } t = 0 \end{cases}$$

1. Montrer que f est continue sur $[0, +\infty[$.

2. Justifier que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$ et calculer $f'(t)$ pour tout $t \in]0, +\infty[$.

3. Déterminer la limite de f en $+\infty$.

4. Dresser le tableau des variations de f.

5. Montrer que f est convexe sur $]0, +\infty[$.

6. On note Γ la courbe représentative de f dans un repère orthonormal $\left(O \ ; \ \vec{i} \ ; \ \vec{j}\right)$.

a) Montrer que Γ admet une demi-tangente en O.

b) Déterminer les points d'intersection de Γ avec l'axe des abscisses.

c) Tracer Γ.

Partie II : Étude d'une fonction définie par une intégrale

On considère l'application $G :]1, +\infty[\ \to \mathbb{R}$ définie, pour tout $x \in]1, +\infty[$, par :

$$G(x) = \frac{1}{2} \int_{x-1}^{x+1} f(t) \ dt$$

1. Montrer que G est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]1, +\infty[$ et que, pour tout $x \in]1, +\infty[$:

$$\begin{array}{rrcl} & G'(x) & = & \dfrac{1}{2}\left(f(x+1) - f(x-1)\right) \\ \text{et} & G''(x) & = & \dfrac{1}{2}\left(\ln(x+1) - \ln(x-1)\right) \end{array}$$

À cet effet, on pourra faire intervenir une primitive F de f sans chercher à calculer F.

2. ***a)*** Montrer que G' est strictement croissante sur $]1, +\infty[$.

b) Vérifier : $G'(2) > 0$.

c) Établir que l'équation $G'(x) = 0$, d'inconnue $x \in]1, +\infty[$, admet une solution et une seule, notée α, et que $\alpha < 2$.

II. Exercice (uniquement en vB)

Dans tout l'exercice :

× le réel x est fixé, α est un réel strictement positif et f est une fonction définie et continue sur l'intervalle $[x-\alpha, x+\alpha]$ à valeurs réelles ;

× pour tout réel h vérifiant $0 < h \leqslant \alpha$, on pose :

$$S_x(h) = \frac{1}{2h}\int_{-h}^{h} f(x+t)\ dt \qquad \text{et} \qquad G_x(h) = \frac{3}{2h^3}\int_{-h}^{h} tf(x+t)\ dt$$

× sous réserve d'existence, on pose : $s(x) = \lim\limits_{h\to 0^+} S_x(h)$ et $g(x) = \lim\limits_{h\to 0^+} G_x(h)$.

L'objet du problème est l'étude d'une généralisation de la notion de dérivée d'une fonction à partir de fonctions définies par des intégrales.

1. ***a)*** Calculer $\displaystyle\int_{-h}^{h} dt$, $\displaystyle\int_{-h}^{h} (x+t)\ dt$, $\displaystyle\int_{-h}^{h} t(x+t)\ dt$ et $\displaystyle\int_{-h}^{h} (x+t)^2\ dt$.

b) Démontrer que : $\displaystyle\int_{-h}^{h} t(x+t)^2\ dt = \frac{4h^3x}{3}$.

c) Établir les deux formules : $S_x(h) = \displaystyle\frac{1}{2}\int_{-1}^{1} f(x+ht)\ dt$ et $G_x(h) = \displaystyle\frac{3}{2h}\int_{-1}^{1} tf(x+ht)\ dt$.

2. *Dans cette question uniquement*, soit n un entier naturel donné et f la fonction définie par $f(t) = t^n$.

a) Soit k un entier naturel. Calculer suivant la parité de k, la valeur de $h^k(1-(-1)^k)$.

b) Calculer $S_x(h)$ et $G_x(h)$ lorsque $x = 0$.

c) À l'aide de la formule du binôme, démontrer que :

$$S_x(h) = x^n + h^2A_x(h) \qquad \text{et} \qquad G_x(h) = nx^{n-1} + h^2B_x(h)$$

où A_x et B_x sont deux fonctions polynomiales en h (dont les coefficients dépendent de x).

d) En déduire l'existence et l'expression de $s(x)$ et $g(x)$.

3. *Dans cette question uniquement*, la fonction f est définie par $f(t) = |t|$ et on choisit $x = 0$.

a) La fonction f est-elle dérivable en 0 ?

b) Calculer $S_x(h)$ et $G_x(h)$ pour $x = 0$. En déduire l'existence et la valeur de $s(0)$ et $g(0)$.
Dans les questions 4 à 6, on revient au cas général.

4. Exprimer $S_x(h)$ à l'aide d'une primitive F de f. Établir l'existence de $s(x)$ et démontrer que $s(x) = f(x)$.

5. *On suppose dans cette question que f est dérivable en x de dérivée $f'(x)$.*

a) Démontrer l'existence d'une fonction v_x définie et continue sur $\mathbb{R}$, vérifiant $v_x(0) = 0$ et telle que pour tout réel t on ait : $f(x+t) = f(x) + tf'(x) + tv_x(t)$.

b) En déduire l'égalité : $G_x(h) = f'(x) + \displaystyle\frac{3}{2h^3}\int_{-h}^{h} t^2v_x(t)\ dt$.

c) Soit ε un réel strictement positif. Démontrer qu'il existe $\delta > 0$ tel que si $h \in]0, \delta]$, on a :

$$\left|\frac{3}{2h^3}\int_{-h}^{h} t^2v_x(t)\ dt\right| \leqslant \varepsilon$$

d) En déduire l'expression de $g(x)$ en fonction de $f'(x)$.