Lycée Carnot

Concours blanc commun ECE 2

Du 23 janvier 2018 au 26 janvier 2018

Mathématiques II

Le 26 janvier 2018

De 8 h à 12 h

La durée de l'épreuve est 4 heures.

Le sujet comporte 6 pages. Les exercices sont indépendants.

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.
Ils ne doivent faire usage d'aucun document : l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.
Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

I. Problème (ESSEC-II 2016)

Première partie

1. a) Montrer que pour tout entier naturel j non nul :

$$\mathbb{P}([X=j]) = \mathbb{P}([X>j-1]) - \mathbb{P}([X>j])$$

- **1 pt : égalité** $[X>j] \ \cup \ [X=j] \ = \ [X \geqslant j]$
- **1 pt :** X **est à valeurs dans** $\mathbb{N}^*$ **donc** $[X>j-1] = [X \geqslant j]$
- **1 pt : probabilité de l'union par incompatibilité**

b) Soit p un entier naturel non nul. Montrer que :

$$\sum_{j=1}^{p} j\,\mathbb{P}([X=j]) = \sum_{j=0}^{p-1} \mathbb{P}([X>j]) - p\,\mathbb{P}([X>p])$$

- **1 pt : linéarité**
- **1 pt : décalage d'indice**
- **1 pt : conclusion**

2. a) On suppose que X admet une espérance $\mathbb{E}(X) = \mu$.

i. Justifier la convergence de la série de terme général $k\,\mathbb{P}([X=k])$.

- **1 pt**

ii. Montrer que :

$$\lim_{p\to+\infty} \sum_{k=p+1}^{+\infty} k\,\mathbb{P}([X=k]) = 0$$

- **1 pt : relation** $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} k \ \mathbb{P}([X=k]) = \sum_{k=1}^{p} k \ \mathbb{P}([X=k]) + \sum_{k=p+1}^{+\infty} k \ \mathbb{P}([X=k])$
- **1 pt : expression de** $\displaystyle\sum_{k=p+1}^{+\infty} k \ \mathbb{P}([X=k])$
- **1 pt : passage à la limite**

iii. En déduire que :

$$\lim_{p\to+\infty} p\,\mathbb{P}([X>p]) = 0$$

- **1 pt :** $[X>p] \ = \ \displaystyle\bigcup_{k=p+1}^{+\infty} \ [X=k]$
- **1 pt : incompatibilité**
- **1 pt : inégalité** $p \leqslant k$
- **1 pt : théorème d'encadrement**

iv. Montrer que la série de terme général $\mathbb{P}([X>j])$ converge.

- **1 pt : rappeler** $\displaystyle\sum_{j=0}^{p-1} \mathbb{P}([X>j]) = \sum_{j=1}^{p} j \ \mathbb{P}([X=j]) - p \ \mathbb{P}([X>p])$
- **1 pt : existence de la limite**

v. Montrer que : $\mu = \sum\limits_{j=0}^{+\infty} \mathbb{P}([X > j])$.

- **1 pt**

b) On suppose que $\sum\limits_{j=0}^{+\infty} \mathbb{P}([X > j])$ converge.

i. Déterminer le sens de variation de la suite $(v_p)_{p\geqslant 1}$ définie par :

$$v_p = \sum_{j=0}^{p-1} \mathbb{P}([X > j])$$

- **2 pts (cadeau)**

ii. Comparer $\sum\limits_{j=1}^{p} j\, \mathbb{P}([X = j])$ et $\sum\limits_{j=0}^{+\infty} \mathbb{P}([X > j])$.

- **1 pt :** $\sum\limits_{j=1}^{p} j\ \mathbb{P}([X = j]) \ = \ \sum\limits_{j=0}^{p-1} \mathbb{P}([X > j]) - p\ \mathbb{P}([X > p]) \ \leqslant \ \sum\limits_{j=0}^{p-1} \mathbb{P}([X > j]) = v_p$
- **1 pt :** $\sum\limits_{j=0}^{p-1} \mathbb{P}([X > j]) \ \leqslant \ \sum\limits_{j=0}^{+\infty} \mathbb{P}([X > j])$

iii. En déduire que X admet une espérance.

- **1 pt : rédaction X admet une espérance (absolue cv)**
- **1 pt : croissance de la suite des sommes partielles** $\left(\sum\limits_{j=1}^{p} j\ \mathbb{P}([X = j])\right)_{p\in\mathbb{N}^*}$
- **1 pt : majoration par** $\sum\limits_{j=0}^{+\infty} \mathbb{P}([X > j])$

c) Conclure des questions précédentes que X admet une espérance si et seulement si la série de terme général $\mathbb{P}([X > j])$ converge.

- **1 pt : sens direct (citer *2.a)*)**
- **1 pt : sens réciproque (citer *2.b)*)**

3. On suppose dans cette question qu'il existe un réel α strictement positif tel que pour tout entier naturel j on ait :

$$\mathbb{P}([X > j]) = \frac{1}{(j+1)^\alpha} \qquad (*)$$

a) Légitimer que $(*)$ définit bien une loi de probabilité d'une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}^*$.

- **1 pt :** $\forall j \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}([X = j]) \geqslant 0$
- **2 pts :** $\sum\limits_{j=1}^{+\infty} \mathbb{P}([X = j]) = 1$ **(1 pour somme partielle / 1 pour passage à la limite)**

b) Montrer que X admet une espérance si et seulement si α est strictement supérieur à 1.

- **1 pt : X admet une espérance si et seulement si la série de terme général $\mathbb{P}([X > j])$ converge**
- **1 pt :** $\dfrac{1}{(j+1)^\alpha} \underset{j\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{j^\alpha}$ $(\geqslant 0)$
- **1 pt : critère de Riemann**
- **1 pt : théorème d'équivalence des SATP (ne pas mettre le point si le caractère positif n'est jamais cité)**

c) Montrer que pour tout entier naturel j non nul :

$$\mathbb{P}([X=j]) = \frac{1}{j^\alpha}\left(1 - \frac{1}{(1+\frac{1}{j})^\alpha}\right)$$

- **2 pts : calcul**

d) i. Étudier les variations de $f : x \mapsto 1-(1+x)^{-\alpha} - \alpha x$ sur $[0,1]$.

- **1 pt : caractère $\mathcal{C}^1$**
- **1 pt : dérivée**
- **1 pt : signe de $f'(x)$**

ii. Montrer que pour tout entier naturel j non nul :

$$\mathbb{P}([X=j]) \leqslant \frac{\alpha}{j^{1+\alpha}}$$

- **1 pt : $f(x) \leqslant f(0) = 0$**
- **1 pt : appliquer l'inégalité à $x = \frac{1}{j} \in [0,1]$ (0 si $[0,1]$ pas écrit)**

e) Montrer, en utilisant le résultat de ***3.c)***, que :

$$\lim_{j\to+\infty} j^{\alpha+1}\,\mathbb{P}([X=j]) = \alpha$$

- **1 pt : DL_0 c'est à dire $(1+x)^{-\alpha} \;=\; 1-\alpha\ x + x\ \varepsilon(x)$**
- **1 pt : application en $\frac{1}{j}$**
- **1 pt : ontention de $j^{\alpha+1}\ \mathbb{P}([X=j]) = \alpha - \varepsilon\left(\frac{1}{j}\right)$**
- **1 pt : conclusion *i.e.* $\lim\limits_{j\to+\infty} \varepsilon\left(\frac{1}{j}\right) = 0$**

f) Montrer que X admet une variance si et seulement si $\alpha > 2$.

- **1 pt : rédaction X admet une variance (absolue cv)**
- **1 pt : $j^2\ \mathbb{P}([X=j]) = \alpha\ \frac{1}{j^{\alpha-1}}$ ($\geqslant 0$)**
- **1 pt : critère de Riemann**
- **1 pt : théorème d'équivalence des SATP**

Deuxième partie : Étude de la probabilité de panne un jour donné.

4. Pour tout entier naturel non nul j, on note $p_j = \mathbb{P}([X_1=j])$ et $u_j = \mathbb{P}(A_j)$. On suppose que pour tout entier naturel non nul j, on a $p_j \neq 0$. On pose de plus par convention $u_0 = 1$.

a) Montrer que : $u_1 = p_1$.

- **1 pt : description $[X_1 = 1]$ et A_1**
- **1 pt : les v.a.r. X_i sont à valeurs dans $\mathbb{N}^*$**

b) i. Montrer que : $A_2 = [X_1=2] \ \cup\ ([X_1=1]\cap[X_2=1])$.

- **1 pt : A_2 est réalisé si ...**
- **1 pt : disjonction de cas pour connaître le composant en place le jour 2**

ii. En déduire u_2 en fonction de p_1 et p_2.

- **1 pt : incompatibilité**
- **1 pt : indépendance**
- **1 pt : même loi**

c) Pour tout entier naturel i, on pose $\tilde{X}_i = X_{i+1}$.

i. Montrer que les variables $\tilde{X}_i$ sont mutuellement indépendantes, indépendantes de X_1 et de même loi que X_1.

- **1 pt : indépendace mutuelle**
- **1 pt : indépendance vis à vis de X_1 (lemme des coalitions)**
- **1 pt : même loi**

ii. Soit k un entier naturel non nul strictement inférieur à n. Montrer que :

$$A_n \cap [X_1 = k] = [X_1 = k] \ \cap \ \bigcup_{j \geqslant 1} \left[\tilde{X}_1 + \tilde{X}_2 + ... + \tilde{X}_j = n - k\right]$$

- **1 pt :** $A_n = \bigcup_{j \in \mathbb{N}^*} [T_j = n]$
- **1 pt : séparation du cas $j = 1$**
- **1 pt :** $[X_1 = k] \ \cap \ A_n$ **et distributivité $\cap$ sur $\cup$**
- **1 pt :** $[X_1 = k] \cap [X_1 = n] = \varnothing$ **car** $k < n$
- **1 pt : décalage d'indice pour faire apparaître $\tilde{X}_i$**

iii. En déduire que pour tout entier naturel k non nul strictement inférieur à n :

$$\mathbb{P}_{[X_1=k]}(A_n) = \mathbb{P}(A_{n-k})$$

- **1 pt : définition** $\mathbb{P}_{[X_1=k]}(A_n)$
- **1 pt : réunion** $\bigcup_{j \geqslant 1} [X_1 = k] \ \cap \ \left[\tilde{X}_1 + \tilde{X}_2 + \ldots + \tilde{X}_j = n - k\right]$ **d'incompatibles**
- **1 pt :** $\mathbb{P}\Big([X_1 = k] \cap \left[\tilde{X}_1 + \tilde{X}_2 + \ldots + \tilde{X}_j = n - k\right] \Big) = \mathbb{P}([X_1 = k]) \times \mathbb{P}\Big(\left[\tilde{X}_1 + \tilde{X}_2 + \ldots + \tilde{X}_j = n - k\right]$
- **1 pt : les v.a.r.** $\tilde{X}_1 + \tilde{X}_2 + \ldots + \tilde{X}_j$ **et** $X_1 + X_2 + \ldots + X_j$ **ont même loi**
- **2 pts : conclusion** $\mathbb{P}_{[X_1=k]}(A_n) = \mathbb{P}(A_{n-k})$

d) Montrer que :

$$u_n = u_{n-1}\, p_1 + ... + u_0\, p_n$$

- **1 pt : FPT**
- **1 pt : découpage** $\sum_{k=1}^{n-1} \mathbb{P}([X_1 = k] \cap A_n) + \mathbb{P}([X_1 = n] \cap A_n) + \sum_{k=n+1}^{+\infty} \mathbb{P}([X_1 = k] \cap A_n)$
- **1 pt :** $\mathbb{P}([X_1 = k] \cap A_n) = \mathbb{P}(\varnothing) = 0$
- **1 pt :** $[X_1 = n] \subset A_n$ **donc** $[X_1 = n] \cap A_n = [X_1 = n]$
- **1 pt : conclusion**

e) En **Scilab**, soit $P = [p_1, p_2, ..., p_n]$ le vecteur ligne tel que $P(j) = p_j$ pour j dans $[\![1, n]\!]$.
Écrire un programme en **Scilab** qui calcule u_n à partir de P.

- **6 pts : être généreux**

5. Soit λ un réel appartenant à $]0,1[$.

Dans cette question, on suppose que X_1 suit la loi géométrique de paramètre λ.
Pour tout entier naturel j non nul, on a donc $\mathbb{P}([X_1 = j]) = \lambda(1-\lambda)^{j-1}$.

a) Calculer $\mathbb{P}([X_1 > k])$ pour tout entier naturel k non nul.

- **1 pt :** $\mathbb{P}([X_1 > k]) \ = \ 1 - \mathbb{P}([X_1 \leqslant k])$
- **1 pt :** $[X_1 \leqslant k] \ = \ \bigcup\limits_{i=1}^{k} [X_1 = i]$
- **1 pt : incompatibilité**
- **1 pt : conclusion (décalage d'indice et somme géométrique)**

b) Calculer $\mathbb{P}_{[X_1>k]}([X_1 = k+1])$.

- **1 pt : définition** $\mathbb{P}_{[X_1>k]}([X_1 > k+1]) = \dfrac{\mathbb{P}([X_1 > k] \ \cap \ [X_1 > k+1])}{\mathbb{P}([X_1 > k])}$
- **1 pt :** $[X_1 > k+1] \subseteq [X_1 > k]$
- **1 pt : conclusion**

c) Montrer que pour tout entier naturel n non nul :

$$\mathbb{P}(A_n) = \lambda$$

- **1 pt : initialisation**
- **3 pts : hérédité (1 pour découpage $\sum\limits_{k=1}^{n} u_{n+1-k} \ p_k + p_{n+1}$, 1 pour somme géométrique, 1 pour calcul)**

6. On suppose dans cette question que p_1 vérifie $0 < p_1 < 1$ et que $p_2 = 1 - p_1$.
Pour simplifier, on posera $p = p_1 = 1 - p_2$.

a) Que vaut p_i pour i supérieur ou égal à 3 ?

- **1 pt : SCE donc** $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}([X_1 = k]) = 1$
- **1 pt : conclusion**

b) Soit la matrice :

$$M = \begin{pmatrix} p & 1-p \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Montrer que pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2 :

$$\begin{pmatrix} u_n \\ u_{n-1} \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} u_{n-1} \\ u_{n-2} \end{pmatrix}$$

- **1 pt :** $u_n = u_{n-1} \ p_1 + u_{n-2} \ p_2$
- **1 pt : conclusion**

c) i. Diagonaliser la matrice M.

- **2 pts : valeurs propres de** M
- **2 pts :** $E_1(M)$
- **2 pts :** $E_{-(1-p)}(M)$
- **1 pt : calcul de** P^{-1}
- **1 pt : conclusion**

ii. Montrer que :

$$M^{n-1} = \frac{1}{2-p}\begin{pmatrix} 1 & 1-p \\ 1 & 1-p \end{pmatrix} + \frac{(p-1)^{n-1}}{2-p}\begin{pmatrix} 1-p & p-1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

- **3 pts : calcul**

d) i. Exprimer u_n en fonction de p et de n.

- **1 pt :** $\begin{pmatrix} u_n \\ u_{n-1} \end{pmatrix} = M^{n-1} \begin{pmatrix} p \\ 1 \end{pmatrix}$
- **2 pts : calcul**

ii. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

- **1 pt**

II. Exercice (EML 2008)

On admet l'encadrement suivant : $2,7 < \text{e} < 2,8$.

Partie I : Étude d'une fonction

On considère l'application $f : [0,+\infty[\ \to \mathbb{R}$ définie, pour tout $t \in [0,+\infty[$ par :

$$f(t) = \begin{cases} t\ln(t) - t & \text{si } t \neq 0 \\ 0 & \text{si } t = 0 \end{cases}$$

1. Montrer que f est continue sur $[0,+\infty[$.

- **1 pt : continuité sur $\mathbb{R}_+^*$**
- **1 pt :** $\lim\limits_{t\to 0^+} t \ \ln(t) = 0$ **et conclusion**

2. Justifier que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,+\infty[$ et calculer $f'(t)$ pour tout $t \in]0,+\infty[$.

- **1 pt : caractère $\mathcal{C}^1$**
- **1 pt :** $f'(t) = \ln(t)$

3. Déterminer la limite de f en $+\infty$.

- **2 pts**

4. Dresser le tableau des variations de f.

- **2 pts : tableau correct avec limites**

5. Montrer que f est convexe sur $]0,+\infty[$.

- **2 pts (dont 1 pour $\mathcal{C}^2$ si calcul de f'')**

6. On note Γ la courbe représentative de f dans un repère orthonormal $\left(O \ ; \ \vec{i} \ ; \ \vec{j}\right)$.

a) Montrer que Γ admet une demi-tangente en O.

- **2 pts**

b) Déterminer les points d'intersection de Γ avec l'axe des abscisses.

- **1 pt : écriture du système**
- **1 pt : résolution**

c) Tracer Γ.

- **4 pts : 1 pour tangente verticale tracée, 1 pt pour tangente horizontale tracée, 1 point pour notion de tangente respectée, 1 pt pour allure globale (notamment aspect convexe)**

Partie II : Étude d'une fonction définie par une intégrale

On considère l'application $G :]1,+\infty[\ \to \mathbb{R}$ définie, pour tout $x \in]1,+\infty[$, par :

$$G(x) = \frac{1}{2} \int_{x-1}^{x+1} f(t) \ dt$$

1. Montrer que G est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]1,+\infty[$ et que, pour tout $x \in]1,+\infty[$:

$$\begin{array}{rrcl} & G'(x) & = & \dfrac{1}{2}\left(f(x+1) - f(x-1)\right) \\ \text{et} & G''(x) & = & \dfrac{1}{2}\left(\ln(x+1) - \ln(x-1)\right) \end{array}$$

À cet effet, on pourra faire intervenir une primitive F de f sans chercher à calculer F.

- **1 pt : continuité pour introduire la primitive**
- **1 pt :** F **de classe** $\mathcal{C}^2$
- **1 pt :** G **de classe** $\mathcal{C}^2$
- **1 pt :** $G'(x)$
- **1 pt :** $G''(x)$

2. a) Montrer que G' est strictement croissante sur $]1,+\infty[$.

- **2 pts**

b) Vérifier : $G'(2) > 0$.

- **1 pt**

c) Établir que l'équation $G'(x) = 0$, d'inconnue $x \in]1,+\infty[$, admet une solution et une seule, notée α, et que $\alpha < 2$.

- **2 pts : théorème bijection (1 pt pour continue / 1 pt pour stricte croissance)**
- **1 pt :** $\lim\limits_{x \to 1^+} G'(x) = G'(1) = \ln(2) - 1 > 0$
- **1 pt :** $G'(x) = (x-1)\ln\left(1 + \dfrac{2}{x-1}\right) + 2\ln(x+1) - 2$
- **1 pt :** $\lim\limits_{x \to +\infty} G'(x) = +\infty$
- **1 pt :** $0 \in]G'(1), +\infty[$
- **1 pt :** $G'(2) > 0 = G'(\alpha)$
- **1 pt :** $(G')^{-1} : G'(]1,+\infty[) \to]1,+\infty[$ **est strictement croissante**

II. Exercice (uniquement en vB)

1. a) Calculer $\displaystyle\int_{-h}^{h} dt$, $\displaystyle\int_{-h}^{h} (x+t)\ dt$, $\displaystyle\int_{-h}^{h} t(x+t)\ dt$ et $\displaystyle\int_{-h}^{h} (x+t)^2\ dt$.

- **2 pts : 0,5 par calcul**

b) Démontrer que : $\displaystyle\int_{-h}^{h} t(x+t)^2\ dt = \frac{4h^3x}{3}$.

- **1 pt : calcul**

c) Établir les deux formules : $S_x(h) = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{-1}^{1} f(x+ht)\ dt$ et $G_x(h) = \dfrac{3}{2h}\displaystyle\int_{-1}^{1} tf(x+ht)\ dt$.

- **3 pts : 1 pour dt, 1 pour bornes, 1 pour $\mathcal{C}^1$**
- **1 pt : procéder de même pour G_x**

2. *Dans cette question uniquement*, soit n un entier naturel donné et f la fonction définie par $f(t) = t^n$.

a) Soit k un entier naturel. Calculer suivant la parité de k, la valeur de $h^k(1-(-1)^k)$.

- **1 pt : cas pair**
- **1 pt : cas impair**

b) Calculer $S_x(h)$ et $G_x(h)$ lorsque $x = 0$.

- **1 pt : S_0**
- **1 pt : G_0**

c) À l'aide de la formule du binôme, démontrer que :

$$S_x(h) = x^n + h^2A_x(h) \quad \text{et} \quad G_x(h) = nx^{n-1} + h^2B_x(h)$$

où A_x et B_x sont deux fonctions polynomiales en h (dont les coefficients dépendent de x).

- **1 pt : formule du binôme**
- **1 pt : linéarité**
- **1 pt : argument sur la séparation des indices pairs / indices impairs**
- **2 pts : reste du calcul (notamment la mise en facteur de h^2)**
- **3 pts : procéder de même pour G_x**

d) En déduire l'existence et l'expression de $s(x)$ et $g(x)$.

- **1 pt : existence (continuité des fonctions polynomiales)**
- **1 pt : expression**

3. *Dans cette question uniquement*, la fonction f est définie par $f(t) = |t|$ et on choisit $x = 0$.

a) La fonction f est-elle dérivable en 0 ?

- **1 pt : dérivée à droite**
- **1 pt : dérivée à gauche**

b) Calculer $S_x(h)$ et $G_x(h)$ pour $x = 0$. En déduire l'existence et la valeur de $s(0)$ et $g(0)$.

- **1 pt : $S_0(h) = \frac{h}{2}$**
- **1 pt : $G_0(h) = 0$**

- **1 pt : conclusion**

4. Exprimer $S_x(h)$ à l'aide d'une primitive F de f. Établir l'existence de $s(x)$ et démontrer que $s(x) = f(x)$.

- **1 pt : introduction d'une primitive**
- **1 pt : expression** $S_x(h) = \dfrac{1}{2h}\ (F(x+h) - F(x-h))$
- **1 pt :** $S_x(h) = \dfrac{1}{2}\ \left(\dfrac{F(x+h)-F(x)}{h} + \dfrac{F(x)-F(x-h)}{h}\right)$
- **1 pt :** $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{F(x+h)-F(x)}{h} = f(x)$
- **1 pt :** $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{F(x)-F(x-h)}{h} = f(x)$

5. *On suppose dans cette question que f est dérivable en x de dérivée $f'(x)$.*

a) Démontrer l'existence d'une fonction v_x définie et continue sur $\mathbb{R}$, vérifiant $v_x(0) = 0$ et telle que pour tout réel t on ait : $f(x+t) = f(x) + tf'(x) + tv_x(t)$.

- **1 pt : expression de** v_x
- **1 pt : continuité en** 0
- **1 pt : continuité sur** $\mathbb{R}^*$
- **1 pt : conclusion**

b) En déduire l'égalité : $G_x(h) = f'(x) + \dfrac{3}{2h^3} \displaystyle\int_{-h}^{h}\ t^2 v_x(t)\ dt$.

- **2 pts : calcul**

c) Soit ε un réel strictement positif. Démontrer qu'il existe $\delta > 0$ tel que si $h \in]0, \delta]$, on a :

$$\left| \frac{3}{2h^3} \int_{-h}^{h}\ t^2 v_x(t)\ dt \right| \leqslant \varepsilon$$

- **1 pt : inégalité triangulaire**
- **1 pt : définition de la continuité**
- **1 pt : argument** $h \in\ ]0, \delta]$
- **1 pt : croissance de l'intégrale avec les bornes dans l'orde croissant**

d) En déduire l'expression de $g(x)$ en fonction de $f'(x)$.

- **1 pt :** $\left|\ \dfrac{3}{2h^3} \displaystyle\int_{-h}^{h}\ t^2 v_x(t)\ dt\ \right|\ \leqslant\ \varepsilon$
- **1 pt :** $f'(x) = \lim\limits_{h \to 0^+}\ G_x(h)$