Lycée Carnot

Concours blanc commun ECE 2

Du 23 janvier 2018 au 26 janvier 2018

Mathématiques II

Le 26 janvier 2018

De 8 h à 12 h

La durée de l'épreuve est 4 heures.

Le sujet comporte 6 pages. Les exercices sont indépendants.

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.
Ils ne doivent faire usage d'aucun document : l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.
Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

I. Problème (ESSEC-II 2016)

Le but du problème est d'étudier le renouvellement d'un des composants d'un système complexe (une machine, un réseau de distribution d'énergie etc...) formé d'un assemblage de différentes pièces susceptibles de tomber en panne. On s'intéresse donc à une de ces pièces susceptibles de se casser ou de tomber en panne et on se place dans la situation idéale où dès que la pièce est défectueuse, elle est immédiatement remplacée. Dans une première partie, on étudie quelques propriétés fondamentales des variables aléatoires discrètes. Puis, dans une deuxième partie, on étudie la probabilité de devoir changer la pièce un certain jour donné. Enfin, dans une troisième partie on cherche à estimer le temps de fonctionnement du système avec un certain nombre de pièces de rechange à disposition.
Dans tout le problème, on considère un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$. Pour toute variable aléatoire réelle X définie sur $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$, on note, sous réserve d'existence, $\mathbb{E}(X)$ l'espérance de X et $\mathbb{V}(X)$ sa variance.
La deuxième partie peut être traitée en admettant si besoin les résultats de la première partie.

Première partie

Dans cette première partie, on étudie les propriétés asymptotiques d'une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{N}^*$.

1. a) Montrer que pour tout entier naturel j non nul :

$$\mathbb{P}([X = j]) = \mathbb{P}([X > j - 1]) - \mathbb{P}([X > j])$$

Démonstration.
Soit $j \in \mathbb{N}^*$.

- Remarquons tout d'abord :

$$[X > j] \ \cup \ [X = j] \ = \ [X \geqslant j]$$

  Or, comme X est à valeurs dans $\mathbb{N}^*$: $[X > j - 1] = [X \geqslant j]$.

- On obtient alors :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}([X > j-1]) &= \mathbb{P}([X > j] \ \cup \ [X = j]) \\ &= \mathbb{P}([X > j]) + \mathbb{P}([X = j]) \quad \textit{(car } [X > j] \textit{ et } [X = j] \textit{ sont incompatibles)} \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{En réordonnant, on obtient : } \forall j \in \mathbb{N}^*,\ \mathbb{P}([X = j]) = \mathbb{P}([X > j - 1]) - \mathbb{P}([X > j]).}$$

Commentaire

- Dans cette démonstration, on met en place une méthode classique de raisonnement :
  (i) on commence par une étape de décomposition de l'événement,
  (ii) puis on applique la fonction $\mathbb{P}$ de part et d'autre.

  Il faut prendre le réflexe de raisonner sur les événements avant d'appliquer la fonction $\mathbb{P}$.
- La formule énonce une différence entre de probabilités d'événements. Après réordonnement, on obtient une somme. Il faut donc penser à une décomposition d'événement à l'aide d'une union. Si on ne réordonne pas les différents membres de l'égalité, on peut aussi penser à une décomposition à l'aide d'une différence ensembliste. Pour cela on remarque que, comme X est à valeurs dans $\mathbb{N}^*$:

$$[X > j-1] \setminus [X > j] = [X = j]$$

Ainsi :

$$\begin{array}{rcll} \mathbb{P}([X=j]) & = & \mathbb{P}([X > j-1] \ \setminus \ [X > j]) & \\ & = & \mathbb{P}([X > j-1]) \ - \ \mathbb{P}([X > j-1] \ \cap \ [X > j]) & \\ & = & \mathbb{P}([X > j-1]) \ - \ \mathbb{P}([X > j]) & \textit{(car } [X > j] \subset [X > j-1]\textit{)} \end{array}$$

$\square$

b) Soit p un entier naturel non nul. Montrer que :

$$\sum_{j=1}^{p} j\,\mathbb{P}([X=j]) = \sum_{j=0}^{p-1} \mathbb{P}([X>j]) - p\,\mathbb{P}([X>p])$$

Démonstration.
Soit $j \in \mathbb{N}^*$.

- D'après la question précédente :

$$j\ \mathbb{P}([X=j]) = j\ \mathbb{P}([X>j-1]) - j\ \mathbb{P}([X>j])$$

- Ainsi, on obtient en sommant :

$$\begin{aligned}
& \sum_{j=1}^{p} j\ \mathbb{P}([X=j]) \\
= \ & \sum_{j=1}^{p} \left(j\ \mathbb{P}([X>j-1]) - j\ \mathbb{P}([X>j])\right) \\
= \ & \sum_{j=1}^{p} j\ \mathbb{P}([X>j-1]) - \sum_{j=1}^{p} j\ \mathbb{P}([X>j]) && \textit{(par linéarité)} \\
= \ & \sum_{j=0}^{p-1} (j+1)\ \mathbb{P}([X>j]) - \sum_{j=1}^{p} j\ \mathbb{P}([X>j]) && \textit{(par décalage d'indice)} \\
= \ & \sum_{j=0}^{p-1} j\ \mathbb{P}([X>j]) + \sum_{j=0}^{p-1} \mathbb{P}([X>j]) - \sum_{j=1}^{p} j\ \mathbb{P}([X>j]) && \textit{(par linéarité)} \\
= \ & 0 \times \mathbb{P}([X>j]) + \cancel{\sum_{j=1}^{p-1} j\ \mathbb{P}([X>j])} + \sum_{j=0}^{p-1} \mathbb{P}([X>j]) - \left(\cancel{\sum_{j=1}^{p-1} j\ \mathbb{P}([X>j]} + p\ \mathbb{P}([X>p])\right) \\
= \ & \sum_{j=0}^{p-1} \mathbb{P}([X>j]) - p\ \mathbb{P}([X>p])
\end{aligned}$$

$$\boxed{\forall p \in \mathbb{N}^*,\ \sum_{j=1}^{p} j\ \mathbb{P}([X=j]) = \sum_{j=0}^{p-1} \mathbb{P}([X>j]) - p\ \mathbb{P}([X>p])}$$

Commentaire

La démonstration consiste à démontrer un résultat de type somme télescopique.
On pouvait faire apparaître directement une telle somme en remarquant :

$$j\ \mathbb{P}([X=j]) = (j-1)\ \mathbb{P}([X>j-1]) - j\ \mathbb{P}([X>j]) + \mathbb{P}([X>j-1])$$

Ainsi, par sommation et linéarité :

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{p} j\ \mathbb{P}([X=j]) &= \sum_{j=1}^{p} \Big((j-1)\ \mathbb{P}([X>j-1]) - j\ \mathbb{P}([X>j])\Big) + \sum_{j=1}^{p} \mathbb{P}([X>j-1]) \\
&= \cancel{(1-1)\ \mathbb{P}([X>1-1])} - p\ \mathbb{P}([X>p]) + \sum_{j=1}^{p} \mathbb{P}([X>j-1]) \\
&= -p\ \mathbb{P}([X>p]) + \sum_{j=0}^{p-1} \mathbb{P}([X>j]) && \textit{(par décalage d'indice)}
\end{aligned}$$

□

2. a) On suppose que X admet une espérance $\mathbb{E}(X) = \mu$.

i. Justifier la convergence de la série de terme général $k\,\mathbb{P}([X = k])$.

Démonstration.
La variable aléatoire X est à valeur dans $\mathbb{N}^*$.
Ainsi, elle admet une espérance si et seulement si la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} n\ \mathbb{P}([X = n])$ est absolument convergente. Or, d'après l'énoncé, X admet une espérance.

On en déduit que la série de terme général $k\,\mathbb{P}([X = k])$ est absolument convergente et donc convergente. □

ii. Montrer que :

$$\lim_{p\to+\infty} \sum_{k=p+1}^{+\infty} k\,\mathbb{P}([X = k]) = 0$$

Démonstration.

- La série de terme général $k\,\mathbb{P}([X = k])$ étant convergente, on obtient, par « relation de Chasles » :
$$\sum_{k=1}^{+\infty} k\ \mathbb{P}([X = k]) = \sum_{k=1}^{p} k\ \mathbb{P}([X = k]) + \sum_{k=p+1}^{+\infty} k\ \mathbb{P}([X = k])$$
Ainsi, en réordonnant :
$$\sum_{k=p+1}^{+\infty} k\ \mathbb{P}([X = k]) = \sum_{k=1}^{+\infty} k\ \mathbb{P}([X = k]) - \sum_{k=1}^{p} k\ \mathbb{P}([X = k])$$
- Par passage à la limite dans cette égalité :

$$\begin{aligned}\lim_{p\to+\infty} \sum_{k=p+1}^{+\infty} k\ \mathbb{P}([X = k]) &= \lim_{p\to+\infty} \sum_{k=1}^{+\infty} k\ \mathbb{P}([X = k]) - \lim_{p\to+\infty} \sum_{k=1}^{p} k\ \mathbb{P}([X = k]) \\ &= \sum_{k=1}^{+\infty} k\ \mathbb{P}([X = k]) - \sum_{k=1}^{+\infty} k\ \mathbb{P}([X = k]) \ = \ 0\end{aligned}$$

$$\boxed{\lim_{p\to+\infty} \sum_{k=p+1}^{+\infty} k\,\mathbb{P}([X = k]) = 0}$$

Commentaire

Cette question est l'illustration d'un résultat classique du chapitre sur les séries.
Considérons une série $\sum u_n$ convergente et notons S sa somme.
On définit alors son reste d'ordre n par : $R_n = S - S_n$. Alors :

$$\lim_{n\to+\infty} R_n \ = \ \lim_{n\to+\infty} S - \lim_{n\to+\infty} S_n \ = \ S - S \ = \ 0$$

On retrouve le résultat précédent en remarquant : $R_n = \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} u_k$.

□

iii. En déduire que :

$$\lim_{p \to +\infty} p \ \mathbb{P}([X > p]) = 0$$

Démonstration.
Soit $p \in \mathbb{N}^*$.

- Comme X est à valeurs dans $\mathbb{N}^*$:

$$[X > p] \ = \ \bigcup_{k=p+1}^{+\infty} [X = k]$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}([X > p]) &= \mathbb{P}\left(\bigcup_{k=p+1}^{+\infty} [X = k]\right) \\ &= \sum_{k=p+1}^{+\infty} \mathbb{P}([X = k]) \qquad \textit{(car les événements } [X = k] \textit{ sont deux à deux incompatibles)} \end{aligned}$$

- On en déduit :

$$0 \ \leqslant \ p \ \mathbb{P}([X > p]) \ = \ \sum_{k=p+1}^{+\infty} p \ \mathbb{P}([X = k]) \ \leqslant \ \sum_{k=p+1}^{+\infty} k \ \mathbb{P}([X = k])$$

- Comme $\lim\limits_{p \to +\infty} 0 = 0 = \lim\limits_{p \to +\infty} \sum\limits_{k=p+1}^{+\infty} k \ \mathbb{P}([X = k])$, on en déduit, par le théorème d'encadrement que la suite $\left(\sum\limits_{k=p+1}^{+\infty} p \ \mathbb{P}([X = k])\right)_{p \in \mathbb{N}^*}$ est convergente de limite nulle.

$$\boxed{\text{Ainsi : } \lim_{p \to +\infty} p \ \mathbb{P}([X > p]) = 0.}$$

Commentaire

Cette question illustre de nouveau la méthode évoquée en question ***1.a)***. Le résultat porte sur la quantité $p\mathbb{P}([X > p])$. Pour l'obtenir, on commence par décomposer de l'événement $[X > p]$ puis on appliquer la fonction $\mathbb{P}$.

□

iv. Montrer que la série de terme général $\mathbb{P}([X > j])$ converge.

Démonstration.
Soit $p \in \mathbb{N}^*$. D'après la question ***1.b)*** :

$$\sum_{j=0}^{p-1} \mathbb{P}([X > j]) = \sum_{j=1}^{p} j \ \mathbb{P}([X = j]) - p \ \mathbb{P}([X > p])$$

La suite $\left(\sum\limits_{j=1}^{p} j \ \mathbb{P}([X = j])\right)_{p \in \mathbb{N}^*}$ admet une limite finie d'après la question ***2.a)i.*** et il en est de même de la suite $\big(p \ \mathbb{P}([X > p])\big)_{p \in \mathbb{N}^*}$ d'après la question précédente.
Ainsi, la suite $\left(\sum\limits_{j=0}^{p-1} \mathbb{P}([X > j])\right)_{p \in \mathbb{N}^*}$ admet une limite finie.

$$\boxed{\text{La série de terme général } \mathbb{P}([X > j]) \text{ converge.}}$$

□

v. Montrer que : $\mu = \sum\limits_{j=0}^{+\infty} \mathbb{P}([X > j])$.

Démonstration.
Par passage à la limite dans l'égalité précédente :

$$\lim_{p\to+\infty} \sum_{j=0}^{p-1} \mathbb{P}([X > j]) = \lim_{p\to+\infty} \sum_{j=1}^{p} j\ \mathbb{P}([X = j]) - \lim_{p\to+\infty} p\ \mathbb{P}([X > p]) \ = \ \mu - 0 \ = \ \mu$$

$$\boxed{\text{Ainsi : } \mu = \lim_{p\to+\infty} \sum_{j=0}^{p-1} \mathbb{P}([X > j]) = \sum_{j=0}^{+\infty} \mathbb{P}([X > j]).}$$

□

b) On suppose que $\sum\limits_{j=0}^{+\infty} \mathbb{P}([X > j])$ converge.

i. Déterminer le sens de variation de la suite $(v_p)_{p\geqslant 1}$ définie par :

$$v_p = \sum_{j=0}^{p-1} \mathbb{P}([X > j])$$

Démonstration.
Soit $p \in \mathbb{N}^*$.

$$v_{p+1} - v_p \ = \ \sum_{j=0}^{p} \mathbb{P}([X > j]) - \sum_{j=0}^{p-1} \mathbb{P}([X > j]) \ = \ \mathbb{P}([X > p]) \ \geqslant \ 0$$

$$\boxed{\text{La suite } (v_p)_{p\geqslant 1} \text{ est croissante.}}$$

□

ii. Comparer $\sum\limits_{j=1}^{p} j\,\mathbb{P}([X = j])$ et $\sum\limits_{j=0}^{+\infty} \mathbb{P}([X > j])$.

Démonstration.
Soit $p \in \mathbb{N}^*$.

- D'après la question ***1.b)*** :

$$\sum_{j=1}^{p} j\ \mathbb{P}([X = j]) \ = \ \sum_{j=0}^{p-1} \mathbb{P}([X > j]) - p\ \mathbb{P}([X > p]) \ \leqslant \ \sum_{j=0}^{p-1} \mathbb{P}([X > j]) = v_p$$

- La série de terme général $\mathbb{P}([X > j])$ étant convergente, on obtient, par « relation de Chasles » :

$$\sum_{j=0}^{+\infty} \mathbb{P}([X > j]) = \sum_{j=0}^{p-1} \mathbb{P}([X > j]) + \sum_{j=p}^{+\infty} \mathbb{P}([X > j])$$

  En réordonnant, on obtient :

$$\sum_{j=0}^{p-1} \mathbb{P}([X > j]) = \sum_{j=0}^{+\infty} \mathbb{P}([X > j]) - \sum_{j=p}^{+\infty} \mathbb{P}([X > j]) \ \leqslant \ \sum_{j=0}^{+\infty} \mathbb{P}([X > j])$$

$$\boxed{\sum_{j=1}^{p} j\ \mathbb{P}([X = j]) \ \leqslant \ \sum_{j=0}^{+\infty} \mathbb{P}([X > j])}$$

Commentaire

- On a vu dans la question précédente que la suite $(v_p)_{p \geqslant 1}$ est croissante. On sait de plus qu'elle est convergente (c'est l'hypothèse faite en début de question ***2.a)***).
L'esprit de l'énoncé semble donc être d'utiliser le résultat suivant :

$$\boxed{\left.\begin{array}{l}(v_n) \text{ croissante} \\ v_n \to \ell\end{array}\right\} \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N},\ v_n \leqslant \ell}$$

- Ce résultat est immédiat si l'on connaît la notion de borne supérieure d'une suite : sous réserve d'existence, le plus petit des majorants de la suite. La démonstration du théorème de convergence monotone établit qu'une suite croissante majorée converge vers sa borne supérieure. Si l'on connaît cette démonstration, le résultat encadré ci-dessus est immédiat.
- Cependant, le programme officiel stipule que cette démonstration est hors programme, tout comme la notion de borne supérieure. Il est toutefois possible de démontrer ce résultat sans utiliser la notion de borne supérieure. Détaillons une démonstration possible.

  On suppose par l'absurde que :

  × la suite (u_n) croissante,

  × la suite (u_n) convergente vers ℓ,

  × et que $\texttt{NON}(\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leqslant \ell)$ est vérifiée.
  Autrement dit, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $u_{n_0} > \ell$.

  La suite (u_n) étant croissante, on a :

$$\forall n \geqslant n_0,\ u_n \geqslant u_{n_0}$$

  Par passage à la limite dans cette inégalité, on obtient : $\ell \geqslant u_{n_0}$.
  En combinant avec l'inégalité de l'hypothèse, on a alors : $\ell \geqslant u_{n_0} > \ell$.
  Ce qui est absurde !

□

iii. En déduire que X admet une espérance.

Démonstration.

- La v.a.r. X admet une espérance si et seulement si la série $\sum j\ \mathbb{P}([X = j])$ est absolument convergente. Cette série étant à termes positifs, cela revient à démontrer qu'elle est convergente.
- La suite $\left(\sum\limits_{j=1}^{p} j\ \mathbb{P}([X = j])\right)_{p \in \mathbb{N}^*}$ est croissante. En effet, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$:

$$\sum_{j=1}^{p+1} j\ \mathbb{P}([X = j]) - \sum_{j=1}^{p} j\ \mathbb{P}([X = j]) = (p+1)\ \mathbb{P}([X = p+1]) \ \geqslant\ 0$$

- Elle est de plus majorée par $\sum\limits_{j=0}^{+\infty} \mathbb{P}([X > j])$ d'après la question précédente.

Ainsi, la suite $\left(\sum\limits_{j=1}^{p} j\ \mathbb{P}([X = j])\right)_{p \in \mathbb{N}^*}$ est convergente.

$$\boxed{\text{Ainsi, } X \text{ admet une espérance.}}$$

□

c) Conclure des questions précédentes que X admet une espérance si et seulement si la série de terme général $\mathbb{P}([X > j])$ converge.

Démonstration.

- En question ***2.a)***, on a démontré que si X admet une espérance, alors la série de terme général $\mathbb{P}([X > j])$ est convergente (résultat de la question ***2.a)iv.***).
- En question ***2.b)***, on a démontré que si la série de terme général $\mathbb{P}([X > j])$ est convergente alors X admet une espérance (résultat de la question ***2.a)iii.***).

$$\boxed{\text{La v.a.r. } X \text{ admet une espérance si et seulement si la série de terme général } \mathbb{P}([X > j]) \text{ converge.}}$$

□

3. On suppose dans cette question qu'il existe un réel α strictement positif tel que pour tout entier naturel j on ait :

$$\mathbb{P}([X > j]) = \frac{1}{(j+1)^\alpha} \qquad (*)$$

a) Légitimer que $(*)$ définit bien une loi de probabilité d'une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}^*$.

Démonstration.
Il s'agit de démontrer que la suite $\Big(\mathbb{P}([X = j])\Big)_{j\in\mathbb{N}^*}$ définie par $(*)$ vérifie :

(i) $\forall j \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}([X = j]) \geqslant 0$,

(ii) $\sum\limits_{j=1}^{+\infty} \mathbb{P}([X = j]) = 1$.

- Soit $j \in \mathbb{N}^*$. D'après la question ***1.a)*** :

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{P}([X = j]) & = & \mathbb{P}([X > j-1]) - \mathbb{P}([X > j]) \\ & = & \dfrac{1}{j^\alpha} - \dfrac{1}{(j+1)^\alpha} \ \geqslant \ 0 \end{array}$$

En effet, $j+1 \geqslant j$ et il suffit alors d'appliquer de part et d'autre la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x^\alpha}$, décroissante sur $]0, +\infty[$.

- Soit $p \in \mathbb{N}^*$. On reconnaît une somme télescopique :

$$\begin{array}{rcl} \sum\limits_{j=1}^{p} \mathbb{P}([X = j]) & = & \sum\limits_{j=1}^{p} \left(\mathbb{P}([X > j-1]) - \mathbb{P}([X > j])\right) \\ & = & \mathbb{P}([X > 0]) - \mathbb{P}([X > p]) \ = \ \dfrac{1}{1^\alpha} - \dfrac{1}{(p+1)^\alpha} \\ & = & 1 - \dfrac{1}{(p+1)^\alpha} \underset{p\to+\infty}{\longrightarrow} 1 \end{array}$$

En effet, $(p+1)^\alpha \underset{p\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ car $\alpha > 0$.

$$\boxed{\text{La relation } (*) \text{ définit bien une loi de probabilité d'une variable aléatoire à valeurs dans } \mathbb{N}^*.}$$

□

b) Montrer que X admet une espérance si et seulement si α est strictement supérieur à 1.

Démonstration.

- D'après la question ***2.c)***, la v.a.r. X admet une espérance si et seulement si la série de terme général $\mathbb{P}([X > j])$ converge.
- $\times$ $\mathbb{P}([X > j]) = \dfrac{1}{(j+1)^\alpha} \underset{j\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{j^\alpha}$ $(\geqslant 0)$

  $\times$ La série $\sum\limits_{j\geqslant 1} \dfrac{1}{j^\alpha}$ est une série de Riemann d'exposant α.
  Elle est convergente si et seulement si $\alpha > 1$.

  Ainsi, d'après le critère d'équivalence des séries à termes positifs, la série de terme général $\mathbb{P}([X > j])$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.

$$\boxed{\text{La v.a.r. } X \text{ admet une espérance si et seulement si } \alpha > 1.}$$

□

c) Montrer que pour tout entier naturel j non nul :

$$\mathbb{P}([X = j]) = \frac{1}{j^\alpha}\left(1 - \frac{1}{(1+\frac{1}{j})^\alpha}\right)$$

Démonstration.
Soit $j \in \mathbb{N}^*$. Comme on l'a vu en question ***3.a)*** :

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{P}([X = j]) & = & \mathbb{P}([X > j-1]) - \mathbb{P}([X > j]) \\ & = & \dfrac{1}{j^\alpha} - \dfrac{1}{(j+1)^\alpha} \\ & = & \dfrac{1}{j^\alpha}\left(1 - \dfrac{j^\alpha}{(j+1)^\alpha}\right) \end{array}$$

Il suffit alors de remarquer :

$$\frac{j^\alpha}{(j+1)^\alpha} = \left(\frac{j}{j+1}\right)^\alpha = \left(\frac{\cancel{j}}{\cancel{j}}\,\frac{1}{1+\frac{1}{j}}\right)^\alpha = \frac{1}{(1+\frac{1}{j})^\alpha}$$

$$\boxed{\forall j \in \mathbb{N}^*,\ \mathbb{P}([X = j]) = \frac{1}{j^\alpha}\left(1 - \frac{1}{(1+\frac{1}{j})^\alpha}\right)}$$

□

d) i. Étudier les variations de $f : x \mapsto 1 - (1+x)^{-\alpha} - \alpha x$ sur $[0, 1]$.

Démonstration.

- La fonction $x \mapsto (1+x)^{-\alpha}$ est $\mathcal{C}^1$ sur $[0, 1]$ car c'est l'inverse de la fonction $x \mapsto (1+x)^\alpha$, $\mathcal{C}^1$ sur $[0, 1]$, et qui ne s'annule pas sur $[0, 1]$. Ainsi, f est $\mathcal{C}^1$ sur $[0, 1]$.
- Soit $x \in [0, 1]$.

$$f'(x) \ = \ \alpha\ (1+x)^{-\alpha-1} - \alpha \ = \ \alpha\ \left(\frac{1}{(1+x)^{\alpha+1}} - 1\right) \ = \ \alpha\ \frac{1-(1+x)^{\alpha+1}}{(1+x)^{\alpha+1}}$$

  Comme $x \geqslant 0$:

$$1 + x \geqslant 1$$

$$\text{donc} \quad (1+x)^{\alpha+1} \geqslant 1 \qquad \textit{(par croissance de la fonction } x \mapsto x^\alpha\textit{)}$$

  Ainsi $(1+x)^{\alpha+1} > 0$ et $1 - (1+x)^{\alpha+1} \leqslant 0$.
  On en déduit que : $f'(x) \leqslant 0$ avec égalité seulement si $x = 0$.

- On en déduit le tableau de variation suivant.

x	0 $\qquad\qquad$ 1
Signe de $f'(x)$	$-$
Variations de f	$0 \searrow 1-\alpha-\frac{1}{2^\alpha}$

☐

ii. Montrer que pour tout entier naturel j non nul :

$$\mathbb{P}([X=j]) \leqslant \frac{\alpha}{j^{1+\alpha}}$$

Démonstration.

- D'après la question qui précède, la fonction f est décroissante sur $[0,1]$. Ainsi :

$$\forall x \in [0,1], \ f(x) \ \leqslant \ f(0) = 0$$

- On en déduit :

$$\forall x \in [0,1], \quad \underset{\displaystyle 1-\frac{1}{(1+x)^\alpha}}{\underset{\shortparallel}{1-(1+x)^{-\alpha}}} \quad \leqslant \quad \alpha\ x$$

- Soit $j \in \mathbb{N}^*$. En appliquant la formule à $x = \dfrac{1}{j} \in [0,1]$, on obtient :

$$1-\frac{1}{(1+\frac{1}{j})^\alpha} \ \leqslant \ \alpha\ \frac{1}{j}$$

$$\text{donc} \quad \frac{1}{j^\alpha}\left(1-\frac{1}{(1+\frac{1}{j})^\alpha}\right) \ \leqslant \ \frac{\alpha}{j^{\alpha+1}} \qquad \textit{(car } \tfrac{1}{j^\alpha} \geqslant 0\textit{)}$$

$$\boxed{\text{On en déduit : } \forall j \in \mathbb{N}^*,\ \mathbb{P}([X=j]) \leqslant \frac{\alpha}{j^{1+\alpha}}.}$$

☐

e) Montrer, en utilisant le résultat de ***3.c)***, que :

$$\lim_{j\to+\infty} j^{\alpha+1}\,\mathbb{P}([X=j]) = \alpha$$

Démonstration.

- La fonction $x \mapsto (1+x)^{-\alpha}$ est $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$.
  Elle admet donc un développement limité au voisinage de 0.
  Ainsi, il existe une fonction ε définie dans un voisinage de 0, telle que, au voisinage de 0 :

$$(1+x)^{-\alpha} \ = \ 1-\alpha\ x + x\ \varepsilon(x)$$

où $\lim\limits_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0$.

- Comme $\frac{1}{j} \underset{j \to +\infty}{\longrightarrow} 0$, on peut appliquer l'égalité précédente à $x = \frac{1}{j}$ pour j dans un voisinage de $+\infty$. On obtient :

$$\begin{array}{lrcl} & \left(1 + \dfrac{1}{j}\right)^{-\alpha} & = & 1 - \alpha\ \dfrac{1}{j} + \dfrac{1}{j}\ \varepsilon\left(\dfrac{1}{j}\right) \\ \text{ainsi} & 1 - \left(1 + \dfrac{1}{j}\right)^{-\alpha} & = & \alpha\ \dfrac{1}{j} - \dfrac{1}{j}\ \varepsilon\left(\dfrac{1}{j}\right) \\ \text{puis} & \dfrac{1}{j^\alpha}\ \left(1 - \left(1 + \dfrac{1}{j}\right)^{-\alpha}\right) & = & \dfrac{1}{j^\alpha}\ \left(\alpha\ \dfrac{1}{j} - \dfrac{1}{j}\ \varepsilon\left(\dfrac{1}{j}\right)\right) \\ \text{enfin} & j^{\alpha+1}\ \mathbb{P}([X = j]) & = & \alpha - \varepsilon\left(\dfrac{1}{j}\right) \end{array}$$

(par multiplication de part et d'autre par $j^{\alpha+1}$)

- Enfin, par théorème de composition de limites :

$$\lim_{j \to +\infty} \varepsilon\left(\frac{1}{j}\right) = \lim_{x \to 0} \varepsilon(x) = 0$$

$$\boxed{\text{On en déduit que } \lim_{j \to +\infty} j^{\alpha+1}\ \mathbb{P}([X = j]) = \alpha.}$$

Commentaire

- À l'aide de l'inégalité de la question précédente, on obtient :

$$\forall j \in \mathbb{N}^*,\ j^{\alpha+1}\ \mathbb{P}([X = j]) \ \leqslant\ \alpha$$

Il est donc assez naturel d'envisager un raisonnement par encadrement. Il faudrait pour cela tenter d'obtenir le même type d'inégalité à gauche. L'énoncé écarte cette possibilité : le concepteur renvoie à la question ***3.c)*** et non pas à la question ***3.d)***.

- Cette question est une nouvelle fois aux limites du programme officiel. Il stipule en effet que « Les seuls développements exigibles concernent les fonctions $x \mapsto e^x$, $\ln(1 + x)$, $(1 + x)^\alpha$ au voisinage de 0, et à l'ordre 1 ou 2 uniquement. Aucune connaissance (somme, produit, composition ...) concernant les techniques de calcul des développements limités n'est exigible. »
On préfère dans la démonstration revenir à la définition de base de la notion de développement limité à l'aide d'une fonction ε. Ceci permet de s'affranchir des manipulations des $\underset{x \to 0}{o}(\ldots)$ et $\underset{j \to +\infty}{o}(\ldots)$ et de s'assurer que la démonstration utilise bien seulement les attendus du programme.

□

f) Montrer que X admet une variance si et seulement si $\alpha > 2$.

Démonstration.

- La v.a.r. X admet une variance si et seulement si la série $\sum j^2\ \mathbb{P}([X = j])$ est absolument convergente. Cette série étant à termes positifs, cela revient à démontrer qu'elle est convergente.
- D'après la question précédente : $\lim\limits_{j \to +\infty} j^{\alpha+1}\ \mathbb{P}([X = j]) = \alpha \neq 0$. On en déduit :

$$\begin{array}{lrcl} & j^{\alpha+1}\ \mathbb{P}([X = j]) & \underset{j \to +\infty}{\sim} & \alpha \\ \text{donc} & j^2\ \mathbb{P}([X = j]) & \underset{j \to +\infty}{\sim} & \alpha\ j^{1-\alpha} = \alpha\ \dfrac{1}{j^{\alpha-1}} \end{array}$$

(par multiplication par $j^{1-\alpha} \neq 0$)

- $\times$ $j^2\ \mathbb{P}([X=j]) = \alpha\ \dfrac{1}{j^{\alpha-1}}$ $(\geqslant 0)$

  $\times$ La série $\sum\limits_{j\geqslant 1} \dfrac{1}{j^{\alpha-1}}$ est une série de Riemann d'exposant $\alpha - 1$.
  Elle est donc convergente si et seulement si $\alpha - 1 > 1$ *i.e.* si $\alpha > 2$.

  Ainsi, par le théorème d'équivalence des séries à termes positifs, la série $\sum\ j^2\ \mathbb{P}([X=j])$ est convergente si et seulement si $\alpha > 2$.

$$\boxed{\text{Ainsi, } X \text{ admet une variance si et seulement si } \alpha > 2.}$$

□

Deuxième partie : Étude de la probabilité de panne un jour donné.

Dans cette deuxième partie, on suppose donnée une suite de variables aléatoires $(X_i)_{i\geqslant 1}$ mutuellement indépendantes et de même loi à valeurs dans $\mathbb{N}^*$.
Pour tout entier i non nul, X_i représente la durée de vie en jours du $i^{\text{ème}}$ composant en fonctionnement.
Soit k un entier naturel non nul. On note $T_k = X_1 + ... + X_k$. T_k représente donc le jour où le $k^{\text{ème}}$ composant tombe en panne. On fixe un entier naturel n non nul représentant un jour donné et on considère l'événement A_n : « le composant en place le jour n tombe en panne » c'est-à-dire A_n : « il existe k entier naturel non nul tel que $T_k = n$ », et on se propose d'étudier $\mathbb{P}(A_n)$.

4. Pour tout entier naturel non nul j, on note $p_j = \mathbb{P}([X_1 = j])$ et $u_j = \mathbb{P}(A_j)$. On suppose que pour tout entier naturel non nul j, on a $p_j \neq 0$. On pose de plus par convention $u_0 = 1$.

a) Montrer que : $u_1 = p_1$.

Démonstration.

- L'événement $[X_1 = 1]$ est réalisé si le premier composant en place tombe en panne le jour 1.
  L'événement A_1 est réalisé si le composant en place le jour 1 tombe en panne lors de ce jour.
- Les variables X_i sont à valeurs dans $\mathbb{N}^*$. Ceci signifie en particulier que chaque composant à une durée de vie d'au moins un jour. Ainsi, le seul composant en place le jour 1 est le premier composant. On en déduit :

$$[X_1 = 1] \ = \ A_1$$

$$\boxed{\text{Ainsi, } p_1 = \mathbb{P}([X_1 = 1]) = \mathbb{P}(A_1) = u_1.}$$

Commentaire

- Encore une fois, le raisonnement a lieu initialement sur les événements.
  On n'applique la fonction $\mathbb{P}$ que dans un deuxième temps.
- Il est fortement conseillé de prendre le temps de lire scrupuleusement l'énoncé. La méthode de remplacement des composants est énoncée seulement en début de problème. Il faut donc se reporter au paragraphe introductif lors de la résolution de cette deuxième partie. Par ailleurs, l'information concernant la durée de vie de chaque composant n'est pas explicitement mentionné : c'est un résultat à extraire de la définition des v.a.r. X_i.

□

b) i. Montrer que : $A_2 = [X_1 = 2] \ \cup \ ([X_1 = 1] \cap [X_2 = 1])$.

Démonstration.
Par définition, l'événement A_2 est réalisé si le composant en place le jour 2 tombe en panne lors de ce jour. Il reste alors à déterminer quel composant est en place lors du deuxième jour. Deux cas se présentent :

× soit le premier composant est tombé en panne après un jour.
Dans ce cas, c'est le deuxième composant qui était en place lors du deuxième jour.
S'il tombe en panne en jour 2 c'est qu'il est resté opérationnel un jour.

Dans ce cas, l'événement $[X_1 = 1] \cap [X_2 = 1]$ est réalisé.

× soit le premier composant est resté en vie strictement plus d'un jour.
Dans ce cas, c'est ce composant qui est en place lors du deuxième jour.
S'il tombe en panne en jour 2 c'est qu'il est resté opérationnel deux jours.

Dans ce cas, l'événement $[X_1 = 2]$ est réalisé.

$$\boxed{\text{On en conclut : } A_2 = [X_1 = 2] \ \cup \ ([X_1 = 1] \cap [X_2 = 1]).}$$

Commentaire

- Par définition, un événement est un ensemble. Démontrer l'égalité de deux ensembles c'est démontrer que tout élément du premier ensemble est dans le second et inversement. Ou encore qu'un élément est dans le premier ensemble si et seulement si il est aussi dans le second.
- En terme d'événement, cela signifie que le premier événement est réalisé (il existe ω rélisant cet événement *i.e.* il existe ω appartenant à cet événement) si et seulement si le second événement est réalisé (l'élément ω précédent est aussi élément de cet événement).

□

ii. En déduire u_2 en fonction de p_1 et p_2.

Démonstration.

- Les événements $[X_1 = 2]$ et $[X_1 = 1] \cap [X_2 = 1]$ sont incompatibles. En effet :

$$[X_1 = 2] \cap ([X_1 = 1] \ \cap \ [X_2 = 1]) \ = \ ([X_1 = 2] \ \cap \ [X_1 = 1]) \cap [X_2 = 1] = \varnothing \cap [X_2 = 1] = \varnothing$$

- Ainsi :

$$\begin{array}{rcll} \mathbb{P}(A_2) & = & \mathbb{P}([X_1 = 2] \cup ([X_1 = 1] \ \cap \ [X_2 = 1])) & \\ & = & \mathbb{P}([X_1 = 2]) + \mathbb{P}([X_1 = 1] \ \cap \ [X_2 = 1]) & \textit{(par incompatibilité des événements considérés)} \\ & = & \mathbb{P}([X_1 = 2]) + \mathbb{P}([X_1 = 1]) \ \times \ \mathbb{P}([X_2 = 1]) & \textit{(car } X_1 \textit{ et } X_2 \textit{ sont indépendantes)} \\ & = & \mathbb{P}([X_1 = 2]) + \mathbb{P}([X_1 = 1]) \ \times \ \mathbb{P}([X_1 = 1]) & \textit{(car } X_1 \textit{ et } X_2 \textit{ ont même loi)} \\ & = & p_2 + p_1^2 & \end{array}$$

$$\boxed{\text{Ainsi, } u_2 = p_2 + p_1^2.}$$

□

c) Pour tout entier naturel i, on pose $\tilde{X}_i = X_{i+1}$.

i. Montrer que les variables $\tilde{X}_i$ sont mutuellement indépendantes, indépendantes de X_1 et de même loi que X_1.

Démonstration.

- D'après l'énoncé, la suite $(X_i)_{i \geqslant 1}$ est une suite de variables mutuellement indépendantes. Il en est donc de même de la suite $(X_i)_{i \geqslant 2}$, qui n'est autre que la suite $(\tilde{X}_i)_{i \geqslant 1}$.

  $\boxed{\text{Les variables } \tilde{X}_i \text{ sont mutuellement indépendantes.}}$

- Par ailleurs, par le lemme des coalitions, toute variable $\tilde{X}_i$ (pour $i \geqslant 1$) est indépendante de la variable X_1.

- Enfin, la suite $(X_i)_{i \geqslant 1}$ est une suite de variables possédant toutes la même loi, celle de X_1. Il en est donc de même de la suite $(X_i)_{i \geqslant 2}$, qui n'est autre que la suite $(\tilde{X}_i)_{i \geqslant 1}$.

  $\boxed{\text{Les variables } \tilde{X}_i \text{ ont même loi que } X_1.}$

Commentaire

Il semble que l'énoncé comporte une petite coquille. Il aurait fallu écrire « tout entier naturel **non nul** i ». Cela pose un problème pour cette question : en effet, la variable $\tilde{X}_0 = X_1$ n'est pas indépendante de X_1.

□

ii. Soit k un entier naturel non nul strictement inférieur à n. Montrer que :

$$A_n \cap [X_1 = k] = [X_1 = k] \ \cap \ \bigcup_{j \geqslant 1} \left[\tilde{X}_1 + \tilde{X}_2 + \ldots + \tilde{X}_j = n - k\right]$$

Démonstration.

- D'après l'énoncé, A_n est l'événement « il existe k entier naturel non nul tel que $T_k = n$ ». Ainsi :

$$\begin{aligned} A_n &= \bigcup_{j \in \mathbb{N}^*} [T_j = n] \\ &= \bigcup_{j \in \mathbb{N}^*} [X_1 + \ldots + X_j = n] \\ &= [X_1 = n] \ \cup \ \bigcup_{j \geqslant 2} [X_1 + X_2 + \ldots + X_j = n] \end{aligned}$$

- On en déduit, pour tout $k \in [\![1, n-1]\!]$:

$$\begin{aligned} & [X_1 = k] \ \cap \ A_n \\ = \ & [X_1 = k] \ \cap \ \left([X_1 = n] \ \cup \ \bigcup_{j \geqslant 2} [X_1 + \ldots + X_j = n] \right) \\ = \ & [X_1 = k] \cap [X_1 = n] \ \cup \ \bigcup_{j \geqslant 2} \Big([X_1 = k] \ \cap \ [X_1 + X_2 + \ldots + X_j = n] \Big) \quad \textit{(par distributivité de } \cap \textit{ par rapport à } \cup\textit{)} \\ = \ & \varnothing \ \cup \ \bigcup_{j \geqslant 2} \Big([X_1 = k] \ \cap \ [k + X_2 + \ldots + X_j = n] \Big) \end{aligned}$$

  En effet, comme $k < n$, la v.a.r. X_1 ne peut pas être à la fois égale à k et à n.

- Enfin :

$$\begin{aligned}
& \bigcup_{j \geqslant 2} \Big([X_1 = k] \ \cap \ [k + X_2 + \ldots + X_j = n] \Big) \\
= \ & [X_1 = k] \ \cap \ \bigcup_{j \geqslant 2} \Big([X_2 + \ldots + X_j = n - k] \Big) && \textit{(par distributivité de } \cap \textit{ par rapport à } \cup\textit{)} \\
= \ & [X_1 = k] \ \cap \ \bigcup_{j \geqslant 1} \Big([X_2 + \ldots + X_{j+1} = n - k] \Big) && \textit{(par décalage d'indice)} \\
= \ & [X_1 = k] \ \cap \ \bigcup_{j \geqslant 1} \Big(\Big[\tilde{X}_1 + \ldots + \tilde{X}_j = n - k\Big] \Big) && \textit{(par décalage d'indice)}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Ainsi : } \forall k \in [\![1, n-1]\!], \ \ A_n \cap [X_1 = k] = [X_1 = k] \ \cap \ \bigcup_{j \geqslant 1} \Big[\tilde{X}_1 + \tilde{X}_2 + \ldots + \tilde{X}_j = n - k\Big]}$$

Commentaire

- Dans la démonstration, on a fait apparaître l'événement A_n sous la forme :

$$A_n = \bigcup_{j \in \mathbb{N}^*} [T_j = n]$$

En réalité, on aurait pu écrire : $A_n = \bigcup\limits_{j=1}^{n} [T_j = n]$.
On constate en effet que T_j prend ses valeurs dans $[\![j, +\infty[\![$ (le jour où $j^{\text{ème}}$ composant tombe en panne est forcément plus grand que le nombre j de composants) puisque chacune des variables X_i vaut 1 au minimum. Ainsi, pour tout $j \geqslant n+1$, $[T_j = n] = \varnothing$.
- On travaille donc en réalité sur une réunion finie. Ce point de détail est signalé ici pour la bonne compréhension des objets sur lesquels on travaille. Toutefois, il n'a pas à être mentionné dans une copie : ne pas préciser la borne haute de la réunion permet de simplifier les écritures suivantes.

□

iii. En déduire que pour tout entier naturel k non nul strictement inférieur à n :

$$\mathbb{P}_{[X_1=k]}(A_n) = \mathbb{P}(A_{n-k})$$

Démonstration.
Soit $k \in [\![1, n-1]\!]$.

- D'après l'énoncé, $p_k = \mathbb{P}([X_1 = k]) \neq 0$. Ainsi, $\mathbb{P}_{[X_1=k]}(A_n)$ est bien défini et :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}_{[X_1=k]}(A_n) &= \frac{\mathbb{P}([X_1 = k] \ \cap \ A_n)}{\mathbb{P}([X_1 = k])} \\
&= \frac{\mathbb{P}\Big([X_1 = k] \ \cap \ \bigcup\limits_{j \geqslant 1} \Big[\tilde{X}_1 + \tilde{X}_2 + \ldots + \tilde{X}_j = n - k\Big] \Big)}{\mathbb{P}([X_1 = k])} \\
&= \frac{\mathbb{P}\Big(\bigcup\limits_{j \geqslant 1} [X_1 = k] \ \cap \ \Big[\tilde{X}_1 + \tilde{X}_2 + \ldots + \tilde{X}_j = n - k\Big] \Big)}{\mathbb{P}([X_1 = k])}
\end{aligned}$$

La dernière égalité est obtenue par distributivité de $\cap$ sur $\cup$.

- On s'intéresse tout d'abord au numérateur.

$$\begin{array}{cl} & \mathbb{P}\Big(\bigcup\limits_{j\geqslant 1} [X_1 = k] \ \cap \ \Big[\tilde{X}_1 + \tilde{X}_2 + \ldots + \tilde{X}_j = n-k\Big]\Big) \\ = & \sum\limits_{j\geqslant 1} \mathbb{P}\Big([X_1 = k] \ \cap \ \Big[\tilde{X}_1 + \tilde{X}_2 + \ldots + \tilde{X}_j = n-k\Big]\Big) \quad \textit{(par réunion d'événements 2 à 2 incompatibles)} \\ = & \sum\limits_{j\geqslant 1} \mathbb{P}([X_1 = k]) \times \mathbb{P}\Big(\Big[\tilde{X}_1 + \tilde{X}_2 + \ldots + \tilde{X}_j = n-k\Big]\Big) \quad \textit{(par indépendance)} \end{array}$$

  En effet, par le lemme des coalitions, pour tout $j \geqslant 1$, les v.a.r. X_1 et $\tilde{X}_1+\tilde{X}_2+\ldots+\tilde{X}_j$ sont indépendantes. On en déduit que les événements $[X_1 = k]$ et $\Big[\tilde{X}_1 + \tilde{X}_2 + \ldots + \tilde{X}_j = n-k\Big]$ sont indépendants.

- Puis :

$$\begin{array}{cl} & \sum\limits_{j\geqslant 1} \mathbb{P}([X_1 = k]) \times \mathbb{P}\Big(\Big[\tilde{X}_1 + \tilde{X}_2 + \ldots + \tilde{X}_j = n-k\Big]\Big) \\ = & \mathbb{P}([X_1 = k]) \times \sum\limits_{j\geqslant 1} \mathbb{P}\Big(\Big[\tilde{X}_1 + \tilde{X}_2 + \ldots + \tilde{X}_j = n-k\Big]\Big) \\ = & \mathbb{P}([X_1 = k]) \times \sum\limits_{j\geqslant 1} \mathbb{P}\Big([X_1 + X_2 + \ldots + X_j = n-k]\Big) \end{array}$$

  En effet, les v.a.r. $\tilde{X}_1 + \tilde{X}_2 + \ldots + \tilde{X}_j$ et $X_1 + X_2 + \ldots + X_j$ ont même loi puisque ce sont des sommes d'un même nombre de v.a.r. indépendantes ayant toutes la même loi.

- Enfin :

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{P}_{[X_1=k]}(A_n) & = & \dfrac{\cancel{\mathbb{P}([X_1 = k])} \ \times \ \sum\limits_{j\geqslant 1} \mathbb{P}\Big([X_1 + X_2 + \ldots + X_j = n-k]\Big)}{\cancel{\mathbb{P}([X_1 = k])}} \\ & = & \sum\limits_{j\geqslant 1} \mathbb{P}\Big([X_1 + X_2 + \ldots + X_j = n-k]\Big) \\ & = & \mathbb{P}\Big(\bigcup\limits_{j\geqslant 1} [X_1 + X_2 + \ldots + X_j = n-k]\Big) \quad \textit{(par réunion d'événements 2 à 2 incompatibles)} \\ & = & \mathbb{P}(A_{n-k}) \end{array}$$

$$\boxed{\text{On obtient bien : } \forall k \in [\![1, n-1]\!],\ \mathbb{P}_{[X_1=k]}(A_n) = \mathbb{P}(A_{n-k}).}$$

□

d) Montrer que :

$$u_n = u_{n-1}\, p_1 + \ldots + u_0\, p_n$$

Démonstration.

- La famille $\big([X_1 = k]\big)_{k\in\mathbb{N}^*}$ forme un système complet d'événements.
  Ainsi, par la formule des probabilités totales :

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{P}(A_n) & = & \sum\limits_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}([X_1 = k] \cap A_n) \\ & = & \sum\limits_{k=1}^{n-1} \mathbb{P}([X_1 = k] \cap A_n) + \mathbb{P}([X_1 = n] \cap A_n) + \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} \mathbb{P}([X_1 = k] \cap A_n) \end{array}$$

- Or, pour tout $k \geqslant n+1$, on a : $[X_1 = k] \cap A_n = \varnothing$.
  En effet si les événements $[X_1 = k]$ et A_n sont réalisés alors le premier composant :
  × tombe en panne le jour $k \geqslant n+1$ (car $[X_1 = k]$ est réalisé).
  × est le composant en place le jour n. Et il tombe donc en panne le jour n (car A_n est réalisé).
  Ces deux événements sont donc bien incompatibles.

  $$\boxed{\text{Ainsi, pour tout } k \geqslant n+1 : \mathbb{P}([X_1 = k] \cap A_n) = \mathbb{P}(\varnothing) = 0.}$$

- D'autre part : $[X_1 = n] \subset A_n$.
  En effet, si $[X_1 = n]$ est réalisé alors le premier composant a une durée de vie de n jours. Il est donc en place le jour n et tombe alors en panne ce jour. Ce qui signifie que A_n est réalisé.

  $$\boxed{\text{Comme } [X_1 = n] \subset A_n \text{ alors } [X_1 = n] \cap A_n = [X_1 = n].}$$

- On déduit de ce qui précède :

$$\begin{array}{rcll}
\mathbb{P}(A_n) & = & \sum\limits_{k=1}^{n-1} \mathbb{P}([X_1 = k] \cap A_n) + \mathbb{P}([X_1 = n]) & \\
& = & \sum\limits_{k=1}^{n-1} \mathbb{P}([X_1 = k]) \times \mathbb{P}_{[X_1=k]}(A_n) + \mathbb{P}([X_1 = n]) & \textit{(valide car pour tout } k \in \mathbb{N}^*, \mathbb{P}([X_1 = k]) \neq 0\textit{)} \\
& = & \sum\limits_{k=1}^{n-1} \mathbb{P}([X_1 = k]) \times \mathbb{P}(A_{n-k}) + \mathbb{P}([X_1 = n]) & \textit{(d'après la question précédente)} \\
& = & \sum\limits_{k=1}^{n-1} p_k \, u_{n-k} + p_n \ = \ u_{n-1} \, p_1 + \ldots + u_1 \, p_{n-1} + p_n &
\end{array}$$

  On rappelle que $u_0 = \mathbb{P}(A_0) = 1$ par convention.

  $$\boxed{\text{On en conclut : } u_n = u_{n-1} \, p_1 + \ldots + u_1 \, p_{n-1} + u_0 \, p_n.}$$

Commentaire

La propriété démontrée dans la question précédente a été démontrée pour tout $k \in [\![1, n-1]\!]$. On ne peut donc l'utiliser que pour un entier $k \in [\![1, n-1]\!]$. C'est une évidence qu'il convient toutefois de rappeler car elle est trop régulièrement ignorée par les candidats. Lorsque l'on souhaite utiliser un résultat précédent, il faut scrupuleusement vérifier que l'on est dans les conditions d'application de ce résultat.

□

e) En **Scilab**, soit $P = [p_1, p_2, ..., p_n]$ le vecteur ligne tel que $P(j) = p_j$ pour j dans $[\![1, n]\!]$.
Écrire un programme en **Scilab** qui calcule u_n à partir de P.

Démonstration.

- La suite (u_n) est une suite récurrente dont le $n^{\text{ème}}$ terme dépend de tous les précédents. Pour calculer le terme d'indice n, il faut avoir accès aux termes d'indice $0, \ldots, n-1$ de la suite.
  Il est donc nécessaire de créer un vecteur `U` permettant de stocker, au fur et à mesure du calcul, toutes ces valeurs.

- Pour caculer chaque cœfficient de `U`, on se sert de la formule démontrée dans la question précédente :

$$\left\{ \begin{array}{l} u_0 = 1 \\ \forall k \in \mathbb{N}^*, \ u_k \ = \ \sum\limits_{j=1}^{k} u_{k-j} \ p_j \end{array} \right.$$

  On commence par stocker dans `U` l'élément u_0. L'élément u_k (stocké en $k+1^{\text{ème}}$ case de `U`) est déterminé par un calcul de somme (on met à jour une variable auxiliaire `S`).

- Il faut faire attention aux indices : l'élément u_0 d'indice 0 est stocké en position 1 du vecteur U et ce décalage est présent pour toutes les valeurs stockées dans U.
- Enfin, il faut noter que le programme prend en paramètre le vecteur P et que c'est ce vecteur qui doit fournir l'entier n, indice de l'élément u_n recherché. Cet entier n n'est autre que la longeur du vecteur P.
- On obtient le programme suivant.

```
function res = calcSuiteU(P)
    [m, n] = size(P) // ou n = length(P)
    U = zeros(1, n+1) // on crée un vecteur conctenant n+1 zéros
    U(1) = 1 // la première case contient la valeur de u-0
    for k = 1:n
        S = 0 // variable auxiliaire
        for j = 1:k
            S = S + U(k+1-j) * P(j)
        end
        U(k+1) = S
    end
    res = U(n+1) // on renvoie u-n
endfunction
```

Commentaire

- Afin de répondre à cette question, on peut aussi observer que :

$$u_{k-1}\,p_1 + \ldots + u_0\,p_k = \begin{pmatrix} u_0 & u_1 & \ldots & u_{k-1} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} p_k \\ p_{k-1} \\ \vdots \\ p_1 \end{pmatrix}$$

- On se sert alors des fonctionnalités **Scilab** sur les matrices afin de répondre à cette question.
  La matrice $\begin{pmatrix} u_0 & u_1 & \ldots & u_{k-1} \end{pmatrix}$ est obtenue à l'aide de l'appel : `U(1:i)`.
  La matrice $\begin{pmatrix} p_k \\ p_{k-1} \\ \vdots \\ p_1 \end{pmatrix}$ est obtenue par l'instruction : `(P(i:-1:1))'`.

  (on rappelle que l'apostrophe permet d'obtenir la transposée d'une matrice)
- On obtient le programme suivant.

```
function res = calcSuiteU(P)
    [m, n] = size(P) // ou n = length(P)
    U = zeros(1, n+1) // on crée un vecteur concentant n+1 zéros
    U(1) = 1 // la première case contient la valeur de u-0
    for i = 1:n
        U(i+1) = U(1:i) ⋆ (P(i:-1:1))'
    end
    res = U(n+1)
endfunction
```

□

5. Soit λ un réel appartenant à $]0,1[$.

Dans cette question, on suppose que X_1 suit la loi géométrique de paramètre λ.
Pour tout entier naturel j non nul, on a donc $\mathbb{P}([X_1 = j]) = \lambda(1-\lambda)^{j-1}$.

a) Calculer $\mathbb{P}([X_1 > k])$ pour tout entier naturel k non nul.

Démonstration.
Soit $k \in \mathbb{N}^*$.

- On remarque tout d'abord que :

$$\mathbb{P}([X_1 > k]) \ = \ 1 - \mathbb{P}\Big(\overline{[X_1 > k]}\Big) \ = \ 1 - \mathbb{P}([X_1 \leqslant k])$$

- Par ailleurs, comme $X_1(\Omega) = [\![0, +\infty[\![$, alors : $[X_1 \leqslant k] \ = \ \bigcup\limits_{i=1}^{k} [X_1 = i]$.
- On en déduit que :

$$\begin{array}{rcll} \mathbb{P}([X_1 \leqslant k]) & = & \mathbb{P}\left(\bigcup\limits_{i=1}^{k} [X_1 = i]\right) & \\ & = & \sum\limits_{i=1}^{k} \mathbb{P}\left([X_1 = i]\right) & \textit{(par incompatibilité)} \\ & = & \sum\limits_{i=1}^{k} \lambda\ (1-\lambda)^{i-1} & \\ & = & \lambda \sum\limits_{i=0}^{k-1} (1-\lambda)^{i} & \textit{(par décalage d'indice)} \\ & = & \lambda\ \dfrac{1-(1-\lambda)^k}{1-(1-\lambda)} & \textit{(avec } 1-\lambda \neq 1\textit{)} \\ & = & 1-(1-\lambda)^k & \end{array}$$

Enfin : $\mathbb{P}([X_1 > k]) \ = \ 1 - \mathbb{P}([X_1 \leqslant k]) \ = \ 1 - (1-(1-\lambda)^k) \ = \ (1-\lambda)^k$.

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \mathbb{P}([X_1 > k]) \ = \ (1-\lambda)^k}$$

□

b) Calculer $\mathbb{P}_{[X_1>k]}([X_1 = k+1])$.

Démonstration.
Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Alors :

$$\begin{array}{rcll} \mathbb{P}_{[X_1>k]}([X_1 > k+1]) & = & \dfrac{\mathbb{P}([X_1 > k] \ \cap \ [X_1 > k+1])}{\mathbb{P}([X_1 > k])} & \textit{(par définition avec } \mathbb{P}([X_1 > k]) \neq 0\textit{)} \\ & = & \dfrac{\mathbb{P}([X_1 > k+1])}{\mathbb{P}([X_1 > k])} & \textit{(car } [X_1 > k+1] \subseteq [X_1 > k]\textit{)} \\ & = & \dfrac{(1-\lambda)^{k+1}}{(1-\lambda)^k} = (1-\lambda)^1 & \textit{(d'après la question précédente)} \end{array}$$

$$\boxed{\text{Ainsi, pour tout } k \in \mathbb{N}^* : \mathbb{P}_{[X_1>k]}([X_1 > k+1]) = (1-\lambda) = \mathbb{P}([X_1 > 1]).}$$

Commentaire

- Cette question est un cas particulier de la propriété classique qui énonce :

$$\forall (k, \ell) \in \mathbb{N}^*, \ \mathbb{P}_{[X_1 > k]}([X_1 > k + \ell]) = \mathbb{P}([X_1 > \ell])$$

On dit alors que la loi géométrique est à perte de mémoire (la propriété $X_1 > k$ est oubliée, seul le délai est retenu) ou encore que la loi géométrique est **sans mémoire**.
- Dans cet exercice, X_1 compte la durée de fonctionnement d'un composant avant une panne. Cette propriété signifie que la durée de vie restante du composant est indépendante de la durée de vie écoulée de ce composant (période durant laquelle il a fonctionné sans tomber en panne). Autrement dit, il n'y a pas de vieillissement ou encore d'usure du composant électronique considéré. C'est un cas assez fréquent en réalité : on peut considérer que les diodes, transistors, résistances, condensateurs sont sans usure puisque leur usure ne débute que bien après la fin de vie de l'objet dans lequel ils sont installés.
- C'est pourquoi la durée de vie d'un composant est souvent modélisée par une v.a.r. qui suit loi géométrique (seule loi discrète à perte de mémoire) ou par une v.a.r. qui suit une loi exponentielle (seule loi de v.a.r. à densité à perte de mémoire).

□

c) Montrer que pour tout entier naturel n non nul :

$$\mathbb{P}(A_n) = \lambda$$

Démonstration.
Démontrons par récurrence forte que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \ \mathcal{P}(n)$ où $\mathcal{P}(n) : \mathbb{P}(A_n) = \lambda$.

- **Initialisation** :
D'après la question ***4.a)*** : $\mathbb{P}(A_1) = \mathbb{P}([X_1 = 1]) = \lambda \ (1-\lambda)^0 = \lambda$.
D'où $\mathcal{P}(0)$.
- **Hérédité** : soit $n \in \mathbb{N}^*$.
Supposons $\mathcal{P}(1), \ldots, \mathcal{P}(n)$ et démontrons $\mathcal{P}(n+1)$ (*i.e.* $\mathbb{P}(A_{n+1}) = \lambda$). Alors :

$$\begin{array}{rcll}
u_{n+1} & = & u_n \ p_1 + \ldots + u_0 \ p_{n+1} & \textit{(d'après la question } \textbf{\textit{4.d)}}\textit{)} \\
& = & u_n \ p_1 + \ldots + u_1 \ p_n + u_0 \ p_{n+1} & \\
& = & \displaystyle\sum_{k=1}^{n} u_{n+1-k} \ p_k + p_{n+1} & \textit{(car } u_0 = 1 \textit{ par convention)} \\
& = & \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(A_{n+1-k}) \ \mathbb{P}([X_1 = k]) + \mathbb{P}([X_1 = n+1]) & \\
& = & \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \lambda \times \lambda \ (1-\lambda)^{k-1} + \lambda \ (1-\lambda)^{n+1} & \textit{(par hypothèses de récurrence et définition de la loi géométrique)} \\
& = & \dfrac{\lambda^2}{1-\lambda} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} (1-\lambda)^k + \lambda \ (1-\lambda)^n & \\
& = & \dfrac{\lambda^2}{1-\lambda} \ \dfrac{(1-\lambda)^1 - (1-\lambda)^{n+1}}{1-(1-\lambda)} + \lambda \ (1-\lambda)^n & \textit{(car } 1-\lambda \neq 1\textit{)} \\
& = & \dfrac{\lambda^2}{\lambda \ (1-\lambda)} \ \left((1-\lambda)^1 - (1-\lambda)^{n+1}\right) + \lambda \ (1-\lambda)^n & \\
& = & \lambda \ \left(1 - (1-\lambda)^n\right) + \lambda \ (1-\lambda)^n \ = \ \lambda - \cancel{\lambda \ (1-\lambda)^n} + \cancel{\lambda \ (1-\lambda)^n} &
\end{array}$$

D'où $\mathcal{P}(n+1)$.

$$\boxed{\text{Ainsi, par principe de récurrence : } \forall n \in \mathbb{N}^*,\ \mathcal{P}(n).}$$

Commentaire

Il était aussi possible d'opérer de manière directe. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{array}{rcll} u_n & = & u_{n-1}\, p_1 + \ldots + u_0\, p_n & \textit{(d'après la question 4.d))} \\ & = & \sum\limits_{k=1}^{n} u_{n-k}\, p_k & \\ & = & \sum\limits_{k=1}^{n} u_{n-k}\, \mathbb{P}([X_1 = k]) & \\ & = & \sum\limits_{k=1}^{n} u_{n-k}\, \lambda\, (1-\lambda)^{k-1} & \\ & = & u_{n-1}\, \lambda + \sum\limits_{k=2}^{n} u_{n-k}\, \lambda\, (1-\lambda)^{k-1} & \\ & = & u_{n-1}\, \lambda + \sum\limits_{k=1}^{n-1} u_{n-1-k}\, \lambda\, (1-\lambda)^{k} & \textit{(par décalage d'indice)} \\ & = & \lambda\, u_{n-1} + (1-\lambda) \sum\limits_{k=1}^{n-1} u_{n-1-k}\, \lambda\, (1-\lambda)^{k-1} & \\ & = & \lambda\, u_{n-1} + (1-\lambda) \sum\limits_{k=1}^{n-1} u_{n-1-k}\, p_k & \\ & = & \lambda\, u_{n-1} + (1-\lambda)\, u_{n-1} \ = \ u_{n-1} & \textit{(d'après la question 4.d))} \end{array}$$

Ainsi, la suite (u_n) est constante.
Comme de plus $\mathbb{P}(A_1) = \lambda$, on en conclut : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}(A_n) = \lambda$.

□

6. On suppose dans cette question que p_1 vérifie $0 < p_1 < 1$ et que $p_2 = 1 - p_1$.
Pour simplifier, on posera $p = p_1 = 1 - p_2$.

a) Que vaut p_i pour i supérieur ou égal à 3 ?

Démonstration.

- La famille $\big([X_1 = k]\big)_{k \in \mathbb{N}^*}$ forme un système complet d'événements. On en déduit :

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}([X_1 = k]) = 1$$

Or :

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}([X_1 = k]) = \sum_{k=1}^{+\infty} p_k = p_1 + p_2 + \sum_{k=3}^{+\infty} p_k = 1 + \sum_{k=3}^{+\infty} p_k$$

- On en déduit que : $\sum\limits_{k=3}^{+\infty} p_k = 0$. Or, pour tout $k \geqslant 3$, $p_k \geqslant 0$.

$$\boxed{\text{On en conclut que, pour tout } k \geqslant 3,\ p_k = 0.}$$

□

b) Soit la matrice $M = \begin{pmatrix} p & 1-p \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.
Montrer que pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2 :

$$\begin{pmatrix} u_n \\ u_{n-1} \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} u_{n-1} \\ u_{n-2} \end{pmatrix}$$

Démonstration.
Soit $n \geqslant 2$.

- D'après la question ***4.d)*** :

$$\begin{array}{rcll} u_n & = & \sum\limits_{k=1}^{n} u_{n-k}\ p_k & \\ & = & u_{n-1}\ p_1 + u_{n-2}\ p_2 + \sum\limits_{k=3}^{n} u_{n-k}\ p_k & \textit{(découpage valide car } n \geqslant 2\textit{)} \\ & = & u_{n-1}\ p_1 + u_{n-2}\ p_2 & \textit{(car : } \forall k \geqslant 3,\ p_k = 0\textit{)} \\ & = & u_{n-1}\ p + u_{n-2}\ (1-p) & \end{array}$$

- Il suffit alors de remarquer :

$$M \begin{pmatrix} u_{n-1} \\ u_{n-2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p & 1-p \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{n-1} \\ u_{n-2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p\ u_{n-1} + (1-p)\ u_{n-2} \\ u_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n-1} \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\forall n \geqslant 2,\ M \begin{pmatrix} u_{n-1} \\ u_{n-2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n-1} \end{pmatrix}}$$

Commentaire

- La « relation de Chasles » stipule que pour tout $(m, p, n) \in \mathbb{N}^3$ tel que $m \leqslant p \leqslant n$:

$$\sum_{k=m}^{n} u_k = \sum_{k=m}^{p} u_k + \sum_{k=p+1}^{n} u_k$$

  (la deuxième somme est nulle si $p = n$)
  où (u_n) est une suite quelconque de réels ou de matrices de même taille.
- Dans cette question, on est dans le cas où $m = 1$ et $p = 2$.
  L'argument $n \geqslant 2$ est donc nécessaire pour découper la somme.

□

c) i. Diagonaliser la matrice M.

Démonstration.

- Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Rappelons :

$$\lambda \text{ est valeur propre de } M \ \Leftrightarrow\ M - \lambda I_3 \text{ n'est pas inversible}$$

- Or :

$$\begin{array}{rcll} \det(M - \lambda\ I_2) & = & \det\left(\begin{pmatrix} p-\lambda & 1-p \\ 1 & -\lambda \end{pmatrix}\right) & \\ & = & -\lambda\ (p-\lambda) - (1-p) & \\ & = & \lambda^2 - p\ \lambda - (1-p) & \\ & = & (\lambda - 1)\ (\lambda + (1-p)) & \textit{(car 1 est racine évidente)} \end{array}$$

Ainsi : $\det(M - \lambda\ I_2) = 0 \ \Leftrightarrow\ \lambda = 1$ `OU` $\lambda = -(1-p)$.

$$\boxed{\mathrm{Sp}(M) = \{-(1-p), 1\}}$$

- La matrice M est carrée d'ordre 2 et admet deux valeurs propres distinctes (car $p \neq 0$) 1 et $-(1-p)$. Elle est donc diagonalisable.
- Déterminons alors $E_1(M)$. Soit $U = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{R})$.

$$\begin{array}{rcl} U \in E_1(M) & \iff & (M - I_2)\ U = 0_{\mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{R})} \\ & \iff & \left\{ \begin{array}{rcrcl} (p-1)\ x & + & (1-p)\ y & = & 0 \\ x & - & y & = & 0 \end{array} \right. \\ & \overset{L_1 \leftarrow \frac{1}{p-1} L_1}{\iff} & \left\{ \begin{array}{rcrcl} x & - & y & = & 0 \\ x & - & y & = & 0 \end{array} \right. \end{array}$$

On en déduit :

$$\begin{array}{rcl} E_1(M) & = & \{U = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{R}) \mid (M - I_2)\ U = 0_{\mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{R})}\} \\ & = & \{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{R}) \mid x = y\} \\ & = & \{\begin{pmatrix} y \\ y \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{R}) \mid y \in \mathbb{R}\} \\ & = & \{y \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \mid y \in \mathbb{R}\} \ = \ \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) \end{array}$$

$$\boxed{E_1(M) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)}$$

- Déterminons alors $E_{-(1-p)}(M)$. Soit $U = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{R})$.

$$\begin{array}{rcl} U \in E_{-(1-p)}(M) & \iff & (M + (1-p)\ I_2)\ U = 0_{\mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{R})} \\ & \iff & \left\{ \begin{array}{rcrcl} x & + & (1-p)\ y & = & 0 \\ x & + & (1-p)\ y & = & 0 \end{array} \right. \end{array}$$

On en déduit :

$$\begin{array}{rcl} E_{-(1-p)}(M) & = & \{U = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{R}) \mid (M + (1-p)\ I_2)\ U = 0_{\mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{R})}\} \\ & = & \{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{R}) \mid x = -(1-p)\ y\} \\ & = & \{\begin{pmatrix} -(1-p)\ y \\ y \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{R}) \mid y \in \mathbb{R}\} \\ & = & \{y \cdot \begin{pmatrix} p-1 \\ 1 \end{pmatrix} \mid y \in \mathbb{R}\} \ = \ \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} p-1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) \end{array}$$

$$\boxed{E_{-(1-p)}(M) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} p-1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)}$$

- En conclusion, la matrice M est semblable à la matrice $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & p-1 \end{pmatrix}$.
  Autrement dit, il existe $P \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ inversible telle que :

$$M = PDP^{-1}$$

- La matrice $P = \begin{pmatrix} 1 & p-1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ est obtenue comme concaténation d'une famille libre de vecteurs propres de $E_1(M)$ et d'une famille libre de vecteurs propres de $E_{-(1-p)}(M)$.
Enfin, d'après la formule d'inversion des matrices carrées d'ordre 2 :

$$P^{-1} = \frac{1}{\det(P)} \begin{pmatrix} 1 & 1-p \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2-p} \begin{pmatrix} 1 & 1-p \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{M = \frac{1}{2-p} \begin{pmatrix} 1 & p-1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & p-1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1-p \\ -1 & 1 \end{pmatrix}}$$

□

ii. Montrer que :

$$M^{n-1} = \frac{1}{2-p} \begin{pmatrix} 1 & 1-p \\ 1 & 1-p \end{pmatrix} + \frac{(p-1)^{n-1}}{2-p} \begin{pmatrix} 1-p & p-1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Démonstration.
Avec les notations de la question précédente : $M = PDP^{-1}$.
Ainsi, par une récurrence immédiate, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $M^{n-1} = PD^{n-1}P^{-1}$. D'où :

$$\begin{aligned}
M^{n-1} &= \frac{1}{2-p} \begin{pmatrix} 1 & p-1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (p-1)^{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1-p \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{2-p} \begin{pmatrix} 1 & (p-1)^n \\ 1 & (p-1)^{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1-p \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{2-p} \begin{pmatrix} 1-(p-1)^n & 1-p+(p-1)^n \\ 1-(p-1)^{n-1} & 1-p+(p-1)^{n-1} \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{2-p} \left(\begin{pmatrix} 1 & 1-p \\ 1 & 1-p \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -(p-1)^n & (p-1)^n \\ -(p-1)^{n-1} & (p-1)^{n-1} \end{pmatrix} \right) \\
&= \frac{1}{2-p} \left(\begin{pmatrix} 1 & 1-p \\ 1 & 1-p \end{pmatrix} + (p-1)^{n-1} \begin{pmatrix} -(p-1) & p-1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \right)
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Ainsi, on a bien : } M^{n-1} = \frac{1}{2-p} \begin{pmatrix} 1 & 1-p \\ 1 & 1-p \end{pmatrix} + \frac{(p-1)^{n-1}}{2-p} \begin{pmatrix} 1-p & p-1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.}$$

□

d) i. Exprimer u_n en fonction de p et de n.

Démonstration.

- D'après la question ***6.b)***, pour tout $n \geqslant 2$: $\begin{pmatrix} u_n \\ u_{n-1} \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} u_{n-1} \\ u_{n-2} \end{pmatrix}$.
- On obtient ainsi, pour tout $n \geqslant 2$:

$$\begin{pmatrix} u_n \\ u_{n-1} \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} u_{n-1} \\ u_{n-2} \end{pmatrix} = M^2 \begin{pmatrix} u_{n-2} \\ u_{n-3} \end{pmatrix} = \ldots = M^{n-1} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_0 \end{pmatrix} = M^{n-1} \begin{pmatrix} p \\ 1 \end{pmatrix}$$

(on le démontre rigoureusement par une récurrence immédiate)

- D'après la question précédente :

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} u_n \\ u_{n-1} \end{pmatrix} &= \frac{1}{2-p} \begin{pmatrix} 1 & 1-p \\ 1 & 1-p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{(p-1)^{n-1}}{2-p} \begin{pmatrix} 1-p & p-1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p \\ 1 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{2-p} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{(p-1)^{n-1}}{2-p} \begin{pmatrix} -p^2+2p-1 \\ -p+1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

- Et ainsi :

$$u_n \;=\; \frac{1}{2-p}\ \big(1-(p-1)^{n-1}(p-1)^2\big) \;=\; \frac{1}{2-p}\ \big(1-(p-1)^{n+1}\big)$$

$$\boxed{u_n \;=\; \frac{1}{2-p}\ \big(1-(p-1)^{n+1}\big)}$$

□

ii. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

Démonstration.

- D'après l'énoncé : $0 < p < 1$. On en déduit : $-1 < p-1 < 0$. Ainsi : $|p-1| < 1$.
- On en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} (p-1)^{n+1} = 0$.

$$\boxed{\text{La suite } (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est convergente, de limite } \frac{1}{2-p}.}$$

□

II. Exercice (uniquement en vB) - `HEC 2011`

Dans tout l'exercice :

- le réel x est fixé, α est un réel strictement positif et f est une fonction définie et continue sur l'intervalle $[x-\alpha, x+\alpha]$ à valeurs réelles ;
- pour tout réel h vérifiant $0 < h \leqslant \alpha$, on pose :

$$S_x(h) = \frac{1}{2h} \int_{-h}^{h} f(x+t)\ dt \quad \text{et} \quad G_x(h) = \frac{3}{2h^3} \int_{-h}^{h} tf(x+t)\ dt$$

- sous réserve d'existence, on pose : $s(x) = \lim\limits_{h \to 0^+} S_x(h)$ et $g(x) = \lim\limits_{h \to 0^+} G_x(h)$.

L'objet du problème est l'étude d'une généralisation de la notion de dérivée d'une fonction à partir de fonctions définies par des intégrales.

1. a) Calculer $\displaystyle\int_{-h}^{h} dt$, $\displaystyle\int_{-h}^{h} (x+t)\ dt$, $\displaystyle\int_{-h}^{h} t(x+t)\ dt$ et $\displaystyle\int_{-h}^{h} (x+t)^2\ dt$.

Démonstration.

- $\displaystyle\int_{-h}^{h} dt = h - (-h) = 2h$
- $$\begin{aligned}\int_{-h}^{h} (x+t)\ dt &= \int_{-h}^{h} x\ dt + \int_{-h}^{h} t\ dt \\ &= x\ (h-(-h)) + \frac{1}{2}\ \left[\ t^2\ \right]_{-h}^{h} = 2\ xh + \frac{1}{2}\ \cancel{(h^2 - (-h)^2)} = 2xh\end{aligned}$$
- $$\begin{aligned}\int_{-h}^{h} t\ (x+t)\ dt &= \int_{-h}^{h} xt\ dt + \int_{-h}^{h} t^2\ dt \\ &= x \cancel{\int_{-h}^{h} t\ dt} + \frac{1}{3}\ \left[\ t^3\ \right]_{-h}^{h} = \frac{1}{3}\ (h^3 - (-h)^3) = \frac{1}{3}\ 2h^3\end{aligned}$$
- $$\begin{aligned}\int_{-h}^{h} (x+t)^2\ dt &= \int_{-h}^{h} (x+t)\ (x+t)\ dt \\ &= x \int_{-h}^{h} (x+t)\ dt + \int_{-h}^{h} t\ (x+t)\ dt = 2x^2h + \frac{2}{3}h^3\end{aligned}$$

Ces calculs ont été réalisés par linéarité de l'intégration.

$$\boxed{\int_{-h}^{h} dt = 2h,\ \int_{-h}^{h} (x+t)\ dt = 2xh,\ \int_{-h}^{h} t(x+t)\ dt = \frac{2}{3}h^3 \text{ et } \int_{-h}^{h} (x+t)^2\ dt = 2x^2h + \frac{2}{3}h^3}$$ □

b) Démontrer que : $\displaystyle\int_{-h}^{h} t(x+t)^2\ dt = \frac{4h^3x}{3}$.

Démonstration.
Par linéarité de l'intégration :

$$\begin{aligned}\int_{-h}^{h} t\ (x+t)^2\ dt &= x^2 \cancel{\int_{-h}^{h} t\ dt} + 2x \int_{-h}^{h} t^2\ dt + \cancel{\int_{-h}^{h} t^3\ dt} \\ &= 2x\ \frac{2}{3}\ h^3 = \frac{4h^3x}{3}\end{aligned}$$

(car $t \mapsto t$ et $t \mapsto t^3$ sont impaires)

$$\boxed{\int_{-h}^{h} t(x+t)^2\ dt = \frac{4h^3x}{3}}$$ □

c) Établir les deux formules : $S_x(h) = \dfrac{1}{2} \displaystyle\int_{-1}^{1} f(x+ht)\, dt$ et $G_x(h) = \dfrac{3}{2h} \displaystyle\int_{-1}^{1} t f(x+ht)\, dt$.

Démonstration.
Soit h tel que $0 < h \leqslant \alpha$.

- On effectue le changement de variable $u = ht$.

$$\left|\begin{array}{l} u = ht \quad \Big(\text{donc } t = \dfrac{u}{h} \text{ ce qui est possible car } h \neq 0\Big) \\ \hookrightarrow du = h\ dt \quad \text{ et } \quad dt = \dfrac{du}{h} \\ \bullet\ t = -1 \ \Rightarrow\ u = -h \\ \bullet\ t = 1 \ \Rightarrow\ u = h \end{array}\right.$$

Ce changement de variable est valide car $\varphi : u \mapsto \dfrac{u}{h}$ est $\mathcal{C}^1$ sur $[-h, h]$. On obtient :

$$\int_{-1}^{1} f(x+ht)\ dt \ = \ \int_{-h}^{h} f(x+u) \frac{du}{h} \ = \ \frac{1}{h} \int_{-h}^{h} f(x+u)\ du \ = \ 2\ S_x(h)$$

$$\boxed{S_x(h) = \frac{1}{2} \int_{-1}^{1} f(x+ht)\ dt}$$

- On procède de même pour la deuxième égalité.

$$\int_{-1}^{1} t\ f(x+ht)\ dt \ = \ \int_{-h}^{h} \frac{u}{h}\ f(x+u) \frac{du}{h} \ = \ \frac{1}{h^2} \int_{-h}^{h} u\ f(x+u)\ du \ = \ \frac{2h}{3}\ G_x(h)$$

$$\boxed{G_x(h) = \frac{3}{2h} \int_{-1}^{1} t\ f(x+ht)\ dt}$$

□

2. *Dans cette question uniquement*, soit n un entier naturel donné et f la fonction définie par $f(t) = t^n$.

a) Soit k un entier naturel. Calculer suivant la parité de k, la valeur de $h^k(1-(-1)^k)$.

Démonstration.
Deux cas se présentent.

- Si k est pair alors $(-1)^k = 1$ et :

$$h^k\ (1-(-1)^k) \ = \ h^k\ (1-1) \ = \ 0$$

$$\boxed{\text{Si } k \text{ est pair, } h^k\ (1-(-1)^k) = 0.}$$

- Si k est impair alors $(-1)^k = -1$ et :

$$h^k\ (1-(-1)^k) \ = \ h^k\ (1-(-1)) \ = \ 2h^k$$

$$\boxed{\text{Si } k \text{ est impair, } h^k\ (1-(-1)^k) = 2h^k.}$$

□

b) Calculer $S_x(h)$ et $G_x(h)$ lorsque $x = 0$.

Démonstration.

- Tout d'abord :

$$\begin{aligned} S_0(h) &= \frac{1}{2h} \int_{-h}^{h} f(t)\ dt = \frac{1}{2h} \int_{-h}^{h} t^n\ dt = \frac{1}{2h} \frac{1}{n+1} \left[t^{n+1} \right]_{-h}^{h} \\ &= \frac{1}{2h} \frac{1}{n+1} \left(h^{n+1} - (-h)^{n+1} \right) = \frac{1}{2h} \frac{1}{n+1} h^{n+1} \left(1 - (-1)^{n+1} \right) \end{aligned}$$

$$\boxed{S_0(h) = 0 \text{ si } n \text{ est impair et } S_0(h) = \frac{h^n}{n+1} \text{ si } n \text{ est pair.}}$$

- Ensuite :

$$\begin{aligned} G_0(h) &= \frac{3}{2h^3} \int_{-h}^{h} t\ f(t)\ dt = \frac{3}{2h^3} \int_{-h}^{h} t^{n+1}\ dt = \frac{3}{2h^3} \frac{1}{n+2} \left[t^{n+2} \right]_{-h}^{h} \\ &= \frac{3}{2h^3} \frac{1}{n+2} h^{n+2} \left(1 - (-1)^{n+2} \right) = \frac{3}{2h^2} \frac{1}{n+2} h^{n+1} \left(1 - (-1)^{n} \right) \end{aligned}$$

$$\boxed{G_0(h) = 0 \text{ si } n \text{ est pair et } G_0(h) = \frac{3}{h^2} \frac{h^{n+1}}{n+2} \text{ si } n \text{ est impair.}}$$

□

c) À l'aide de la formule du binôme, démontrer que :

$$S_x(h) = x^n + h^2 A_x(h) \qquad \text{et} \qquad G_x(h) = n x^{n-1} + h^2 B_x(h)$$

où A_x et B_x sont deux fonctions polynomiales en h (dont les coefficients dépendent de x).

Démonstration.

- Tout d'abord :

$$\begin{aligned} S_x(h) &= \frac{1}{2h} \int_{-h}^{h} f(x+t)\ dt = \frac{1}{2h} \int_{-h}^{h} (x+t)^n\ dt \\ &= \frac{1}{2h} \int_{-h}^{h} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k}\ t^k\ dt \\ &= \frac{1}{2h} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} \int_{-h}^{h} t^k\ dt && \textit{(par linéarité de l'intégration)} \\ &= \frac{1}{2h} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} \frac{1}{k+1} \left[t^{k+1} \right]_{-h}^{h} \\ &= \frac{1}{2h} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} \frac{h^{k+1}}{k+1} \left(1 - (-1)^{k+1} \right) \\ &= \frac{1}{2h} \left(\sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ pair}}}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} \frac{h^{k+1}}{k+1} \left(1 - (-1)^{k+1} \right) + \cancel{\sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ impair}}}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} \frac{h^{k+1}}{k+1} \left(1 - (-1)^{k+1} \right)} \right) \end{aligned}$$

- Or :

$$\begin{aligned}
& \sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ pair}}}^{n} \binom{n}{k} \ x^{n-k} \ \frac{h^{k+1}}{k+1} \ \left(1-(-1)^{k+1}\right) \\
= \ & \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n}{2j} \ x^{n-2j} \ \frac{h^{2j+1}}{2j+1} \ 2 \\
= \ & 2h \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n}{2j} \ \frac{x^{n-2j}}{2j+1} \ h^{2j} \\
= \ & 2h \left(\binom{n}{0} \frac{1}{x^0} \ h^0 + \sum_{j=1}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n}{2j} \ \frac{x^{n-2j}}{2j+1} \ h^{2j} \right) \\
= \ & 2h \left(x^n + \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor -1} \binom{n}{2j+2} \ \frac{x^{n-2j-2}}{2j+3} \ h^{2j+2} \right) \qquad \textit{(par décalage d'indice)} \\
= \ & 2h \left(x^n + h^2 \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor -1} \binom{n}{2j+2} \ \frac{x^{n-2j-2}}{2j+3} \ h^{2j} \right)
\end{aligned}$$

- En notant $A_x(h) = \displaystyle\sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor -1} \binom{n}{2j+2} \ \frac{x^{n-2j-2}}{2j+3} \ h^{2j}$, on obtient :

$$S_x(h) \ = \ \frac{1}{\cancel{2h}} \ \cancel{2h} \ \left(x^n + h^2 A_x(h)\right)$$

On trouve bien : $S_x(h) = x^n + h^2 A_x(h)$ où A_x est une fonction polynomiale en h dont les cœfficients dépendent de x.

- On procède de même pour G_x.

$$\begin{aligned}
G_x(h) \ &= \ \frac{3}{2h^3} \int_{-h}^{h} t \ f(x+t) \ dt \ = \ \frac{3}{2h^3} \int_{-h}^{h} t \ (x+t)^n \ dt \\
&= \ \frac{3}{2h^3} \int_{-h}^{h} t \ \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \ x^{n-k} \ t^k \ dt \\
&= \ \frac{3}{2h^3} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \ x^{n-k} \ \int_{-h}^{h} t^{k+1} \ dt \qquad \textit{(par linéarité de l'intégration)} \\
&= \ \frac{3}{2h^3} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \ x^{n-k} \ \frac{h^{k+2}}{k+2} \ \left(1-(-1)^{k+2}\right) \\
&= \ \frac{3}{\cancel{2}h^3} \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \binom{n}{2j+1} \ x^{n-2j-1} \ \frac{h^{2j+3}}{2j+3} \ \cancel{2} \qquad \textit{(car si k pair, $1-(-1)^{k+2}=0$)} \\
&= \ \frac{3}{h^3} \left(\binom{n}{1} \ x^{n-1} \ \frac{h^3}{3} + \sum_{j=1}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \binom{n}{2j+1} \ x^{n-2j-1} \ \frac{h^{2j+3}}{2j+3} \right) \\
&= \ \frac{3}{h^3} \left(n \ x^{n-1} \ \frac{h^3}{3} + \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor -1} \binom{n}{2j+3} \ x^{n-2j-3} \ \frac{h^{2j+5}}{2j+5} \right) \qquad \textit{(par décalage d'indice)} \\
&= \ \frac{3}{h^3} \left(n \ x^{n-1} \ \frac{h^3}{3} + h^5 \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor -1} \binom{n}{2j+3} \ x^{n-2j-3} \ \frac{h^{2j}}{2j+5} \right)
\end{aligned}$$

- En notant $B_x(h) = 3 \displaystyle\sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor -1} \binom{n}{2j+3} \, x^{n-2j-3} \, \frac{h^{2j}}{2j+5}$, on obtient :

$$G_x(h) \ = \ n \ x^{n-1} + h^2 \ B_x(h)$$

$$\boxed{\text{On trouve bien : } G_x(h) = n \ x^{n-1} + h^2 \ B_x(h) \text{ où } B_x \text{ est une fonction polynomiale en } h \text{ dont les cœfficients dépendent de } x.}$$

□

d) En déduire l'existence et l'expression de $s(x)$ et $g(x)$.

Démonstration.
Les fonctions A_x et B_x sont polynomiales en h. Elles sont donc continues sur $\mathbb{R}$ et admettent en particulier une limite en 0. On en déduit :

$$\lim_{h \to 0^+} h^2 \ A_x(h) \ = \ 0 \times \lim_{h \to 0^+} A_x(h) \ = \ 0 \quad \text{ et } \quad \lim_{h \to 0^+} h^2 \ B_x(h) \ = \ 0 \times \lim_{h \to 0^+} B_x(h) \ = \ 0$$

$$\boxed{\text{On en déduit que } s(x) \text{ et } g(x) \text{ existent et : } \lim_{h \to 0^+} S_x(h) = x^n \text{ et } \lim_{h \to 0^+} G_x(h) = n \ x^{n-1}.}$$

□

3. *Dans cette question uniquement*, la fonction f est définie par $f(t) = |t|$ et on choisit $x = 0$.

a) La fonction f est-elle dérivable en 0 ?

Démonstration.

- La fonction f est dérivable à droite en 0 et :

$$f'_d(0) \ = \ \lim_{t \to 0^+} \frac{f(t) - f(0)}{t - 0} \ = \ \lim_{t \to 0^+} \frac{|t|}{t} \ = \ \lim_{t \to 0^+} \frac{t}{t} \ = \ 1$$

- La fonction f est dérivable à gauche en 0 et :

$$f'_g(0) \ = \ \lim_{t \to 0^-} \frac{f(t) - f(0)}{t - 0} \ = \ \lim_{t \to 0^-} \frac{|t|}{t} \ = \ \lim_{t \to 0^-} \frac{-t}{t} \ = \ -1$$

$$\boxed{\text{Ainsi, } f \text{ n'est pas dérivable en 0.}}$$

□

b) Calculer $S_x(h)$ et $G_x(h)$ pour $x = 0$. En déduire l'existence et la valeur de $s(0)$ et $g(0)$.

Démonstration.

- Tout d'abord :

$$\begin{aligned} S_0(h) &= \frac{1}{2h} \int_{-h}^{h} f(t) \ dt \ = \ \frac{1}{2h} \int_{-h}^{h} |t| \ dt \\ &= \frac{1}{\cancel{2}h} \ \cancel{2} \int_0^h |t| \ dt && \textit{(car } t \mapsto |t| \textit{ est paire)} \\ &= \frac{1}{h} \int_0^h t \ dt \ = \ \frac{1}{h} \ \frac{1}{2} \ \left[\ t^2 \ \right]_0^h \\ &= \frac{1}{2h} \ h^2 \ = \ \frac{h}{2} \end{aligned}$$

$$\boxed{S_0(h) = \frac{h}{2}}$$

- Ensuite :

$$\begin{aligned} G_0(h) &= \frac{3}{2h^3} \int_{-h}^{h} t\ f(t)\ dt \\ &= \frac{3}{2h^3} \int_{-h}^{h} t\ |t|\ dt \ = \ 0 \quad \textit{(car la fonction } t \mapsto t\ |t| \textit{ est impaire)} \end{aligned}$$

$$\boxed{G_0(h) = 0}$$

$$\boxed{\text{Ainsi, } s(0) = \lim_{h\to 0^+} S_0(h) = \lim_{h\to 0^+} \frac{1}{2h} = 0 \quad \text{et} \quad s(0) = \lim_{h\to 0^+} G_0(h) = \lim_{h\to 0^+} 0 = 0.}$$

□

Dans les questions 4 et 5, on revient au cas général.

4. Exprimer $S_x(h)$ à l'aide d'une primitive F de f.
Établir l'existence de $s(x)$ et démontrer que $s(x) = f(x)$.

Démonstration.

- On considère F une primitive de f sur le segment $[x-\alpha, x+\alpha]$.
La fonction $H : t \mapsto F(x+t)$ est une primitive de $t \mapsto f(x+t)$ car elle est dérivable comme composée de fonctions dérivables (F et $t \mapsto x+t$) et :

$$H'(t) \ = \ F'(x+t) \ = \ f(x+t)$$

- On en déduit :

$$\begin{aligned} S_x(h) &= \frac{1}{2h} \int_{-h}^{h} f(x+t)\ dt \ = \ \frac{1}{2h} \left[\ F(x+t)\ \right]_{-h}^{h} \ = \ \frac{1}{2h} \ (F(x+h) - F(x-h)) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{F(x+h)-F(x)}{h} + \frac{F(x)-F(x-h)}{h} \right) \end{aligned}$$

- Or la fonction F est dérivable en x. Ainsi :

$$\lim_{y\to x} \frac{F(y)-F(x)}{y-x} = F'(x) = f(x)$$

En effectuant le changement de variable $h = y - x$ (*i.e.* $y = x+h$), on obtient :

$$\lim_{y\to x} \frac{F(y)-F(x)}{y-x} = \lim_{h\to 0} \frac{F(x+h)-F(x)}{h} = f(x)$$

En effectuant le changement de variable $h = -y + x$ (*i.e.* $y = x-h$), on obtient :

$$\lim_{y\to x} \frac{F(y)-F(x)}{y-x} = \lim_{h\to 0} \frac{F(x-h)-F(x)}{-h} = \lim_{h\to 0} \frac{F(x)-F(x-h)}{h} = f(x)$$

- Ainsi, $S_h(x)$ admet une limite en 0. Plus précisément :

$$\lim_{h\to 0} S_x(h) \ = \ \frac{1}{2} \left(f(x)+f(x)\right) \ = \ f(x)$$

$$\boxed{\text{On en déduit que } s(x) \text{ existe et vaut } f(x).}$$

□

5. *On suppose dans cette question que f est dérivable en x de dérivée $f'(x)$.*

a) Démontrer l'existence d'une fonction v_x définie et continue sur $\mathbb{R}$, vérifiant $v_x(0) = 0$ et telle que pour tout réel t on ait : $f(x+t) = f(x) + tf'(x) + tv_x(t)$.

Démonstration.

- On considère la fonction v_x définie par :

$$v_x : t \mapsto \begin{cases} \dfrac{f(x+t)-f(x)}{t} - f'(x) & \text{si } t \neq 0 \\ 0 & \text{si } t = 0 \end{cases}$$

- La fonction v_x est continue en 0.
En effet, comme f est dérivable en x : $\lim\limits_{t \to 0} \dfrac{f(x+t)-f(x)}{t} = f'(x)$. Et ainsi :

$$\lim_{t \to 0} v_x(t) \ = \ f'(x) - f'(x) \ = \ 0 \ = \ v_x(0)$$

- La fonction v_x est de plus continue sur $\mathbb{R}^*$ comme quotient $v_x = \dfrac{g}{h}$ de :
  × $g : t \mapsto f(x+t) - f(x)$ continue sur $\mathbb{R}^*$.
  (pour cela, il faut que f soit continue sur $\mathbb{R}$ alors que l'énoncé mentionne uniquement de la continuité sur $[x-\alpha, x+\alpha]$)
  × $h : t \mapsto t$ continue sur $\mathbb{R}^*$,
  et qui `NE S'ANNULE PAS` sur $\mathbb{R}^*$.
- À l'aide de cette définition, on obtient, pour tout $t \neq 0$:

$$v_x(t) \ = \ \frac{f(x+t)-f(x)}{t} - f'(x)$$

et ainsi : $f(x+t) - f(x) = t\ (v_x(t) + f'(x))$.

> On obtient bien, pour tout réel t : $f(x+t) = f(x) + tf'(x) + tv_x(t)$ (cette égalité est aussi vérifiée en 0 car correspond à l'égalité $f(x) = f(x)$).

□

b) En déduire l'égalité : $G_x(h) = f'(x) + \dfrac{3}{2h^3} \displaystyle\int_{-h}^{h} t^2 v_x(t)\ dt$.

Démonstration.

$$\begin{aligned}
G_x(h) &= \frac{3}{2h^3} \int_{-h}^{h} t\ f(x+t)\ dt \\
&= \frac{3}{2h^3} \int_{-h}^{h} t\ \big(f(x) + tf'(x) + tv_x(t)\big)\ dt \\
&= \frac{3}{2h^3} \left(f(x) \cancel{\int_{-h}^{h} t\ dt} + f'(x) \int_{-h}^{h} t^2\ dt + \int_{-h}^{h} t^2 v_x(t)\ dt \right) && \textit{(par linéarité de l'intégration)} \\
&= \frac{3}{2h^3} \left(f'(x)\ \frac{1}{3}\ \Big[\ t^3\ \Big]_{-h}^{h} + \int_{-h}^{h} t^2 v_x(t)\ dt \right) \\
&= \frac{3}{2h^3} \left(f'(x)\ \frac{2h^3}{3} + \int_{-h}^{h} t^2 v_x(t)\ dt \right)
\end{aligned}$$

$$\boxed{G_x(h) = f'(x) + \frac{3}{2h^3} \int_{-h}^{h} t^2 v_x(t)\ dt}$$

□

c) Soit ε un réel strictement positif. Démontrer qu'il existe $\delta > 0$ tel que si $h \in \,]0, \delta]$, on a :

$$\left| \frac{3}{2h^3} \int_{-h}^{h} t^2 \, v_x(t) \, dt \right| \leqslant \varepsilon$$

Démonstration.

- Remarquons tout d'abord que :

$$\begin{aligned} \left| \frac{3}{2h^3} \int_{-h}^{h} t^2 \, v_x(t) \, dt \right| &= \left| \frac{3}{2h^3} \right| \left| \int_{-h}^{h} t^2 \, v_x(t) \, dt \right| \\ &\leqslant \frac{3}{2h^3} \int_{-h}^{h} |t^2 \, v_x(t)| \, dt && \textit{(par inégalité triangulaire)} \\ &= \frac{3}{2h^3} \int_{-h}^{h} t^2 \, |v_x(t)| \, dt \end{aligned}$$

- Soit $\varepsilon > 0$. Comme v_x est continue en 0, alors, par définition, il existe $\delta > 0$ tel que :

$$\forall t \in [-\delta, \delta], \; |v_x(t)| \leqslant \varepsilon$$

- Considérons $h \in \,]0, \delta]$. Ce qui s'écrit : $0 < h \leqslant \delta$. Alors, pour tout $t \in [-h, h]$:

$$-\delta \leqslant -h \leqslant t \leqslant h \leqslant \delta$$

  On en déduit que pour tout $t \in [-h, h]$, l'inégalité précédente est vérifiée : $|v_x(t)| \leqslant \varepsilon$.
  En multipliant de part et d'autre par $t^2 \geqslant 0$:

$$t^2 \, |v_x(t)| \leqslant t^2 \, \varepsilon$$

  Par croissance de l'intégrale, les bornes étant dans l'ordre croissant ($-h < h$), on obtient :

$$\int_{-h}^{h} t^2 \, |v_x(t)| \, dt \leqslant \int_{-h}^{h} t^2 \, \varepsilon \, dt$$

  Et enfin, par multiplication par $\dfrac{3}{2h^3} \geqslant 0$:

$$\frac{3}{2h^3} \int_{-h}^{h} t^2 \, |v_x(t)| \, dt \leqslant \frac{3}{2h^3} \, \varepsilon \int_{-h}^{h} t^2 \, dt = \varepsilon \, \frac{3}{2h^3} \, \frac{1}{3} \, \left[\, t^3 \, \right]_{-h}^{h} = \varepsilon$$

$$\boxed{\text{En conclusion : } \left| \frac{3}{2h^3} \int_{-h}^{h} t^2 \, v_x(t) \, dt \right| \leqslant \frac{3}{2h^3} \int_{-h}^{h} t^2 \, |v_x(t)| \, dt \leqslant \varepsilon}$$

□

d) En déduire l'expression de $g(x)$ en fonction de $f'(x)$.

Démonstration.

- D'après la question ***5.b)*** :

$$| \, G_x(h) - f'(x) \, | = \left| \frac{3}{2h^3} \int_{-h}^{h} t^2 v_x(t) \, dt \right|$$

- Soit $\varepsilon > 0$. D'après la question précédente, il existe $\delta > 0$ tel que :

$$\left| \frac{3}{2h^3} \int_{-h}^{h} t^2 v_x(t) \, dt \right| \leqslant \varepsilon$$

- On a donc démontré :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ \forall h \in \,]0, \delta],\ \mid G_x(h) - f'(x) \mid\ \leqslant\ \varepsilon$$

Ce qui n'est autre que la définition de : $f'(x) = \lim\limits_{h \to 0^+} G_x(h)$.

$$\boxed{\text{Ainsi } g(x) = f'(x).}$$

□