DS7 (version A) /160

Exercice 1 /89

Dans tout l'exercice, $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ désigne un espace probabilisé et toutes les variables aléatoires considérées seront supposées définies sur cet espace.

Partie I : Loi exponentielle /18

Dans toute cette partie, λ désigne un réel strictement positif.

1. Donner une densité, la fonction de répartition, l'espérance et la variance d'une variable aléatoire suivant la loi exponentielle de paramètre λ.

- **4 pts (1 pour la densité, 1 pour la fonction de répartition, 1 pour l'espérance, 1 pour la variance)**

2. Justifier que les intégrales suivantes convergent et donner leurs valeurs :

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\lambda x}\, dx, \quad \int_0^{+\infty} x\, \mathrm{e}^{-\lambda x}\, dx$$

- **2 pts : $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\lambda x}\, dx$ converge (1 pour faire apparaître $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)\, dx$, 1 pour f_X est une densité)**
- **2 pts : $\displaystyle\int_0^{+\infty} x\, \mathrm{e}^{-\lambda x}\, dx$ converge (1 pour faire apparaître $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x\, f_X(x)\, dx$, 1 pour $\mathbb{E}(X)$)**

3. *a)* soit U une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $[0,1[$. Quelle est la loi de la variable aléatoire $V = -\frac{1}{\lambda} \ln(1-U)$?

- **2 pts : $U(\Omega) = [0, +\infty[$**
- **1 pt : si $x < 0$, alors $F_V(x) = 0$**
- **4 pts : cas $x \geqslant 0$ (1 pour $\lambda > 0$, 1 pour la stricte croissance de $\exp$, 1 pour la fdr de U, 1 pour reconnaître la loi exponentielle)**

b) Écrire une fonction en **Scilab** qui, étant donné un réel λ strictement positif, simule la loi exponentielle de paramètre λ.

- **3 pts : 1 pour la structure de fonction, 1 pour `rand()`, 1 pour `v`**

On considère une suite $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires indépendantes suivant toutes la loi exponentielle de paramètre 1.
Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on définit la variable aléatoire $T_n = \max(X_1, ..., X_n)$ qui, à tout ω de Ω, associe le plus grand des réels $X_1(\omega), \dots, X_n(\omega)$ et on note f_n la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f_n(x) = \begin{cases} n\mathrm{e}^{-x}(1-\mathrm{e}^{-x})^{n-1} & \text{si } x \geqslant 0, \\ 0 & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

Partie II : Loi de la variable aléatoire T_n /36

4. a) Calculer, pour tout n de $\mathbb{N}^*$ et pour tout x de $\mathbb{R}_+^*$, la probabilité $\mathbb{P}([T_n \leqslant x])$.

- **1 pt :** $[T_n \leqslant x] = \bigcap\limits_{i=1}^{n} [X_i \leqslant x]$
- **1 pt :** X_1, ..., X_n **indépendantes**
- **1 pt :** X_1, ..., X_n **ont même loi**
- **1 pt : fdr de la loi** $\mathcal{E}(1)$

b) En déduire que, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, T_n est une variable aléatoire à densité, admettant pour densité la fonction f_n.

- **1 pt :** $T_n(\Omega) \subset [0, +\infty[$
- **1 pt : si** $x \leqslant 0$, $F_{T_n}(x) = 0$
- **1 pt : cas** $x > 0$ **d'après** ***4.a)***
- **2 pts : continuité de** F_{T_n} **sur** $\mathbb{R}$ **(1 pour la composition, 1 pour le reste)**
- **1 pt :** F_{T_n} **de classe** $\mathcal{C}^1$ **sur** $\mathbb{R}$ **sauf éventuellement en** 0
- **3 pts : montrer que** $f_{T_n} = f_n$ **(1 pour le cas** $x < 0$**, 1 pour le cas** $x > 0$**, 1 pour le choix en** 0**)**
  -1 si la dérivation ne se fait pas sur des intervalles ouverts

5. a) Montrer que, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, la variable aléatoire T_n admet une espérance.

- **1 pt : convergence absolue**
- **1 pt : continuité de** $x \mapsto x\, f_n(x)$ **sur** $[0, +\infty[$
- **1 pt :** $x\, f_n(x) = \underset{x \to +\infty}{o}\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$
- **1 pt : positivité de** f_n **et** $x \mapsto \dfrac{1}{x^2}$
- **1 pt : convergence de** $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\, dx$ **(évidemment, 0 si** $\displaystyle\int_0^{+\infty}$ **)**
- **1 pt : citation du critère de négligeabilité**
- **1 pt :** $x \mapsto x\, f_n(x)$ **continue sur le segment** $[0, 1]$

b) Déterminer l'espérance $\mathbb{E}(T_1)$ de T_1 et l'espérance $\mathbb{E}(T_2)$ de T_2.

- **1 pt :** $\mathbb{E}(T_1) = 1$
- **2 pt :** $\mathbb{E}(T_2) = \dfrac{3}{2}$ **(-1 si la convergence des intégrales impropres en** $+\infty$ **n'est pas évoquée)**

6. a) Vérifier : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall x \in \mathbb{R}_+$, $f_{n+1}(x) - f_n(x) = -\dfrac{1}{n+1} f'_{n+1}(x)$.

- **1 pt :** f_n **dérivable sur** $]0, +\infty[$
- **1 pt :** $f'_n(x) = n\mathrm{e}^{-x}(1 - \mathrm{e}^{-x})^{n-2}(n\mathrm{e}^{-x} - 1)$
- **1 pt : montrer que** $f_{n+1}(x) - f_n(x) = -\dfrac{1}{n+1} f'_{n+1}(x)$

b) Montrer ensuite, à l'aide d'une intégration par parties :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \int_0^{+\infty} x\,(f_{n+1}(x) - f_n(x))\ dx = \frac{1}{n+1}\int_0^{+\infty} f_{n+1}(x)\ dx$$

- **1 pt : se placer sur un segment**
- **1 pt : IPP**
- **1 pt : convergence de** $\displaystyle\int_0^{+\infty} f_{n+1}(x)\ dx$
- **1 pt :** $\lim A \to +\infty A\, f_{n+1}(A) = 0$

c) En déduire, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, une relation entre $\mathbb{E}(T_{n+1})$ et $\mathbb{E}(T_n)$, puis une expression de $\mathbb{E}(T_n)$ sous forme d'une somme.

- **1 pt : existence de $\mathbb{E}(T_n)$ et $\mathbb{E}(T_{n+1})$**
- **3 pts : $\mathbb{E}(T_{n+1}) - \mathbb{E}(T_n) = \dfrac{1}{n+1}$ (1 pour f_n s'annule sur $]-\infty, 0]$, 1 pour l'utilisation de *6.b)*, 1 pour f_{n+1} est une densité)**
- **1 pt : télescopage**
- **1 pt :** $\mathbb{E}(T_1) = 1$

Partie III : Loi du premier dépassement /35

Dans toute cette partie, a désigne un réel strictement positif.
On définit la variable aléatoire N égale au plus petit entier n de $\mathbb{N}^*$ tel que $X_n > a$ si un tel entier existe, et égale à 0 sinon.

7. Justifier l'égalité d'événements : $[N = 0] = \bigcap\limits_{k=1}^{+\infty} [X_k \leqslant a]$. En déduire la probabilité $\mathbb{P}([N = 0])$.

- **1 pt :** $[N = 0] = \bigcap\limits_{k=1}^{+\infty} [X_k \leqslant a]$
- **1 pt :** $\mathbb{P}\Big(\bigcap\limits_{k=1}^{+\infty} [X_k \leqslant a]\Big) = \lim n \to +\infty \mathbb{P}\Big(\bigcap\limits_{k=1}^{n} [X_k \leqslant a]\Big)$ **par théorème de la limite monotone**
- **2 pts : $\mathbb{P}\Big(\bigcap\limits_{k=1}^{n} [X_k \leqslant a]\Big) = (1 - \mathrm{e}^{-a})^n$ (1 pour X_1, …, X_n sont indépendantes, 1 pour X_1, …, X_n suivent la même loi $\mathcal{E}(1)$)**
- **1 pt :** $\lim\limits_{n \to +\infty} (1 - \mathrm{e}^{-a})^n = 0$
- **1 pt : conclusion** $\mathbb{P}([N = 0]) = 0$

8. Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}([N = n]) = (1 - \mathrm{e}^{-a})^{n-1}\,\mathrm{e}^{-a}$.

- **1 pt :** $[N = n] = \Big(\bigcap\limits_{k=1}^{n-1} [X_k \leqslant a]\Big) \cap [X_n > a]$
- **2 pts : $\mathbb{P}([N = n]) = (1 - \mathrm{e}^{-a})^{n-1}\mathrm{e}^{-a}$ (1 pour indépendance des X_k, 1 pour les X_k suivent la même loi $\mathcal{E}(1)$)**

9. Déterminer l'espérance $\mathbb{E}(N)$ et la variance $\mathbb{V}(N)$ de N.

- **1 pt : reconnaître** $N \hookrightarrow \mathcal{G}(\mathrm{e}^{-a})$
- **1 pt :** $\mathbb{E}(N) = \mathrm{e}^a$
- **1 pt :** $\mathbb{V}(N) = \mathrm{e}^a(\mathrm{e}^a - 1)$

On s'intéresse maintenant à la variable aléatoire Z, définie pour tout ω de Ω par :

$$Z(\omega) = \begin{cases} X_{N(\omega)}(\omega) & \text{si } N(\omega) \neq 0 \\ 0 & \text{si } N(\omega) = 0 \end{cases}$$

10. Justifier : $\mathbb{P}([Z \leqslant a]) = 0$.

- 1 pt : formule des proba totales sur le SCE $([N = 0], [N \neq 0])$

- 1 pt : utilisation de la définition de Z

- 1 pt : $[X_N \leqslant a] = \varnothing$

- 1 pt : conclusion

11. Soit $x \in]a, +\infty[$.

a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, justifier l'égalité d'événements :

$$[N = n] \cap [Z \leqslant x] = \begin{cases} [a < X_1 \leqslant x] & \text{si } n = 1 \\ [T_{n-1} \leqslant a] \cap [a < X_n \leqslant x] & \text{si } n \geqslant 2 \end{cases}$$

En déduire la probabilité $\mathbb{P}([N = n] \cap [Z \leqslant x])$.

- 2 pts : cas $n = 1$ **:** $[N = 1] \cap [Z \leqslant x] = [a < X_1 \leqslant x]$

- 3 pts : cas $n = 2$ **:** $[N = n] \cap [Z \leqslant x] = [T_{n-1} \leqslant a] \cap [a < X_n \leqslant x]$ **(dont 1 pour** $\bigcap\limits_{k=1}^{n-1} [X_k \leqslant a] = [T_{n-1} \leqslant a]$**)**

- 1 pt : cas $n = 1$ **:** $\mathbb{P}([N = 1] \cap [Z \leqslant x]) = \mathrm{e}^{-a}(1 - \mathrm{e}^{a-x})$

- 3 pts : cas $n = 2$ **:** $\mathbb{P}([N = n] \cap [Z \leqslant x]) = \mathrm{e}^{-a}(1 - \mathrm{e}^{a-x})(1 - \mathrm{e}^{-a})^{n-1}$ **(1 pour** T_{n-1} **et** X_n **sont indépendantes grâce au lemme des coalitions, 1 pour utilisation de *4.a)*, 1 pour** X_n **suit la même loi que** X_1**)**

b) Montrer alors : $\mathbb{P}([Z \leqslant x]) = 1 - \mathrm{e}^{a-x}$.

- 1 pt : formule des proba totales sur le SCE $([N = n])_{n \geqslant 1}$ **(0 si le SCE est mal écrit)**

- 1 pt : utilisation *11.a)*

- 1 pt : reste du calcul

12. ***a)*** Montrer que la variable aléatoire $Z - a$ suit une loi exponentielle dont on précisera le paramètre.

- 2 pts : cas $x < 0$ **(1 pour** $[Z - a \leqslant x] \subset [Z \leqslant a]$**, 1 pour utilisation *10.*)**

- 1 pt : cas $x \geqslant 0$

- 1 pt : reconnaître $Z - a \hookrightarrow \mathcal{E}(1)$

b) En déduire l'existence et la valeur de $\mathbb{E}(Z)$, ainsi que l'existence et la valeur de $\mathbb{V}(Z)$.

- 1 pt : $\mathbb{E}(Z)$ **et** $\mathbb{V}(Z)$ **existent**

- 1 pt : $\mathbb{E}(Z) = 1 + a$

- 1 pt : $\mathbb{V}(Z) = 1$

Exercice 2 / 29

1. ***a)*** Montrer que pour tout $x > 0$: $x - \ln(x) > 0$.

- 1 pt : $\ln$ **concave**

- 1 pt : conclusion

(2 pt en cas d'étude de $x \mapsto x - \ln(x)$**)**

b) On pose alors : $f : x \mapsto \begin{cases} \dfrac{\ln(x)}{x - \ln(x)} & \text{si } x > 0 \\ -1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

Déterminer l'ensemble de définition D de la fonction f.

- 3 pts dont 1 pour le résultat
Enlever jusqu'à 2 pts en cas de confusion d'objets / problème de rédaction.

2. ***a)*** Montrer que f est continue sur D.

- 1 pt : continuité sur $]0, +\infty[$

- 2 pts : continuité en 0

b) Montrer que f est dérivable (à droite) en 0 et que $f'_d(0) = 0$.

- 1 pt : écriture du taux d'accroissement

- 1 pt : limite du taux d'accroissement

3. ***a)*** Justifier que f est dérivable sur $D \setminus \{0\}$ et calculer $f'(x)$ pour tout x de $D \setminus \{0\}$.

- 1 pt : dérivabilité sur $]0, +\infty[$

- 1 pt : $f'(x) = \dfrac{1 - \ln(x)}{(x - \ln(x))^2}$

b) Déterminer la limite de f en $+\infty$.

- 1 pt

c) Dresser le tableau de variations de f.

- 1 pt : signe de $1 - \ln(x)$

- 1 pt : tableau de variation qui fait apparaître les informations précédentes

4. Étudier le signe de $f(x)$.

- 2 pts (1 pour $f > 0$ **sur** $]0, 1[$ **et 1 pour** $f < 0$ **sur** $]1, +\infty[$**).**

5. Pour tout réel x élément de D, on pose $F(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)\, dt$.

a) Montrer que F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur D puis étudier ses variations.

- 1 pt : f C^0 **sur** $[0, +\infty[$ **donc admet une primitive** H

- 1 pt : $F(x) = H(x) - H(0)$

- 1 pt : F **est** C^1 **sur** $[0, +\infty[$

- 1 pt : tableau de variation

b) Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} \displaystyle\int_1^x \frac{\ln(t)}{t}\, dt$.

- 1 pt : $\dfrac{\ln(t)}{t} \geqslant \dfrac{1}{t}$ **pour** $t \geqslant$ **e**

- 1 pt : croissance de l'intégration, bornes dans l'ordre croissant

- 1 pt : relation de Chasles

- 1 pt : conclusion par le théorème de comparaison des limites

c) En déduire $\lim\limits_{x \to +\infty} \displaystyle\int_1^x \frac{\ln(t)}{t - \ln(t)}\, dt$ puis $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x)$.

- 1 pt : $\dfrac{\ln(t)}{t - \ln(t)} \geqslant \dfrac{1}{t}$

- 1 pt : croissance de l'intégration, bornes dans l'ordre croissant

- 1 pt : relation de Chasles

- 1 pt : conclusion par le théorème de comparaison des limites

Exercice 3 /43

Soit E un espace vectoriel de dimension 3. On note 0_E le vecteur nul de E.
On note i l'application identité de E, et θ l'application constante nulle de E dans E :

$$i : \left\{ \begin{array}{ccc} E & \to & E \\ x & \mapsto & x \end{array} \right. \quad \text{et} \quad \theta : \left\{ \begin{array}{ccc} E & \to & E \\ x & \mapsto & 0_E \end{array} \right.$$

On considère un endomorphisme f de E tel que :

$$f \neq \theta, \quad f^2 + i \neq \theta, \quad f \circ (f^2 + i) = \theta$$

où f^2 désigne $f \circ f$.

1. ***a)*** Montrer que f n'est pas bijectif.

- **1 pt : raisonnement par l'absurde**
- **1 pt : composition par f^{-1}**
- **1 pt : $f^2 + i \neq \theta$**

b) En déduire que 0 est valeur propre de f, puis montrer qu'il existe u appartenant à E tel que : $u \neq 0_E$ et $f(u) = 0_E$.

- **1 pt : 0 est valeur propre de f**
- **1 pt : $\ker(f) \neq \{0_E\}$**

Soit v_1 appartenant à E tel que : $v_1 \neq 0_E$ et $f(v_1) = 0_E$.

2. Montrer : $\mathrm{Sp}(f) = \{0\}$.

- **1 pt : $Q(X) = X(X^2+1)$ est un polynôme annulateur de f**
- **1 pt : $X^2 + 1$ n'admet pas de racine réelle**
- **1 pt : $\mathrm{Sp}(f) \subset \{0_{\mathbb{R}}\}$**
- **1 pt : $0 \in \mathrm{Sp}(f)$ d'après *1.b)***

3. Est-ce que f est diagonalisable ?

- **1 pt : raisonnement par l'absurde**
- **1 pt : introduction $M = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(f)$**
- **1 pt : f diagonalisable $\Rightarrow$ M diagonalisable**
- **2 pts : reste du raisonnement**

4. Montrer que $f^2 + i$ n'est pas bijectif, puis en déduire qu'il existe v appartenant à E tel que : $v \neq 0_E$ et $f^2(v) = -v$.

Soit v_2 appartenant à E tel que : $v_2 \neq 0_E$ et $f^2(v_2) = -v_2$. On note $v_3 = f(v_2)$.

- **3 pts : $f^2 + i$ n'est pas bijectif**
- **1 pt : $\mathrm{Ker}(f^2 + i) \neq \{0_E\}$**

5. Montrer : $f(v_3) = -v_2$.

- **1 pt**

6. ***a)*** Montrer que la famille $\mathscr{B} = (v_1, v_2, v_3)$ est une base de E.

- 4 pts : 1 pour composition par f, 1 pour utilisation des relations sur $f(v_1)$, $f(v_2)$ et $f(v_3)$, 1 pour $\lambda_3(*) + \lambda_2(**)$, 1 pour conclure)

- 1 pt : $\text{Card}(\mathscr{B}) = \dim(E)$

b) Déterminer la matrice C de f dans la base $\mathscr{B}$.

- 3 pts (1 par vecteur)

On considère les matrices suivantes : $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$,

et le sous-espace vectoriel $\mathcal{F}$ de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ engendré par (A, B, C), c'est-à-dire :

$$\mathcal{F} = \{a\,A + b\,B + c\,C \ / \ (a, b, c) \in \mathbb{R}^3\}$$

7. Déterminer la dimension de $\mathcal{F}$.

- 1 pt : (A, B, C) est une famille libre

- 1 pt : (A, B, C) engendre $\mathcal{F}$

8. Montrer : $\{M \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R}) \ / \ CM = MC\} = \mathcal{F}$

- 1 pt : calcul CM

- 1 pt : calcul MC

- 1 pt : écriture du système

- 1 pt : conclusion

9. a) Pour tout $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$, calculer la matrice $(a\,A + b\,B + c\,C)^2$.

- 1 pt : calcul

- 1 pt : écriture sous la forme $a^2\,A + (b^2 - c^2)\,B + 2bc\,C$

b) En déduire une matrice M de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que : $M^2 = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & -12 \\ 0 & 12 & 5 \end{pmatrix}$.

- 1 pt : $\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & -12 \\ 0 & 12 & 5 \end{pmatrix} = 4\,A + 5\,B + 12\,c$

- 1 pt : écriture du système

- 2 pts : résolution du système

- 1 pt : utilisation *9.a)*

10. On note $g = f^2 - i$.
Montrer que g est bijectif et exprimer g^{-1} à l'aide de f et de i.

- 2 pts : $\text{Mat}_{\mathscr{B}}(g) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$

- 1 pt : $\text{Mat}_{\mathscr{B}}(g)$ inversible et g bijectif

- 1 pt : $\text{Mat}_{\mathscr{B}}(g^{-1}) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$

- 1 pt : $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = -I_3 - \dfrac{1}{2}C^2 = \text{Mat}\mathscr{B}(-i - \dfrac{1}{2}f^2)$