DS7 (version B)

Exercice

Soit n un entier supérieur ou égal à 2 et $\mathscr{B} = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$.
Soit v un vecteur donné de $\mathbb{R}^n$ de coordonnées $v_1, v_2, \ldots, v_n$ dans la base $\mathscr{B}$ et qui vérifie $\sum\limits_{i=1}^{n} v_i = 1$.

Soit f l'application définie sur $\mathbb{R}^n$ qui à tout vecteur $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, associe le vecteur $f(x)$ défini par : $f(x) = x - \left(\sum\limits_{i=1}^{n} x_i\right) \cdot v$.

1. ***a)*** Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$.

b) Montrer que $f \circ f = f$.

2. Déterminer le spectre de f.

3. ***a)*** Montrer que le vecteur y appartient à l'image de f, notée $\mathrm{Im}(f)$, si et seulement si $f(y) = y$.

b) Montrer que la dimension de $\mathrm{Im}(f)$ est inférieure ou égale à $n-1$.

c) Montrer que pour tout $i \in [\![1, n-1]\!]$, on a : $(e_i - e_{i+1}) \in \mathrm{Im}(f)$.

d) En déduire une base et la dimension de $\mathrm{Im}(f)$. Quel est le rang de f ?

4. ***a)*** Déterminer une base du noyau de f.

b) Quels sont les sous-espaces propres de f ?

c) L'endomorphisme f est-il diagonalisable ?

5. Écrire la matrice M de l'endomorphisme f dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$ et la matrice M' de f dans une base de vecteurs propres.

Problème

Sous réserve d'existence, on note $\mathbb{E}(U)$ et $\mathbb{V}(U)$ respectivement, l'espérance mathématique et la variance d'une variable aléatoire U définie sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$.
Pour p entier supérieur ou égal à 2, on dit que les variables aléatoires à densité $U_1, \dots, U_p$ sont indépendantes si pour tout p-uplet $(u_1, \dots, u_p)$ de réels, les événements $[U_1 \leqslant u_1], \dots, [U_p \leqslant u_p]$ sont indépendants.
L'objet du problème est l'étude de quelques propriétés d'une loi de probabilité utilisée notamment en fiabilité.
Les parties I et II sont largement indépendantes. La partie III est indépendante des parties I et II.

Partie I : Loi à 1 paramètre.

On note λ un paramètre réel strictement positif. On considère la fonction f_λ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$f_\lambda(x) = \begin{cases} \dfrac{\lambda}{2\sqrt{x}} \, \mathrm{e}^{-\lambda\sqrt{x}} & \text{si} \quad x > 0 \\ \\ 0 & \text{si} \quad x \leqslant 0 \end{cases}$$

1. ***a)*** Montrer que la fonction f_λ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

b) Dresser le tableau de variation de f_λ sur $\mathbb{R}_+^*$ et préciser les limites suivantes : $\lim\limits_{x \to 0^+} f_\lambda(x)$, $\lim\limits_{x \to +\infty} f_\lambda(x)$.

c) Établir la convexité de la fonction f_λ sur $\mathbb{R}_+^*$.

d) Tracer l'allure de la courbe représentative de f_λ dans le plan rapporté à un repère orthogonal.

2. ***a)*** Vérifier que la fonction $x \mapsto -\mathrm{e}^{-\lambda\sqrt{x}}$ est une primitive de f_λ sur $\mathbb{R}_+^*$.

b) Établir la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f_\lambda(x)\, dx$ et calculer sa valeur.

c) En déduire que la fonction f_λ est une densité de probabilité sur $\mathbb{R}_+^*$.

3. Soit X une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$, à valeurs strictement positives, ayant f_λ pour densité. On note F_λ la fonction de répartition de X et on pose : $Y = \lambda\sqrt{X}$.

a) Calculer pour tout x réel, $F_\lambda(x)$.

b) Montrer que Y suit la loi exponentielle de paramètre 1.

c) Établir pour tout r de $\mathbb{N}^*$, l'existence de $\mathbb{E}(Y^r)$.

d) Montrer que pour tout r de $\mathbb{N}^*$, on a : $\mathbb{E}\left(Y^{r+1}\right) = (r+1)\,\mathbb{E}(Y^r)$.

e) En déduire pour tout r de $\mathbb{N}^*$, $\mathbb{E}(Y^r)$ et $\mathbb{E}(X^r)$. En particulier, calculer $\mathbb{E}(X)$ et $\mathbb{V}(X)$.

Partie II : Estimation ponctuelle de λ.

Pour n entier de $\mathbb{N}^*$, on note $(X_1, \dots, X_n)$ un n-échantillon de variables aléatoires à valeurs strictement positives, indépendantes et de même loi que la variable aléatoire X définie dans la question ***3***.

On rappelle que $Y = \lambda\sqrt{X}$, et on pose pour tout k de $[\![1, n]\!]$, $Y_k = \lambda\sqrt{X_k}$, $S_k = \sum_{j=1}^{k} Y_j$ et g_k une densité de S_k.

On admet que pour tout entier n supérieur ou égal à 2, les variables aléatoires $Y_1, \dots, Y_n$ sont indépendantes et que pour tout k de $[\![1, n]\!]$, les variables aléatoires S_k et Y_{k+1} sont indépendantes. On admet que si T et Z sont deux variables aléatoires à densité indépendantes définies sur le même espace probabilisé, de densités respectives f_T et f_Z telles que f_T et f_Z soient bornées, alors la variable aléatoire $T + Z$ admet une densité f_{T+Z} définie pour tout x réel par :

$$f_{T+Z}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_T(y)\, f_Z(x - y)\, dy$$

4. ***a)*** En utilisant les propriétés admises, montrer que : $g_2(x) = \begin{cases} x\mathrm{e}^{-x} & \text{si} \quad x > 0 \\ 0 & \text{si} \quad x \leqslant 0 \end{cases}$.

b) À l'aide d'un raisonnement par récurrence, montrer que pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on a :

$$g_n(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{(n-1)!}\, x^{n-1}\mathrm{e}^{-x} & \text{si} \quad x > 0 \\ 0 & \text{si} \quad x \leqslant 0 \end{cases}$$

c) On admet que pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $\dfrac{1}{S_n}$ est une variable aléatoire à densité.

Pour quelles valeurs de n, l'espérance $\mathbb{E}\left(\dfrac{1}{S_n}\right)$ et la variance $\mathbb{V}\left(\dfrac{1}{S_n}\right)$ existent-elles ?

Calculer alors leurs valeurs respectives.

5. On note $(x_1, \dots, x_n)$ un n-uplet de $(\mathbb{R}_+^*)^n$ constituant une réalisation du n-échantillon $(X_1, \cdots, X_n)$.

On suppose que le paramètre λ est inconnu. Soit H la fonction de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$H(\lambda) = \ln\left(\prod_{k=1}^{n} f_\lambda(x_k)\right)$$

Montrer que la fonction H admet un maximum atteint en un unique point λ_0 dont on donnera la valeur.

6. On pose pour tout entier n supérieur ou égal à 3 : $\lambda_n^* = \dfrac{n}{\sum\limits_{k=1}^{n} \sqrt{X_k}}$.

a) Que représente λ_0 pour λ_n^* ?

b) Déterminer une suite réelle $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ telle que $\mathbb{E}\left(a_n\lambda_n^*\right) = \lambda$. On note alors : $\hat{\lambda}_n = a_n\lambda_n^*$.

c) Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{V}\left(\hat{\lambda}_n\right)$.

Partie III : Loi à 2 paramètres.

7. Soit λ et α deux paramètres réels strictement positifs et $f_{(\lambda,\alpha)}$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f_{(\lambda,\alpha)}(x) = \begin{cases} \lambda\alpha\, x^{\alpha-1}\, \mathrm{e}^{-\lambda x^{\alpha}} & \text{si} \quad x > 0 \\ 0 & \text{si} \quad x \leqslant 0 \end{cases}$$

a) Montrer que $f_{(\lambda,\alpha)}$ est une densité de probabilité sur $\mathbb{R}$.
Soit W une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$, à valeurs strictement positives, de densité $f_{(\lambda,\alpha)}$. On dit que W suit la loi $\mathcal{WB}(\lambda, \alpha)$.

b) On note $F_{(\lambda,\alpha)}$ la fonction de répartition de W. Calculer pour tout x réel, $F_{(\lambda,\alpha)}(x)$.

c) Montrer que la variable aléatoire $F_{(\lambda,\alpha)}(W)$ suit la loi uniforme sur $[0, 1]$.

d) Écrire une fonction **Scilab** permettant de simuler W.

8. Soit K une variable aléatoire à densité définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$, à valeurs strictement positives, de densité f_K nulle sur $\mathbb{R}_-$, continue sur $\mathbb{R}$, de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et strictement positive sur $\mathbb{R}_+^*$. On note F_K la fonction de répartition de K.
On pose pour tout x réel $R(x) = -\ln(1 - F_K(x))$ et $r(x) = R'(x)$, où R' est la dérivée de R.

a) On suppose dans cette question que K suit la loi $\mathcal{WB}(\lambda, 2)$ avec $\lambda > 0$.
Établir les propriétés ***(i)*** et ***(ii)*** suivantes :

(i) la fonction r est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$, et $r(0) = 0$.

(ii) la variable aléatoire $r(K)$ suit la loi $\mathcal{WB}\left(\dfrac{1}{4\lambda}, 2\right)$.

b) Réciproquement, on suppose dans cette question que les propriétés ***(i)*** et ***(ii)*** sont vérifiées.
Montrer que K suit la loi $\mathcal{WB}(\lambda, 2)$. Conclusion ?

Dans les questions ***9.*** et ***10.***, l'entier n est supérieur ou égal à 2. On note $w_1, \dots, w_n$ des réels strictement positifs et non tous égaux.

9. Soit φ la fonction de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$\varphi(x) = \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} (w_k)^x \ln(w_k)}{\sum\limits_{k=1}^{n} (w_k)^x} - \frac{1}{x}$$

a) Soit $y_1, \dots, y_n$ des réels non tous nuls et $z_1, \dots, z_n$ des réels quelconques.
En étudiant la fonction polynomiale du second degré Q définie sur $\mathbb{R}$ par $Q(t) = \sum\limits_{k=1}^{n} (z_k - t\, y_k)^2$, établir l'inégalité :

$$\left(\sum_{k=1}^{n} y_k\, z_k \right)^2 \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n} y_k^2 \right) \left(\sum_{k=1}^{n} z_k^2 \right)$$

b) Montrer que la fonction φ est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

c) On note n_0 le nombre d'entiers k_0 de $[\![1, n]\!]$ vérifiant $w_{k_0} = \max\limits_{1 \leqslant k \leqslant n} (w_k)$.
Montrer que $1 \leqslant n_0 \leqslant n - 1$.

d) Donner un équivalent de $\sum\limits_{k=1}^{n} (w_k)^x$ en fonction de n_0 et w_{k_0}, lorsque x tend vers $+\infty$.

e) Calculer en fonction de w_{k_0}, la limite de $\varphi(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.
(on distinguera les deux cas $w_{k_0} = 1$ et $w_{k_0} \neq 1$).

f) En déduire que sur $\mathbb{R}_+^*$ l'équation $\varphi(x) = \dfrac{1}{n} \sum\limits_{k=1}^{n} \ln(w_k)$ admet une unique solution.

10. On note $(W_1, \ldots, W_n)$ un n-échantillon de variables aléatoires à valeurs strictement positives, indépendantes et de même loi $\mathcal{WB}(\lambda, \alpha)$ définie dans la question ***7.*** dont une réalisation est le n-uplet $(w_1, \ldots, w_n)$.
On suppose que les paramètres λ et α sont inconnus.
Soit G la fonction de $(\mathbb{R}_+^*)^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par $G(\lambda, \alpha) = \ln\left(\prod\limits_{k=1}^{n} f_{(\lambda,\alpha)}(w_k) \right)$.

a) Montrer que la fonction G admet un unique point critique $(\hat{\lambda}, \hat{\alpha})$ sur $(\mathbb{R}_+^*)^2$.

b) Montrer que la fonction G admet un maximum local au point $(\hat{\lambda}, \hat{\alpha})$.