DS7 (version B)

Exercice (HEC 2015) / 31

Soit n un entier supérieur ou égal à 2 et $\mathscr{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$.
Soit v un vecteur donné de $\mathbb{R}^n$ de coordonnées $v_1, v_2, \dots, v_n$ dans la base $\mathscr{B}$ et qui vérifie $\sum\limits_{i=1}^{n} v_i = 1$.

Soit f l'application définie sur $\mathbb{R}^n$ qui à tout vecteur $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, associe le vecteur $f(x)$ défini par : $f(x) = x - \left(\sum\limits_{i=1}^{n} x_i\right) \cdot v$.

1. ***a)*** Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$.

- **1 pt : caractère endo**
- **2 pts : caractère morphisme**

b) Montrer que $f \circ f = f$.

- **1 pt : linéarité**
- **1 pt :** $\sum\limits_{i=1}^{n} v_i = 1$
- **1 pt : fin du calcul**

2. Déterminer le spectre de f.

- **1 pt : polynôme annulateur et conclusion**
- **1 pt :** v **est vecteur propre donc** 0 **est valeur propre**
- **2 pts :** 1 **est valeur propre (1 pt pour** $\mathrm{Im}(f) \neq \{0\}$**)**

3. ***a)*** Montrer que le vecteur y appartient à l'image de f, notée $\mathrm{Im}(f)$, si et seulement si $f(y) = y$.

- **1 pt :** $(y \in \mathrm{Im}(f)) \;\Rightarrow\; (f(y) = y)$
- **1 pt :** $(y \in \mathrm{Im}(f)) \;\Leftarrow\; (f(y) = y)$

b) Montrer que la dimension de $\mathrm{Im}(f)$ est inférieure ou égale à $n-1$.

- **1 pt : théorème du rang**
- **1 pt :** $\ker(f) \neq \{0\}$ **donc** $\dim(\ker(f)) \geqslant 1$

c) Montrer que pour tout $i \in [\![1, n-1]\!]$, on a : $(e_i - e_{i+1}) \in \mathrm{Im}(f)$.

- **1 pt : caractérisation** $f(e_i - e_{i+1}) = e_i - e_{i+1}$ **question *3.a)***
- **2 pts :** $f(e_i - e_{i+1}) = e_i - e_{i+1}$ **(dont 1 pt pour** $Sumi = 1n \ldots = 0$**)**

d) En déduire une base et la dimension de $\mathrm{Im}(f)$. Quel est le rang de f ?

- **1 pt :** $(e_1 - e_2, e_2 - e_3, \dots, e_{n-1} - e_n)$ **est une famille de** $\mathrm{Im}(f)$
- **1 pt :** $(e_1 - e_2, e_2 - e_3, \dots, e_{n-1} - e_n)$ **est une famille libre de** $\mathrm{Im}(f)$
- **1 pt :** $\dim(\mathrm{Im}(f)) \geqslant$ **cardinal famille libre**
- **1 pt :** $\dim(\mathrm{Im}(f)) \leqslant n-1$ **d'après la question *3.b)* et conclusion**

4. *a)* Déterminer une base du noyau de f.

- **1 pt : théorème du rang et** $\dim(\ker(f)) = 1$
- **1 pt :** $\ker(f) = \text{Vect}\,(v)$

b) Quels sont les sous-espaces propres de f ?

- **1 pt :** $E_0(f) = \ker(v)$
- **1 pt :** $E_1(f) = \text{Vect}\,(e_1 - e_2, \dots, e_{n-1} - e_n)$

c) L'endomorphisme f est-il diagonalisable ?

- **1 pt : somme des dimensions des espaces propres**

5. Écrire la matrice M de l'endomorphisme f dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$ et la matrice M' de f dans une base de vecteurs propres.

- **1 pt : calcul de** $f(e_i)$
- **1 pt : matrice** M
- **1 pt :** $f(v)$
- **1 pt :** $f(e_i - e_{i+1})$
- **1 pt : matrice** M'

Problème (HEC 2012) / 123 = 40 + 32 + 51

Sous réserve d'existence, on note $\mathbb{E}(U)$ et $\mathbb{V}(U)$ respectivement, l'espérance mathématique et la variance d'une variable aléatoire U définie sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$.
Pour p entier supérieur ou égal à 2, on dit que les variables aléatoires à densité $U_1, \dots, U_p$ sont indépendantes si pour tout p-uplet $(u_1, \dots, u_p)$ de réels, les événements $[U_1 \leqslant u_1], \dots, [U_p \leqslant u_p]$ sont indépendants.
L'objet du problème est l'étude de quelques propriétés d'une loi de probabilité utilisée notamment en fiabilité.
Les parties I et II sont largement indépendantes. La partie III est indépendante des parties I et II.

Partie I : Loi à 1 paramètre.

On note λ un paramètre réel strictement positif. On considère la fonction f_λ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$f_\lambda(x) = \left\{ \begin{array}{cl} \dfrac{\lambda}{2\sqrt{x}}\, \mathrm{e}^{-\lambda\sqrt{x}} & \text{si} \quad x > 0 \\[2ex] 0 & \text{si} \quad x \leqslant 0 \end{array} \right.$$

1. *a)* Montrer que la fonction f_λ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

- **2 pts**

b) Dresser le tableau de variation de f_λ sur $\mathbb{R}_+^*$ et préciser les limites suivantes : $\lim\limits_{x \to 0^+} f_\lambda(x)$, $\lim\limits_{x \to +\infty} f_\lambda(x)$.

- **1 pt :** $\lim\limits_{x \to 0^+} f_\lambda(x) = +\infty$
- **1 pt :** $\lim\limits_{x \to +\infty} f_\lambda(x) = 0$

- **1 pt :** $f_\lambda'(x) = -\dfrac{\lambda}{4}\left(\dfrac{1}{x\sqrt{x}} + \dfrac{\lambda}{x}\right)\ \mathrm{e}^{-\lambda\sqrt{x}}$ **et tableau de variation**

c) Établir la convexité de la fonction f_λ sur $\mathbb{R}_+^*$.

- **1 pt :** $f_\lambda''(x) = -\dfrac{\lambda}{4}\left(\dfrac{3}{2}\ \dfrac{1}{x^2\sqrt{x}} + \dfrac{3\lambda}{2x^2} + \dfrac{\lambda^2}{2x\sqrt{x}}\right)\ \mathrm{e}^{-\lambda\sqrt{x}}$
- **1 pt : conclusion**

d) Tracer l'allure de la courbe représentative de f_λ dans le plan rapporté à un repère orthogonal.

- **2 pts : 1 pt pour l'aspect convexité, 1 pt pour l'aspect décroissance**
- **1 pt : bonus pour tentative de tangente**
  (difficile de faire une tangente ici)

2. a) Vérifier que la fonction $x \mapsto -\mathrm{e}^{-\lambda\sqrt{x}}$ est une primitive de f_λ sur $\mathbb{R}_+^*$.

- **1 pt :** F **est dérivable sur** $]0, +\infty[$
- **1 pt : calcul de** F'

b) Établir la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f_\lambda(x)\ dx$ et calculer sa valeur.

- **1 pt : continuité sur** $]0, +\infty[$
- **1 pt : calcul sur** $[a, 1]$
- **1 pt : calcul sur** $[1, A]$

c) En déduire que la fonction f_λ est une densité de probabilité sur $\mathbb{R}_+^*$.

- **1 pt : continuité**
- **1 pt : caractère positif**
- **1 pt :** $\displaystyle\int_0^{+\infty} f_\lambda(x)\ dx = 1$

3. Soit X une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$, à valeurs strictement positives, ayant f_λ pour densité. On note F_λ la fonction de répartition de X et on pose : $Y = \lambda\sqrt{X}$.

a) Calculer pour tout x réel, $F_\lambda(x)$.

- **1 pt : cas** $x \leqslant 0$
- **3 pts : cas** $x > 0$ **(1 pt pour découpage de l'intervalle, 1 pt pour calcul, 1 pt pour introduction de** $B \to 0$**)**

b) Montrer que Y suit la loi exponentielle de paramètre 1.

- **1 pt :** $Y(\Omega) \subset\ ]0, +\infty[$ **(égalité acceptée)**
- **1 pt : cas** $x \leqslant 0$
- **3 pts : cas** $x > 0$ **(1 pt pour stricte croissance du carré, 1 pt** $\dfrac{x^2}{\lambda^2} > 0$**, 1 pt calcul)**

c) Établir pour tout r de $\mathbb{N}^*$, l'existence de $\mathbb{E}(Y^r)$.

- **1 pt :** Y^r **admet une espérance si et seulement si ... (rédaction)**
- **1 pt :** $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \dots = \int_0^{+\infty} \dots$
- **1 pt :** $t^r = \underset{t \to +\infty}{o}\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$

- **1 pt : convergence de l'intégrale de Riemann** $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}\, dt$
- **1 pt : pour la conclusion (critère de négligeabilité sur** $[1, +\infty[$ **et existence de** $\displaystyle\int_0^1 \ldots$**)**

Enlever 1 pt si l'aspect positif (resp. continue) n'apparaît jamais (laisser s'il est présent seulement dans le nom du théorème)

d) Montrer que pour tout r de $\mathbb{N}^*$, on a : $\mathbb{E}\left(Y^{r+1}\right) = (r+1)\,\mathbb{E}\left(Y^r\right)$.

- **1 pt : IPP posée correctement (avec u et v de classe $\mathcal{C}^1$ sur le segment $[0,A]$)**
- **1 pt : pour le calcul**
- **1 pt : pour $A^{r+1}\ \mathrm{e}^{-A} \underset{A\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ par croissances comparées**
- **1 pt : pour $\displaystyle\int_0^A x^r\ \mathrm{e}^{-x}\ dx$ admet une limite finie**

e) En déduire pour tout r de $\mathbb{N}^*$, $\mathbb{E}\left(Y^r\right)$ et $\mathbb{E}\left(X^r\right)$. En particulier, calculer $\mathbb{E}(X)$ et $\mathbb{V}(X)$.

- **1 pt : récurrence immédiate et $\mathbb{E}(Y^r) = r!$**
- **1 pt : $X^r = \dfrac{Y^{2r}}{\lambda^{2r}}$**
- **1 pt : $\mathbb{E}(X^r) = \dfrac{(2r)!}{\lambda^{2r}}$ par linéarité de l'espérance et $E(X)$**
- **1 pt : $\mathbb{V}(X)$**

Partie II : Estimation ponctuelle de λ.

Pour n entier de $\mathbb{N}^*$, on note $(X_1,\ldots,X_n)$ un n-échantillon de variables aléatoires à valeurs strictement positives, indépendantes et de même loi que la variable aléatoire X définie dans la question *3*.

On rappelle que $Y = \lambda\sqrt{X}$, et on pose pour tout k de $[\![1,n]\!]$, $Y_k = \lambda\sqrt{X_k}$, $S_k = \sum\limits_{j=1}^{k} Y_j$ et g_k une densité de S_k.

On admet que pour tout entier n supérieur ou égal à 2, les variables aléatoires $Y_1,\ldots,Y_n$ sont indépendantes et que pour tout k de $[\![1,n]\!]$, les variables aléatoires S_k et Y_{k+1} sont indépendantes.
On admet que si T et Z sont deux variables aléatoires à densité indépendantes définies sur le même espace probabilisé, de densités respectives f_T et f_Z telles que f_T et f_Z soient bornées, alors la variable aléatoire $T+Z$ admet une densité f_{T+Z} définie pour tout x réel par :

$$f_{T+Z}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_T(y)\,f_Z(x-y)\ dy$$

4. a) En utilisant les propriétés admises, montrer que : $g_2(x) = \begin{cases} x\mathrm{e}^{-x} & \text{si} \quad x > 0 \\ 0 & \text{si} \quad x \leqslant 0 \end{cases}$.

- **1 pt : $S_2(\Omega) \subset\ ]0,+\infty[$ (égalité acceptée) et pour le cas $x \leqslant 0$**
- **2 pts : montrer que l'on est dans le cadre d'application du théorème fourni (1 pt pour les propriétés directes, 1 pt pour bornées)**
- **2 pts : cas $x > 0$ (1 pt pour $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \ldots = \int_0^x \ldots$ et 1 pt pour le reste)**

b) À l'aide d'un raisonnement par récurrence, montrer que pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on a :

$$g_n(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{(n-1)!}\, x^{n-1}\mathrm{e}^{-x} & \text{si} \quad x > 0 \\ 0 & \text{si} \quad x \leqslant 0 \end{cases}$$

- **1 pt : initialisation**
- **1 pt : cadre d'application du théorème**
- **1 pt : $S_{n+1}(\Omega) \subset\ ]0,+\infty[$ et cas $x \leqslant 0$**
- **3 pts : cas $x > 0$ (1 pour intégrale sur $[0,x]$ et 2 pts pour le reste)**

c) On admet que pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $\dfrac{1}{S_n}$ est une variable aléatoire à densité.
Pour quelles valeurs de n, l'espérance $\mathbb{E}\left(\dfrac{1}{S_n}\right)$ et la variance $\mathbb{V}\left(\dfrac{1}{S_n}\right)$ existent-elles ?
Calculer alors leurs valeurs respectives.

- **1 pt : rédaction $\dfrac{1}{S_n}$ admet une espérance**
- **1 pt :** $\dfrac{1}{x} g_n(x) = \dfrac{1}{n-1} g_{n-1}(x)$
- **1 pt : conclusion $\dfrac{1}{S_n}$ admet une espérance pour $n \geqslant 2$**
- **1 pt :** $\mathbb{E}\left(\dfrac{1}{S_n}\right) = \dfrac{1}{n-1}$
- **2 pts : cas $n = 1$ (critère d'équivalence des intégrales généralisés de fonctions continues positives)**
- **2 pts : existence de $\mathbb{V}(\dfrac{1}{S_n})$ ssi $n \geqslant 3$**
- **1 pt : calcul de** $\mathbb{E}(\dfrac{1}{S_n^2}) = \dfrac{1}{(n-1)(n-2)}$
- **1 pt : calcul de** $\mathbb{V}(\dfrac{1}{S_n}) = \dfrac{1}{(n-2)(n-1)^2}$

5. On note $(x_1, \dots, x_n)$ un n-uplet de $(\mathbb{R}_+^*)^n$ constituant une réalisation du n-échantillon $(X_1, \cdots, X_n)$. On suppose que le paramètre λ est inconnu. Soit H la fonction de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$H(\lambda) = \ln\left(\prod_{k=1}^{n} f_\lambda(x_k)\right)$$

Montrer que la fonction H admet un maximum atteint en un unique point λ_0 dont on donnera la valeur.

- **2 pts : expression** $H(\lambda) = n\ln(\lambda) - \left(\sum\limits_{k=1}^{n} \sqrt{x_k}\right)\ \lambda - n\ln(2) - \dfrac{1}{2}\sum\limits_{k=1}^{n}\ \ln(x_k)$
- **1 pt : H dérivable**
- **1 pt : dérivée**
- **1 pt : signe de $H'(\lambda)$**

6. On pose pour tout entier n supérieur ou égal à 3 : $\lambda_n^* = \dfrac{n}{\sum\limits_{k=1}^{n} \sqrt{X_k}}$.

a) Que représente λ_0 pour λ_n^* ?

- **1 pt**

b) Déterminer une suite réelle $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ telle que $\mathbb{E}\left(a_n \lambda_n^*\right) = \lambda$. On note alors : $\hat{\lambda}_n = a_n \lambda_n^*$.

- **1 pt :** $\lambda_n^* = \dfrac{n\lambda}{S_n}$
- **1 pt : raisonnement par équivalence** $\mathbb{E}(an\ \lambda_n^*) = \lambda \ \Leftrightarrow\ a_n = \dfrac{n-1}{n}$

c) Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{V}\left(\hat{\lambda}_n\right)$.

- **1 pt : propriété de la variance**
- **1 pt :** $\mathbb{V}(\hat{\lambda}_n) = \dfrac{\lambda^2}{n-1}$
- **1 pt :** $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{V}(\hat{\lambda}_n) = 0$

Partie III : Loi à 2 paramètres.

7. Soit λ et α deux paramètres réels strictement positifs et $f_{(\lambda,\alpha)}$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f_{(\lambda,\alpha)}(x) = \begin{cases} \lambda\alpha\, x^{\alpha-1}\, \mathrm{e}^{-\lambda x^\alpha} & \text{si} \quad x > 0 \\ 0 & \text{si} \quad x \leqslant 0 \end{cases}$$

a) Montrer que $f_{(\lambda,\alpha)}$ est une densité de probabilité sur $\mathbb{R}$.
Soit W une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$, à valeurs strictement positives, de densité $f_{(\lambda,\alpha)}$. On dit que W suit la loi $\mathcal{WB}(\lambda,\alpha)$.

- **1 pt : continuité**
- **1 pt : caractère positif**
- **3 pts :** $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \ldots = 1$ **(1 pt pour** $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \ldots = \int_{0}^{+\infty} \ldots$**, 1 pt pour l'introduction** $B \to 0$**, 1 pt pour le calcul)**

b) On note $F_{(\lambda,\alpha)}$ la fonction de répartition de W. Calculer pour tout x réel, $F_{(\lambda,\alpha)}(x)$.

- **1 pt :** $W(\Omega) \subset \,]0,+\infty[$ **et cas** $x \leqslant 0$
- **2 pts : cas** $x > 0$ **(dont 1 pt pour l'introduction** $B \to 0$**)**

c) Montrer que la variable aléatoire $F_{(\lambda,\alpha)}(W)$ suit la loi uniforme sur $[0,1]$.

- **1 pt :** $U(\Omega) \subset \,]0,1[$
- **1 pt : cas** $x \leqslant 0$
- **1 pt : cas** $x \geqslant 1$
- **2 pts : cas** $x \in \,]0,1[$ **(1 pt pour l'argumentation / 1 pt pour le calcul)**

d) Écrire une fonction **Scilab** permettant de simuler W.

- **1 pt : introduction** $G_{(\lambda,\alpha)}(x) = \left(-\dfrac{1}{\lambda}\ \ln(1-x)\right)^{\frac{1}{\alpha}}$
- **1 pt :** $W = G_{(\lambda,\alpha)}(U)$
- **2 pts : Scilab**

8. Soit K une variable aléatoire à densité définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$, à valeurs strictement positives, de densité f_K nulle sur $\mathbb{R}_-$, continue sur $\mathbb{R}$, de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et strictement positive sur $\mathbb{R}_+^*$. On note F_K la fonction de répartition de K.
On pose pour tout x réel $R(x) = -\ln(1 - F_K(x))$ et $r(x) = R'(x)$, où R' est la dérivée de R.

a) On suppose dans cette question que K suit la loi $\mathcal{WB}(\lambda, 2)$ avec $\lambda > 0$.
Établir les propriétés ***(i)*** et ***(ii)*** suivantes :

(i) la fonction r est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$, et $r(0) = 0$.

(ii) la variable aléatoire $r(K)$ suit la loi $\mathcal{WB}\left(\dfrac{1}{4\lambda}, 2\right)$.

- **1 pt :** $F_{(\lambda,2)}$
- **1 pt : détermination de** R
- **1 pt :** R **dérivable en** 0
- **1 pt : dérivée** $R'(x)$ **pour** $x > 0$ **et** r **strictement croissante**
- **1 pt :** r **continue sur** $[0, +\infty[$
- **1 pt :** $Z(\Omega) \subset \,]0, +\infty[$
- **1 pt : cas** $x \leqslant 0$
- **2 pts : cas** $x \geqslant 0$ **(1 pt pour argumentation et 1 pt calcul)**

b) Réciproquement, on suppose dans cette question que les propriétés ***(i)*** et ***(ii)*** sont vérifiées.
Montrer que K suit la loi $\mathcal{WB}(\lambda, 2)$. Conclusion ?

- **1 pt : cas** $x \leqslant 0$
- **8 pts : cas** $x > 0$

  1 pt pour $[K \leqslant x] = [r(K) \leqslant r(x)]$**,**
  1 pt pour $F_K(x) = F_{(\frac{1}{4\lambda},2)}$**,**
  1 pt pour expression $R(x)$**,**
  1 pt pour $R(x) > 0$**,**
  1 pt pour expression $R'(x) = 2\sqrt{\lambda}\ \sqrt{R(x)}$**,**
  1 pt pour intégration sur $]0, x]$**,**
  1 pt pour $R(x) = \lambda x^2$**,**
  1 pt pour expression de F_K
- **1 pt : conclusion**

Dans les questions ***9.*** et ***10.***, l'entier n est supérieur ou égal à 2. On note $w_1, \ldots, w_n$ des réels strictement positifs et non tous égaux.

9. Soit φ la fonction de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$\varphi(x) = \dfrac{\sum\limits_{k=1}^{n} (w_k)^x \, \ln(w_k)}{\sum\limits_{k=1}^{n} (w_k)^x} - \dfrac{1}{x}$$

a) Soit $y_1, \ldots, y_n$ des réels non tous nuls et $z_1, \ldots, z_n$ des réels quelconques.
En étudiant la fonction polynomiale du second degré Q définie sur $\mathbb{R}$ par $Q(t) = \sum\limits_{k=1}^{n} (z_k - t\, y_k)^2$, établir l'inégalité :

$$\left(\sum_{k=1}^{n} y_k\, z_k\right)^2 \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n} y_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n} z_k^2\right)$$

- **1 pt : expression** $Q(t) = \left(\sum\limits_{k=1}^{n} y_k^2\right)t^2 - 2\left(\sum\limits_{k=1}^{n} y_k z_k\right)t + \sum\limits_{k=1}^{n} z_k^2$
- **1 pt :** $Q(t) \geqslant 0$ **car somme de carrés**
- **1 pt :** $\Delta \leqslant 0$
- **1 pt : conclusion**

b) Montrer que la fonction φ est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

- **1 pt :** φ **dérivable**
- **1 pt : calcul de** $\varphi'(x)$
- **1 pt : on applique alors la question *8.a)* avec :** $\forall k \in [\![1, n]\!]$, $\left\{\begin{array}{l} y_k = \ln(w_k)(w_k)^{\frac{x}{2}} \\ z_k = (w_k)^{\frac{x}{2}} \end{array}\right.$
- **1 pt :** y_i **non tous nuls**
- **1 pt : faire apparaître** $\varphi'(x)$ **et conclure**

c) On note n_0 le nombre d'entiers k_0 de $[\![1, n]\!]$ vérifiant $w_{k_0} = \max\limits_{1 \leqslant k \leqslant n} (w_k)$.
Montrer que $1 \leqslant n_0 \leqslant n - 1$.

- **1 pt :** $n_0 \leqslant n - 1$
- **1 pt :** $n_0 \geqslant 1$

d) Donner un équivalent de $\sum\limits_{k=1}^{n} (w_k)^x$ en fonction de n_0 et w_{k_0}, lorsque x tend vers $+\infty$.

- **1 pt : découpage** $\sum\limits_{k=1}^{n} (w_k)^x = n_0 (w_{k_0})^x + \sum\limits_{k \notin I_0} (w_k)^x$
- **1 pt :** $\dfrac{\sum\limits_{k=1}^{n} (w_k)^x}{n_0 (w_{k_0})^x} \; = \; 1 + \dfrac{1}{n_0} \sum\limits_{k \notin I_0} \left(\dfrac{w_k}{w_{k_0}}\right)^x$
- **1 pt :** $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sum\limits_{k=1}^{n} (w_k)^x}{n_0 (w_{k_0})^x} = 1$
- **1 pt : conclusion**

e) Calculer en fonction de w_{k_0}, la limite de $\varphi(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.
(on distinguera les deux cas $w_{k_0} = 1$ et $w_{k_0} \neq 1$).

- **3 pts : cas** $w_{k_0} = 1$

  1 pt pour $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} (w_k)^x \underset{x\to+\infty}{\sim} n_0 \underset{x\to+\infty\to n_0}{\longrightarrow}$

  1 pt pour $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \ln(w_k)(w_k)^x = \sum_{k\notin I_0} \ln(w_k)(w_k)^x$

  1 pt pour $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \ln(w_k)(w_k)^x = 0$ **et** $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \varphi(x) = 0$

- **2 pts : cas** $w_{k_0} \neq 1$

  1 pt pour $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \ln(w_k)(w_k)^x \underset{x\to+\infty}{\sim} n_0 \ln(w_{k_0})(w_{k_0})^x$

  1 pt pour $\displaystyle\frac{\sum_{k=1}^{n} \ln(w_k)(w_k)^x}{\sum_{k=1}^{n} (w_k)^x} \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{\cancel{n_0 (w_{k_0})^x} \ln(w_{k_0})}{\cancel{n_0 (w_{k_0})^x}} = \ln(w_{k_0}) \underset{x\to+\infty\to\ln}{\longrightarrow} (w_0)$

f) En déduire que sur $\mathbb{R}_+^*$ l'équation $\varphi(x) = \dfrac{1}{n} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \ln(w_k)$ admet une unique solution.

- **2 pts : application du théorème de la bijection (continue + strictement croissante** / $\varphi(]0,+\infty[) =]-\infty, \ln(w_0)[$)
- **1 pt : calcul de** $\displaystyle\lim_{x\to 0} \varphi(x)$
- **3 pts :** $\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \ln(w_k) \in]-\infty, \ln(w_{k_0})[$

  1 pt pour : pour tout $k \notin I_0$ **:** $w_k < w_{k_0}$**, donc** $\ln(w_k) < \ln(w_{k_0})$
  1 pt pour : pour tout $k \in I_0$ **:** $w_k = w_{k_0}$
  1 pt pour conclusion ($\dfrac{1}{n} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \ln(w_k) \leqslant \ln(w_0)$ **)**

10. On note $(W_1, \dots, W_n)$ un n-échantillon de variables aléatoires à valeurs strictement positives, indépendantes et de même loi $\mathcal{WB}(\lambda, \alpha)$ définie dans la question ***7.*** dont une réalisation est le n-uplet $(w_1, \dots, w_n)$.
On suppose que les paramètres λ et α sont inconnus.
Soit G la fonction de $(\mathbb{R}_+^*)^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par $G(\lambda, \alpha) = \ln\left(\displaystyle\prod_{k=1}^{n} f_{(\lambda,\alpha)}(w_k)\right)$.

a) Montrer que la fonction G admet un unique point critique $(\hat{\lambda}, \hat{\alpha})$ sur $(\mathbb{R}_+^*)^2$.

- **2 pts : expression de** $G(\lambda, \alpha)$
- **2 pts :** G **de classe** $\mathcal{C}^2$ **(dont 1 pt pour la composée)**
- **1 pt :** $\partial_1(G)(\lambda, \alpha) = \dfrac{n}{\lambda} - \displaystyle\sum_{k=1}^{n} (w_k)^\alpha$
- **1 pt :** $\partial_2(G)(\lambda, \alpha) = \dfrac{n}{\alpha} + \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \ln(w_k) - \lambda \sum_{k=1}^{n} \ln(w_k)(w_k)^\alpha$
- **2 pts : expression de** λ **et égalité ne dépendant que de** α
- **1 pt : faire apparaître** $\varphi(\alpha) = \dfrac{1}{n} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \ln(w_k)$ **et conclure**

b) Montrer que la fonction G admet un maximum local au point $(\hat{\lambda}, \hat{\alpha})$.

- **0,5 pt :** $\partial^2_{1,1}(G)(\lambda, \alpha) = -\dfrac{n}{\lambda^2}$
- **0,5 pt :** $\partial^2_{1,2}(G)(\lambda, \alpha) = -\sum\limits_{k=1}^{n} \ln(w_k)(w_k)^{\alpha}$
- **0,5 pt :** $\partial^2_{2,1}(G)(\lambda, \alpha)$ **(Schwarz)**
- **0,5 pt :** $\partial^2_{2,2}(G)(\lambda, \alpha) = -\dfrac{n}{\alpha^2} - \lambda \sum\limits_{k=1}^{n} (\ln(w_k))^2 (w_k)^{\alpha}$
- **1 pt : expression de** $\det\Big(\nabla^2(G)(\hat{\lambda}, \hat{\alpha})\Big)$
- **1 pt :** $\Big(\sum\limits_{k=1}^{n} \ln(w_k)(w_k)^{\hat{\alpha}}\Big)^2 \leqslant \Big(\sum\limits_{k=1}^{n} (w_k)^{\hat{\alpha}}\Big)\Big(\sum\limits_{k=1}^{n} (\ln(w_k))^2 (w_k)^{\hat{\alpha}}\Big)$
- **1 pt : conclusion**