DS7 (version B)

Exercice (HEC 2015)

Soit n un entier supérieur ou égal à 2 et $\mathscr{B} = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$.
Soit v un vecteur donné de $\mathbb{R}^n$ de coordonnées $v_1, v_2, \ldots, v_n$ dans la base $\mathscr{B}$ et qui vérifie $\sum\limits_{i=1}^{n} v_i = 1$.

Soit f l'application définie sur $\mathbb{R}^n$ qui à tout vecteur $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, associe le vecteur $f(x)$ défini par : $f(x) = x - \left(\sum\limits_{i=1}^{n} x_i\right) \cdot v$.

1. a) Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$.

Démonstration.

- Montrons que f est une application linéaire.
  Soit $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$. Soit $(x, y) \in (\mathbb{R}^n)^2$. Alors il existe $(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^{2n}$ tels que :

$$x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \quad \text{et} \quad y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$$

  Par définition de f :

$$\begin{aligned}
f(\lambda \cdot x + \mu \cdot y) &= (\lambda \cdot x + \mu \cdot y) - \left(\sum_{i=1}^{n} (\lambda\, x_i + \mu\, y_i)\right) \cdot v \\
&= \lambda \cdot x + \mu \cdot y - \left(\lambda \sum_{i=1}^{n} x_i + \mu \sum_{i=1}^{n} y_i\right) \cdot v \\
&= \lambda \cdot x + \mu \cdot y - \lambda \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right) \cdot v - \mu \left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right) \cdot v \\
&= \lambda \cdot \left(x - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right) \cdot v\right) + \mu \cdot \left(y - \left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right) \cdot v\right) \\
&= \lambda \cdot f(x) + \mu \cdot f(y)
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{L'application } f \text{ est linéaire.}}$$

- Montrons que $f(\mathbb{R}^n) \subset \mathbb{R}^n$, *i.e.* : $\forall x \in \mathbb{R}^n,\ f(x) \in \mathbb{R}^n$.
  Soit $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. Alors : $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i \in \mathbb{R}$.
  On rappelle que : $f(x) = x - \left(\sum\limits_{i=1}^{n} x_i\right) \cdot v$.
  Ainsi, $f(x)$ appraît comme combinaison linéaire des vecteurs de $\mathbb{R}^n$, x et v.
  Comme $\mathbb{R}^n$ est un espace vectoriel, on a bien : $f(x) \in \mathbb{R}^n$.

$$\boxed{\text{L'application } f \text{ est à valeurs dans } \mathbb{R}^n.}$$

$$\boxed{\text{L'application } f \text{ est un endomorphisme de } \mathbb{R}^n.}$$

□

b) Montrer que $f \circ f = f$.

Démonstration.
Soit $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$.

$$\begin{array}{rcll} (f \circ f)(x) & = & f(f(x)) \ = \ f\left(x - \left(\sum\limits_{i=1}^{n} x_i\right) \cdot v\right) & \\ & = & f(x) - \left(\sum\limits_{i=1}^{n} x_i\right) \cdot f(v) & \textit{(par linéarité de } f\textit{)} \\ & = & f(x) - \left(\sum\limits_{i=1}^{n} x_i\right) \cdot \left(v - \left(\sum\limits_{i=1}^{n} v_i\right) \cdot v\right) & \\ & = & f(x) - \left(\sum\limits_{i=1}^{n} x_i\right) \cdot (v - v) & \textit{(car } \sum\limits_{i=1}^{n} v_i = 1\textit{)} \\ & = & f(x) & \end{array}$$

$$\boxed{\text{On en déduit : } f \circ f = f.}$$

Remarque
Si E est un espace vectoriel, un endomorphisme $f \in \mathscr{L}(E)$ qui vérifie $f \circ f = f$ est appelé projecteur de E. Dans cet exercice, on va étudier quelques propriétés classiques (mais hors programme) des projecteurs. □

2. Déterminer le spectre de f.

Démonstration.

- D'après la question précédente : $f \circ f - f = 0_{\mathscr{L}(\mathbb{R}^n)}$.
  Donc $Q(X) = X^2 - X = X(X-1)$ est un polynôme annulateur de f.

  $$\boxed{\text{Ainsi : } \mathrm{Sp}(f) \subset \{\text{racines de } Q\} = \{0, 1\}.}$$

- On remarque alors :
  $$f(v) = v - \left(\sum_{i=1}^{n} v_i\right) \cdot v = v - 1 \cdot v = 0$$
  Or $v \neq 0_{\mathbb{R}^n}$ car $\sum\limits_{i=1}^{n} v_i = 1$. Donc : $\left\{\begin{array}{l} v \neq 0_{\mathbb{R}^n} \\ f(v) = 0_{\mathbb{R}^n} \end{array}\right.$.
  On en déduit que v est un vecteur propre de f associé à la valeur propre 0.

  $$\boxed{\text{Ainsi, 0 est valeur propre de } f.}$$

- D'après ce qui précède, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, $f\big(f(x)\big) = f(x) = 1 \cdot f(x)$.
  Ainsi, tout vecteur $f(x)$ **non nul** est vecteur propre associé à la valeur propre 1.
  Un tel élément existe forcément. Pour le démontrer, remarquons tout d'abord que comme l'endomorphisme f n'est pas l'application nulle alors : $\mathrm{Im}(f) \neq \{0_{\mathbb{R}^n}\}$.
  Ainsi il existe $u \in \mathrm{Im}(f)$ tel que $u \neq 0_{\mathbb{R}^n}$. Et d'après ce qui précède : $f(u) = 1 \cdot u$.
  (on peut de nouveau le détailler. Comme : $u \in \mathrm{Im}(f)$, il existe $x \in \mathbb{R}^n$ tel que $u = f(x)$ et $f(u) = f(f(x)) = (f \circ f)(x) = f(x) = u$)

  $$\boxed{\text{Ainsi, 1 est valeur propre de } f.}$$

$$\boxed{\text{Finalement : } \mathrm{Sp}(f) = \{0, 1\}.}$$

Remarque

- L'application f est définie à l'aide du vecteur v. Penser à déterminer $f(v)$, dès la lecture de cette définition, est un bon réflexe. Il faut alors penser à utiliser ce calcul au bon moment : pour démontrer 0 est bien une valeur propre de f puisque v en est un vecteur propre.
- Il est plus difficile de trouver un vecteur propre associé à la valeur propre 1.
On se sert pour cette question du résultat suivant :
$$\forall u \in \text{Im}(f), \ f(u) = u$$
Cette relation est vraie pour tout projecteur f et se démontre grâce à la relation : $f \circ f = f$ (c'est ce qui a été fait dans le corrigé de cette question et dans la suivante).
- Il est important de penser à la notion de polynôme annulateur dès que l'énoncé met en jeu des puissances de matrices ou des itérées d'applications linéaires.
Ce réflexe permet de démontrer l'étape :
$$\text{Sp}(f) \subset \{0, 1\}$$
S'il est évidemment préférable d'écrire toutes les étapes de démonstration d'une question, chacune d'entre elles rapporte des points. Il est donc vivement conseillé d'écrire la première étape de démonstration quitte à admettre celles qui suivent. □

3. a) Montrer que le vecteur y appartient à l'image de f, notée $\text{Im}(f)$, si et seulement si $f(y) = y$.

Démonstration.
Soit $y \in \mathbb{R}^n$.

($\Rightarrow$) Supposons que $y \in \text{Im}(f)$. Alors il existe $x \in \mathbb{R}^n$ tel que : $y = f(x)$.
On obtient alors :
$$f(y) = f(f(x)) = (f \circ f)(x) = f(x) = y$$

($\Leftarrow$) Supposons que : $f(y) = y$.
Alors, en posant : $x = y$, on exhibe bien $x \in \mathbb{R}^n$ tel que $y = f(x)$.
Donc $y \in \text{Im}(f)$.

$$\boxed{\forall y \in \mathbb{R}^n, \ \ (y \in \text{Im}(f)) \ \Leftrightarrow \ (f(y) = y)}$$

Remarque
Cette démonstration n'utilise pas la définition de f mais seulement la propriété : $f \circ f = f$.
C'est donc un résultat général sur les projecteurs que l'on montre ici. □

b) Montrer que la dimension de $\text{Im}(f)$ est inférieure ou égale à $n - 1$.

Démonstration.

- D'après la question ***2.***, 0 est valeur propre de f. Donc : $\text{Ker}(f) \neq \{0_{\mathbb{R}^n}\}$.
On en déduit : $\dim(\text{Ker}(f)) \geqslant 1$.
- Ainsi, d'après le théorème du rang :
$$\underset{\underset{\displaystyle n}{\shortparallel}}{\dim(\mathbb{R}^n)} \ = \ \dim(\text{Ker}(f)) + \dim(\text{Im}(f)) \ \geqslant \ 1 + \dim(\text{Im}(f))$$

$$\boxed{\text{Comme } n \geqslant 1 + \dim(\text{Im}(f)), \text{ on a bien : } \dim(\text{Im}(f)) \leqslant n - 1.}$$ □

c) Montrer que pour tout $i \in [\![1, n-1]\!]$, on a : $(e_i - e_{i+1}) \in \mathrm{Im}(f)$.

Démonstration.
Soit $i \in [\![1, n-1]\!]$.

- Pour tout $j \in [\![1, n]\!]$, notons : $e_j = (e_j^1, e_j^2, \dots, e_j^n)$. Alors, par définition de e_j :

$$\forall k \in [\![1, n]\!],\ e_j^k = \begin{cases} 1 & \text{si } k = j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

  Ainsi : $\sum\limits_{k=1}^{n} e_j^k = 1$.

- On calcule alors :

$$f(e_i) = e_i - 1 \cdot v = e_i - v$$

  De même : $f(e_{i+1}) = e_{i+1} - v$.
  On en déduit, par linéarité de f :

$$f(e_i - e_{i+1}) = f(e_i) - f(e_{i+1}) = (e_i - \cancel{v}) - (e_{i+1} - \cancel{v}) = e_i - e_{i+1}$$

  D'après la question ***3.a)***, on en déduit : $(e_i - e_{i+1}) \in \mathrm{Im}(f)$.

$$\boxed{\forall i \in [\![1, n-1]\!],\ (e_i - e_{i+1}) \in \mathrm{Im}(f)}$$

□

d) En déduire une base et la dimension de $\mathrm{Im}(f)$. Quel est le rang de f ?

Démonstration.

- Montrons que la famille $(e_1 - e_2, e_2 - e_3, \dots, e_{n-1} - e_n)$ est une famille libre de $\mathrm{Im}(f)$.
  - × D'après la question précédente :

$$\forall i \in [\![1, n-1]\!],\ (e_i - e_{i+1}) \in \mathrm{Im}(f)$$

  - × Démoontrons maintenant que cette famille est libre.
    Soit $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1}$. Supposons :

$$\lambda_1 \cdot (e_1 - e_2) + \lambda_2 \cdot (e_2 - e_3) + \cdots + \lambda_{n-1} \cdot (e_{n-1} - e_n) = 0_{\mathbb{R}^n}$$

    On obtient alors :

$$\lambda_1 \cdot e_1 + (\lambda_2 - \lambda_1) \cdot e_2 + \cdots + (\lambda_{n-1} - \lambda_{n-2}) \cdot e_{n-1} + \lambda_{n-1} \cdot e_n = 0_{\mathbb{R}^n}$$

    Or la famille $(e_1, \dots, e_n)$ est une base de $\mathbb{R}^n$. La proposition précédente équivaut donc à :

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcrcl} \lambda_1 & & & & & & & = & 0 \\ -\lambda_1 & + & \lambda_2 & & & & & = & 0 \\ & & & \vdots & & & & & \\ & & & & - & \lambda_{n-2} & + \ \lambda_{n-1} & = & 0 \\ & & & & & & \lambda_{n-1} & = & 0 \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \quad \{\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_{n-2} = \lambda_{n-1} = 0$$

(par remontées successives)

$$\boxed{\text{La famille } (e_1 - e_2, e_2 - e_3, \dots, e_{n-1} - e_n) \text{ est une famille libre de } \mathrm{Im}(f).}$$

- On en déduit :

$$\dim(\mathrm{Im}(f)) \geqslant \mathrm{Card}((e_1 - e_2, e_2 - e_3, \dots, e_{n-1} - e_n)) = n - 1$$

Or, d'après la question ***3.b)*** : $\dim(\mathrm{Im}(f)) \leqslant n - 1$.

$$\boxed{\text{On en déduit : } \dim(\mathrm{Im}(f)) = n - 1}$$

- On sait que :
  × $(e_1 - e_2, e_2 - e_3, \dots, e_{n-1} - e_n)$ est une famille libre de $\mathrm{Im}(f)$,
  × $\mathrm{Card}((e_1 - e_2, e_2 - e_3, \dots, e_{n-1} - e_n)) = n - 1 = \dim(\mathrm{Im}(f))$

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{On en déduit que } (e_1 - e_2, e_2 - e_3, \dots, e_{n-1} - e_n) \text{ est une base de } \mathrm{Im}(f).\\ \text{De plus : } \mathrm{rg}(f) = \dim(\mathrm{Im}(f)) = n - 1.\end{array}}$$

Remarque
Les énoncés de type HEC / ESSEC se distinguent des énoncés EML / EDHEC par un découpage plus faible des questions qui oblige à prendre plus d'initiatives. Ici, la formulation de la question « En déduire que … » doit aider à comprendre qu'il s'agit de se servir du résultat précédent. En question précédente, on exhibe $(n-1)$ vecteurs de $\mathrm{Im}(f)$. Il s'agit alors de tester si la famille constituée de ces vecteurs est une base de $\mathrm{Im}(f)$. □

4. a) Déterminer une base du noyau de f.

Démonstration.

- D'après le théorème du rang :

$$\dim(\mathrm{Ker}(f)) + \underset{n-1}{\underset{\parallel}{\dim(\mathrm{Im}(f))}} = \underset{n}{\underset{\parallel}{\dim(\mathbb{R}^n)}}$$

Donc : $\dim(\mathrm{Ker}(f)) = n - (n-1) = 1$.

- D'après la question ***2.*** :
  × $v \in \mathrm{Ker}(f)$,
  × $v \neq 0_{\mathbb{R}^n}$.

  Donc (v) forme une famille libre de $\mathrm{Ker}(f)$.
- On obtient alors :
  × (v) est une famille libre de $\mathrm{Ker}(f)$,
  × $\mathrm{Card}((v)) = 1 = \dim(\mathrm{Ker}(f))$.

$$\boxed{\text{On en déduit que } (v) \text{ est une base de } \mathrm{Ker}(f).}$$

□

b) Quels sont les sous-espaces propres de f ?

Démonstration.

- On a déjà, d'après la question ***4.a)*** :

$$E_0(f) = \mathrm{Ker}(f - 0_{\mathbb{R}} \cdot \mathrm{id}) = \mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Vect}\,(v)$$

$$\boxed{\text{On en déduit que : } E_0(f) = \mathrm{Vect}\,(v).}$$

- Soit $y \in \mathbb{R}^n$. D'après la question ***3.a)*** :

$$y \in \text{Im}(f) \ \Leftrightarrow \ f(y) = y \ \Leftrightarrow \ y \in E_1(f)$$

On en déduit que : $\text{Im}(f) = E_1(f)$.

D'après la question ***3.d)*** :
$E_1(f) = \text{Im}(f) = \text{Vect}\,(e_1 - e_2, e_2 - e_3, \ldots, e_{n-1} - e_n)$

□

c) L'endomorphisme f est-il diagonalisable ?

Démonstration.
D'après les questions ***3.d)***, ***4.a)*** et ***4.b)*** :

$$\dim(E_0(f)) + \dim(E_1(f)) = 1 + (n-1) = n = \dim(\mathbb{R}^n)$$

On en déduit que f est diagonalisable.

□

5. Écrire la matrice M de l'endomorphisme f dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$ et la matrice M' de f dans une base de vecteurs propres.

Démonstration.

- Soit $i \in [\![1, n]\!]$. On a déjà montré en question ***3.c)*** :

$$\begin{array}{rcl} f(e_i) & = & e_i - v \ = \ e_i - \sum\limits_{j=1}^{n} v_j \cdot e_j \\ & = & (-v_1) \cdot e_1 + \cdots + (1 - v_i) \cdot e_i + (-v_{i+1}) \cdot e_{i+1} + \cdots + (-v_n) \cdot e_n \end{array}$$

On obtient alors : $M = \begin{pmatrix} 1 - v_1 & -v_1 & \cdots & -v_1 & -v_1 \\ -v_2 & 1 - v_2 & \cdots & -v_2 & -v_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ -v_{n-1} & -v_{n-1} & \cdots & 1 - v_{n-1} & -v_{n-1} \\ -v_n & -v_n & \cdots & -v_n & 1 - v_n \end{pmatrix}$

- La famille $(v, e_1 - e_2, e_2 - e_3, \ldots, e_{n-1} - e_n)$ est une base de vecteurs propres de f.
  - × Comme $v \in E_0(f)$:

$$f(v) = 0_{\mathbb{R}^n} = 0 \cdot v + 0 \cdot (e_1 - e_2) + \cdots + 0 \cdot (e_{n-1} - e_n)$$

  - × Comme $(e_1 - e_2) \in E_1(f)$:

$$f(e_1 - e_2) = e_1 - e_2 = 0 \cdot v + 1 \cdot (e_1 - e_2) + 0 \cdot (e_2 - e_3) + \cdots + 0 \cdot (e_{n-1} - e_n)$$

  - × $\cdots$
  - × Comme $(e_{n-1} - e_n) \in E_1(f)$:

$$f(e_{n-1} - e_n) = e_{n-1} - e_n = 0 \cdot v + 0 \cdot (e_1 - e_2) + \cdots + 0 \cdot (e_{n-2} - e_{n-1}) + 1 \cdot (e_{n-1} - e_n)$$

On obtient alors : $M' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$

□

Problème (HEC 2012)

Sous réserve d'existence, on note $\mathbb{E}(U)$ et $\mathbb{V}(U)$ respectivement, l'espérance mathématique et la variance d'une variable aléatoire U définie sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$.
Pour p entier supérieur ou égal à 2, on dit que les variables aléatoires à densité $U_1, \dots, U_p$ sont indépendantes si pour tout p-uplet $(u_1, \dots, u_p)$ de réels, les événements $[U_1 \leqslant u_1], \dots, [U_p \leqslant u_p]$ sont indépendants.
L'objet du problème est l'étude de quelques propriétés d'une loi de probabilité utilisée notamment en fiabilité.
Les parties I et II sont largement indépendantes. La partie III est indépendante des parties I et II.

Partie I : Loi à 1 paramètre.

On note λ un paramètre réel strictement positif. On considère la fonction f_λ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$f_\lambda(x) = \begin{cases} \dfrac{\lambda}{2\sqrt{x}}\, \mathrm{e}^{-\lambda\sqrt{x}} & \text{si } \ x > 0 \\[2ex] 0 & \text{si } \ x \leqslant 0 \end{cases}$$

1. a) Montrer que la fonction f_λ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

Démonstration.

- La fonction $x \mapsto \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0, +\infty[$ en tant qu'inverse de la fonction $x \mapsto 2\sqrt{x}$:
  - × de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0, +\infty[$,
  - × qui ne s'annule pas ($\forall x \in \,]0, +\infty[, \ \sqrt{x} \neq 0$).
- La fonction $x \mapsto \mathrm{e}^{-\lambda\sqrt{x}}$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0, +\infty[$ en tant que composée $g_2 \circ g_1$ de :
  - × $g_1 : x \mapsto -\lambda\sqrt{x}$ de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0, +\infty[$,
    et telle que : $g_1(]0, +\infty[) \subset \mathbb{R}$.
  - × $g_2 : u \mapsto \mathrm{e}^u$ de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$.

$$\boxed{\text{La fonction } f_\lambda \text{ est de classe } \mathcal{C}^2 \text{ sur }]0, +\infty[\text{ en tant que produit de fonctions de classe } \mathcal{C}^2 \text{ sur }]0, +\infty[.}$$

□

b) Dresser le tableau de variation de f_λ sur $\mathbb{R}_+^*$ et préciser les limites suivantes : $\lim\limits_{x \to 0^+} f_\lambda(x)$, $\lim\limits_{x \to +\infty} f_\lambda(x)$.

Démonstration.

- Comme $\lambda > 0$, par produit de limites : $\lim\limits_{x \to 0^+} f_\lambda(x) = +\infty$.
- Toujours par produit de limites : $\lim\limits_{x \to +\infty} f_\lambda(x) = 0$.
- La fonction f_λ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0, +\infty[$. En particulier, elle est dérivable sur $]0, +\infty[$.
  Soit $x \in \,]0, +\infty[$. Tout d'abord, remarquons :

$$f_\lambda(x) = \frac{\lambda}{2} \left(\frac{1}{\sqrt{x}}\, \mathrm{e}^{-\lambda\sqrt{x}} \right) = \frac{\lambda}{2} \left(x^{-\frac{1}{2}}\, \mathrm{e}^{-\lambda\sqrt{x}} \right)$$

  On obtient alors :

$$\begin{aligned} f'_\lambda(x) &= \frac{\lambda}{2} \left(-\frac{1}{2}\, x^{-\frac{3}{2}}\, \mathrm{e}^{-\lambda\sqrt{x}} + x^{-\frac{1}{2}}\, \frac{-\lambda}{2\,\sqrt{x}}\, \mathrm{e}^{-\lambda\sqrt{x}} \right) \\ &= -\frac{\lambda}{2} \left(\frac{1}{2}\, \frac{1}{x\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{x}}\, \frac{\lambda}{2\,\sqrt{x}} \right) \mathrm{e}^{-\lambda\sqrt{x}} \ = \ -\frac{\lambda}{4} \left(\frac{1}{x\sqrt{x}} + \frac{\lambda}{x} \right) \mathrm{e}^{-\lambda\sqrt{x}} \end{aligned}$$

Comme $x > 0$ et $\lambda > 0$, $f'_\lambda(x)$ apparaît comme l'opposé de trois produits strictement positifs. Ainsi : $f'_\lambda(x) < 0$. Et f_λ est strictement décroissante sur $]0, +\infty[$.

- On obtient le tableau de variations suivant :

x	0 $\qquad$ $+\infty$
Signe de $f'_\lambda(x)$	$-$
Variations de f_λ	$+\infty \searrow 0$

□

c) Établir la convexité de la fonction f_λ sur $\mathbb{R}_+^*$.

Démonstration.

- Notons $u : x \mapsto \dfrac{1}{x\sqrt{x}} + \dfrac{\lambda}{x} = x^{-\frac{3}{2}} + \lambda x^{-1}$, de sorte que : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $f'_\lambda(x) = -\dfrac{\lambda}{4}\ u(x)\ \mathrm{e}^{-\lambda\sqrt{x}}$.
La fonction u est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ par produit de fonctions dérivables sur cet intervalle.
De plus, pour tout $x \in]0, +\infty[$: $u'(x) = -\dfrac{3}{2}x^{-\frac{5}{2}} - \lambda x^{-2} = -\left(\dfrac{3}{2}\ \dfrac{1}{x^2\sqrt{x}} + \dfrac{\lambda}{x^2}\right)$.
- Soit $x \in]0, +\infty[$.

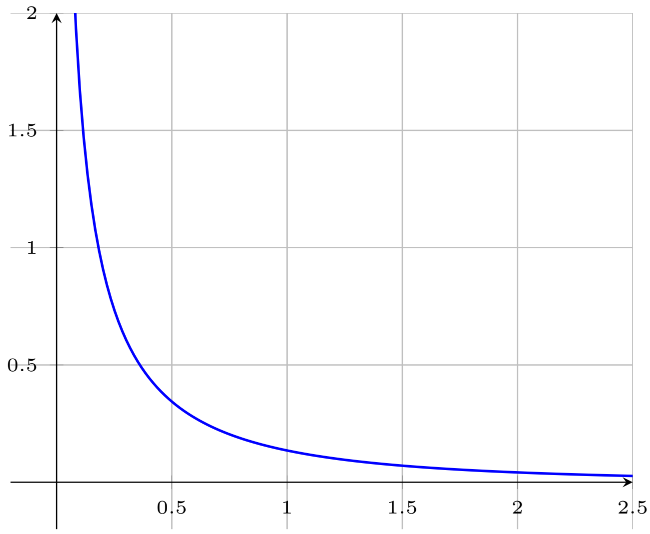
$$\begin{array}{rcl} f''_\lambda(x) & = & -\dfrac{\lambda}{4}\ \left(u'(x)\ \mathrm{e}^{-\lambda\sqrt{x}} + u(x)\ \dfrac{-\lambda}{2\sqrt{x}}\mathrm{e}^{-\lambda\sqrt{x}}\right) \\ & = & -\dfrac{\lambda}{4}\ \left(u'(x) + u(x)\ \dfrac{-\lambda}{2\sqrt{x}}\right)\ \mathrm{e}^{-\lambda\sqrt{x}} \\ & = & -\dfrac{\lambda}{4}\ \left(-\left(\dfrac{3}{2}\ \dfrac{1}{x^2\sqrt{x}} + \dfrac{\lambda}{x^2}\right) - u(x)\ \dfrac{\lambda}{2\sqrt{x}}\right)\ \mathrm{e}^{-\lambda\sqrt{x}} \\ & = & \dfrac{\lambda}{4}\ \left(\dfrac{3}{2}\ \dfrac{1}{x^2\sqrt{x}} + \dfrac{\lambda}{x^2} + \dfrac{\lambda}{2x^2} + \dfrac{\lambda^2}{2x\sqrt{x}}\right)\ \mathrm{e}^{-\lambda\sqrt{x}} \ > \ 0 \end{array}$$

$$\boxed{\text{On en déduit que } f_\lambda \text{ est convexe sur }]0, +\infty[}$$

□

d) Tracer l'allure de la courbe représentative de f_λ dans le plan rapporté à un repère orthogonal.

Démonstration.



□

2. ***a)*** Vérifier que la fonction $x \mapsto -\mathrm{e}^{-\lambda\sqrt{x}}$ est une primitive de f_λ sur $\mathbb{R}_+^*$.

Démonstration.
On note $F : x \mapsto -\mathrm{e}^{-\lambda\sqrt{x}}$.

- La fonction F est dérivable sur $]0, +\infty[$ en tant que composée $g_2 \circ g_1$ de :
  × $g_1 : x \mapsto -\lambda\sqrt{x}$ dérivable sur $]0, +\infty[$,
  et telle que : $g_1(]0, +\infty[) \subset \mathbb{R}$.
  × $g_2 : u \mapsto -\mathrm{e}^u$ dérivable sur $\mathbb{R}$.
- Soit $x \in]0, +\infty[$.

$$F'(x) = -\left(-\frac{\lambda}{2\sqrt{x}}\mathrm{e}^{-\lambda\sqrt{x}}\right) = f_\lambda(x)$$

$$\boxed{\text{Donc } x \mapsto -\mathrm{e}^{-\lambda\sqrt{x}} \text{ est une primitive de } f_\lambda \text{ sur }]0, +\infty[.}$$

□

b) Établir la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f_\lambda(x)\, dx$ et calculer sa valeur.

Démonstration.

- La fonction f_λ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0, +\infty[$, donc elle est continue sur $]0, +\infty[$.
- L'intégrale impropre $\displaystyle\int_0^{+\infty} f_\lambda(x)\, dx$ est convergente si $\displaystyle\int_0^{1} f_\lambda(x)\, dx$ et $\displaystyle\int_1^{+\infty} f_\lambda(x)\, dx$ le sont.

On s'intéresse tout d'abord à la nature de $\displaystyle\int_1^{+\infty} f_\lambda(x)\, dx$.

- La fonction f_λ est $\mathcal{C}^0$ sur $[1, +\infty[$.
- Soit $A \in [1, +\infty[$. D'après la question précédente :

$$\int_1^A f_\lambda(x)\, dx = [\ F(x)\ ]_1^A = \mathrm{e}^{-\lambda} - \mathrm{e}^{-\lambda\sqrt{A}} \underset{A \to +\infty}{\longrightarrow} \mathrm{e}^{-\lambda}$$

  Donc $\displaystyle\int_1^{+\infty} f_\lambda(x)\, dx$ converge et vaut $\mathrm{e}^{-\lambda}$.

On s'intéresse maintenant à la nature de $\displaystyle\int_0^{1} f_\lambda(x)\, dx$.

- La fonction f_λ est $\mathcal{C}^0$ sur $]0, 1]$.
- Soit $B \in]0, 1]$.

$$\int_B^1 f_\lambda(x)\, dx = [\ F(x)\ ]_B^1 = \mathrm{e}^{-\lambda\sqrt{B}} - \mathrm{e}^{-\lambda} \underset{B \to 0}{\longrightarrow} 1 - \mathrm{e}^{-\lambda}$$

  Donc $\displaystyle\int_0^{1} f_\lambda(x)\, dx$ converge et vaut $1 - \mathrm{e}^{-\lambda}$.

$$\boxed{\text{On en déduit que } \int_0^{+\infty} f_\lambda(x)\, dx \text{ converge et vaut } 1 - \cancel{\mathrm{e}^{-\lambda}} + \cancel{\mathrm{e}^{-\lambda}} = 1.}$$

□

c) En déduire que la fonction f_λ est une densité de probabilité sur $\mathbb{R}_+^*$.

Démonstration.

- D'après la question ***1.a)***, f_λ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
  En particulier, elle est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.
- Par définition de f_λ, on a bien :
$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \ f_\lambda(x) \geqslant 0$$
- Tout d'abord :
$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_\lambda(x)\ dx = \int_0^{+\infty} f_\lambda(x)\ dx$$
  car f_λ est nulle en dehors de $]0, +\infty[$.
  D'après la question ***2.b)***, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f_\lambda(x)\ dx$ converge et vaut 1.

$$\boxed{\text{Donc } f_\lambda \text{ est une densité de probabilité sur } \mathbb{R}_+^*.}$$

□

3. Soit X une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$, à valeurs strictement positives, ayant f_λ pour densité. On note F_λ la fonction de répartition de X et on pose : $Y = \lambda\sqrt{X}$.

a) Calculer pour tout x réel, $F_\lambda(x)$.

Démonstration.

- D'après l'énoncé, $X(\Omega) \subset \ ]0, +\infty[$.
- Soit $x \in \mathbb{R}$. Deux cas se présentent :
  × si $x \leqslant 0$, alors $[X \leqslant x] = \varnothing$ car $X(\Omega) \subset \ ]0, +\infty[$. Donc :
$$F_\lambda(x) = \mathbb{P}([X \leqslant x]) = \mathbb{P}(\varnothing) = 0$$
  × si $x > 0$. Tout d'abord :
$$\int_{-\infty}^{x} f_\lambda(t)\ dt = \int_0^{x} f_\lambda(t)\ dt$$
  car f_λ est nulle en dehors de $]0, x]$ $(x > 0)$.
  La fonction f_λ est continue sur $]0, x]$. Soit $B \in \ ]0, x]$.
$$\begin{aligned} \int_B^x f_\lambda(t)\ dt &= \Big[-\mathrm{e}^{-\lambda\sqrt{t}} \Big]_B^x && \textit{(d'après la question } \textbf{\textit{2.a)}}\textit{)} \\ &= -\mathrm{e}^{-\lambda\sqrt{x}} - (-\mathrm{e}^{-\lambda\sqrt{B}}) \\ &= \mathrm{e}^{-\lambda\sqrt{B}} - \mathrm{e}^{-\lambda\sqrt{x}} \\ &\underset{B\to 0}{\longrightarrow} 1 - \mathrm{e}^{-\lambda\sqrt{x}} \end{aligned}$$
  On en déduit :
$$\begin{aligned} F_\lambda(x) = \mathbb{P}([X \leqslant x]) &= \int_{-\infty}^x f_\lambda(t)\ dt && \textit{(car } f_\lambda \textit{ est une densité de } X\textit{)} \\ &= 1 - \mathrm{e}^{-\lambda\sqrt{x}} \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Finalement : } F_\lambda : x \mapsto \left\{ \begin{array}{cl} 1 - \mathrm{e}^{-\lambda\sqrt{x}} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leqslant 0 \end{array} \right. .}$$

□

b) Montrer que Y suit la loi exponentielle de paramètre 1.

Démonstration.

- D'après l'énoncé, $X(\Omega) \subset \,]0, +\infty[$.
  Donc, comme $\lambda > 0$, on obtient : $Y(\Omega) \subset \,]0, +\infty[$.

$$\boxed{Y(\Omega) \subset \,]0, +\infty[}$$

- Soit $x \in \mathbb{R}$. Deux cas se présentent :
  × si $x \leqslant 0$, alors $[Y \leqslant x] = \varnothing$ car $Y(\Omega) \subset \,]0, +\infty[$. Donc :

$$F_Y(x) = \mathbb{P}([Y \leqslant x]) = \mathbb{P}(\varnothing) = 0$$

  × si $x > 0$.

$$\begin{array}{rcll} F_Y(x) & = & \mathbb{P}([Y \leqslant x]) \ = \ \mathbb{P}\left(\left[\lambda\sqrt{X} \leqslant x\right]\right) & \\ & = & \mathbb{P}\left(\left[\sqrt{X} \leqslant \dfrac{x}{\lambda}\right]\right) & \textit{(car } \lambda > 0\textit{)} \\ & = & \mathbb{P}\left(\left[X \leqslant \left(\dfrac{x}{\lambda}\right)^2\right]\right) & \textit{(car } x \mapsto x^2 \textit{ est strictement croissante sur } \mathbb{R}_+\textit{)} \\ & = & F_\lambda\left(\frac{x^2}{\lambda^2}\right) & \textit{(car } F_\lambda \textit{ est la fonction de répartition de } X\textit{)} \\ & = & 1 - \mathrm{e}^{-\cancel{\lambda}\sqrt{\frac{x^2}{\cancel{\lambda^2}}}} & \textit{(d'après la question précédente, car } \frac{x^2}{\lambda^2} > 0\textit{)} \\ & = & 1 - \mathrm{e}^{-x} & \textit{(car } x > 0\textit{)} \end{array}$$

$$\boxed{\text{Finalement : } \forall x \in \mathbb{R},\ F_Y(x) = \left\{ \begin{array}{cl} 1 - \mathrm{e}^{-x} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leqslant 0 \end{array} \right. .}$$

- On reconnaît la fonction de répartition de la loi exponentielle de paramètre 1. Or la fonction de répartition caractérise la loi.

$$\boxed{\text{Donc la v.a.r. } Y \text{ suit la loi exponentielle de paramètre 1.}}$$

□

c) Établir pour tout r de $\mathbb{N}^*$, l'existence de $\mathbb{E}(Y^r)$.

Démonstration.
Soit $r \in \mathbb{N}^*$.

- D'après le théorème de transfert, la v.a.r. Y^r admet une espérance si et seulement si l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t^r f_Y(t)\ dt$ converge absolument, ce qui équivaut à démontrer la convergence pour des calculs de moments.
- La v.a.r. Y suit la loi exponentielle de paramètre 1. Donc :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ f_Y(t) = \left\{ \begin{array}{cl} \mathrm{e}^{-t} & \text{si } t \geqslant 0 \\ 0 & \text{si } t < 0 \end{array} \right.$$

- La fonction f_Y est nulle en dehors de $[0, +\infty[$, donc :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} t^r f_Y(t)\ dt = \int_0^{+\infty} t^r f_Y(t)\ dt$$

- La fonction $t \mapsto t^r\ f_Y(t)$ est continue sur $[0,+\infty[$.
  De plus, elle est positive sur $[0,+\infty[$.
- $\times$ Tout d'abord : $t^r\ f_Y(t) = t^r \mathrm{e}^{-t} = \underset{t\to+\infty}{o}\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$.
  En effet :
  $$\frac{t^r \mathrm{e}^{-t}}{\frac{1}{t^2}} = t^2 t^r \mathrm{e}^{-t} = t^{r+2}\mathrm{e}^{-t} \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$
  $\times$ $\forall t \in [1,+\infty[,\ t^r\mathrm{e}^{-t} \geqslant 0 \quad$ et $\quad \dfrac{1}{t^2} \geqslant 0$.
  $\times$ L'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}\ dt$ est convergente en tant qu'intégrale de Riemann impropre en $+\infty$, d'exposant 2 $(2>1)$.
  Par critère de négligeabilité des intégrales généralisées de fonctions continues positives, l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} t^r\ f_Y(t)\ dt$ converge.
- De plus la fonction $t \mapsto t^r\ f_Y(t)$ est continue sur le segment $[0,1]$, donc l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 t^r\mathrm{e}^{-t}\ dt$ est bien définie.

Finalement, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^r\mathrm{e}^{-t}\ dt$ converge.

$$\boxed{\text{On en déduit que, pour tout } r \in \mathbb{N}^*,\ \mathbb{E}(Y^r) \text{ existe.}}$$
□

d) Montrer que pour tout r de $\mathbb{N}^*$, on a : $\mathbb{E}\left(Y^{r+1}\right) = (r+1)\,\mathbb{E}\left(Y^r\right)$.

Démonstration.
Soit $r \in \mathbb{N}^*$.
D'après la question précédente :
$$\mathbb{E}(Y^{r+1}) = \int_{-\infty}^{+\infty} t^{r+1} f_Y(t)\ dt = \int_0^{+\infty} t^{r+1}\mathrm{e}^{-t}\ dt$$
Soit $A \geqslant 0$. On effectue une intégration par parties (IPP).
$$\left|\begin{array}{rclcrcl} u(t) & = & t^{r+1} & \quad & u'(t) & = & (r+1)t^r \\ v'(t) & = & \mathrm{e}^{-t} & & v(t) & = & -\mathrm{e}^{-t} \end{array}\right.$$
Cette IPP est valide car les fonctions u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,A]$. On obtient :
$$\begin{aligned} \int_0^A t^{r+1}\mathrm{e}^{-t}\ dt &= \Big[-t^{r+1}\mathrm{e}^{-t} \Big]_0^A + (r+1)\int_0^A t^r\mathrm{e}^{-t}\ dt \\ &= -A^{r+1}\mathrm{e}^{-A} + (r+1)\int_0^A t^r\mathrm{e}^{-t}\ dt \end{aligned}$$
Or, par croissances comparées : $\lim\limits_{A\to+\infty} -A^{r+1}\mathrm{e}^{-A} = 0$.
De plus, $\displaystyle\int_0^A t^r\mathrm{e}^{-t}\ dt$ admet une limite finie en $+\infty$ car $\mathbb{E}(Y^r)$ existe.

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{On en déduit, par passage à la limite quand } A \text{ tend vers } +\infty : \\ \mathbb{E}(Y^{r+1}) = (r+1)\ \mathbb{E}(Y^r).\end{array}}$$
□

e) En déduire pour tout r de $\mathbb{N}^*$, $\mathbb{E}(Y^r)$ et $\mathbb{E}(X^r)$. En particulier, calculer $\mathbb{E}(X)$ et $\mathbb{V}(X)$.

Démonstration.

- D'après la question précédente : $\forall r \geqslant 2$, $\mathbb{E}(Y^r) = r\ \mathbb{E}(Y^{r-1})$.
- On obtient ainsi, pour tout $r \geqslant 2$:

$$\mathbb{E}(Y^r) = r\mathbb{E}(Y^{r-1}) = r(r-1)\mathbb{E}(Y^{r-2}) = \cdots = r(r-1) \times \cdots \times 2\,\mathbb{E}(Y^1) = r!\,\mathbb{E}(Y)$$

(on le démontre rigoureusement par une récurrence immédiate)
Or, comme $Y \hookrightarrow \mathcal{E}(1)$: $\mathbb{E}(Y) = 1$.

$$\boxed{\forall r \in \mathbb{N}^*,\ \mathbb{E}(Y^r) = r!}$$

- Par définition : $Y = \lambda\sqrt{X}$.
Ainsi : $Y^2 = \lambda^2\ X$ et comme $\lambda^2 > 0$: $X = \dfrac{Y^2}{\lambda^2}$. On en déduit :

$$X^r = \left(\frac{Y^2}{\lambda^2}\right)^r = \frac{Y^{2r}}{\lambda^{2r}}$$

Et par linéarité de l'espérance :

$$\mathbb{E}(X^r) = \mathbb{E}\left(\frac{Y^{2r}}{\lambda^{2r}}\right) = \frac{1}{\lambda^{2r}}\,\mathbb{E}(Y^{2r}) = \frac{(2r)!}{\lambda^{2r}}$$

$$\boxed{\begin{array}{c} \forall r \in \mathbb{N}^*,\ \mathbb{E}(X^r) = \dfrac{(2r)!}{\lambda^{2r}} \\ \text{En particulier : } \mathbb{E}(X) = \dfrac{2}{\lambda^2} \text{ et } \mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2 = \dfrac{4!}{\lambda^4} - \dfrac{4}{\lambda^4} = \dfrac{20}{\lambda^4}. \end{array}}$$

□

Partie II : Estimation ponctuelle de λ.

Pour n entier de $\mathbb{N}^*$, on note $(X_1, \ldots, X_n)$ un n-échantillon de variables aléatoires à valeurs strictement positives, indépendantes et de même loi que la variable aléatoire X définie dans la question ***3.***

On rappelle que $Y = \lambda\sqrt{X}$, et on pose pour tout k de $[\![1, n]\!]$, $Y_k = \lambda\sqrt{X_k}$, $S_k = \sum\limits_{j=1}^{k} Y_j$ et g_k une densité de S_k.

On admet que pour tout entier n supérieur ou égal à 2, les variables aléatoires $Y_1, \ldots, Y_n$ sont indépendantes et que pour tout k de $[\![1, n]\!]$, les variables aléatoires S_k et Y_{k+1} sont indépendantes.
On admet que si T et Z sont deux variables aléatoires à densité indépendantes définies sur le même espace probabilisé, de densités respectives f_T et f_Z telles que f_T et f_Z soient bornées, alors la variable aléatoire $T + Z$ admet une densité f_{T+Z} définie pour tout x réel par :

$$f_{T+Z}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_T(y)\, f_Z(x-y)\ dy$$

4. *a)* En utilisant les propriétés admises, montrer que : $g_2(x) = \left\{\begin{array}{ccc} x\mathrm{e}^{-x} & \text{si} & x > 0 \\ 0 & \text{si} & x \leqslant 0 \end{array}\right.$.

Démonstration.

- Par définition : $S_2 = \sum\limits_{j=1}^{2} Y_j = Y_1 + Y_2$.
Comme $Y_1(\Omega) \subset\ ]0, +\infty[$ et $Y_2(\Omega) \subset\ ]0, +\infty[$ alors : $S_2(\Omega) \subset\ ]0, +\infty[$.

$$\boxed{S_2(\Omega) \subset\ ]0, +\infty[}$$

- D'autre part, les v.a.r. Y_1 et Y_2 :
  - × sont des variables à densité.
    En effet, elles suivent la loi exponentielle de paramètre 1, d'après la question ***3.b)***.
  - × sont indépendantes, d'après l'énoncé.
  - × admettent pour densité commune la fonction f définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} \mathrm{e}^{-x} & \text{si } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

  La fonction f est bien bornée sur $\mathbb{R}$: $\forall x \in \mathbb{R}$, $0 \leqslant f(x) \leqslant \mathrm{e}^{-0} = 1$.

  Donc, d'après l'énoncé, la v.a.r. S_2 admet une densité g_2 définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ g_2(x) = f_{Y_1+Y_2}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{Y_1}(y) f_{Y_2}(x-y)\ dy = \int_{-\infty}^{+\infty} f(y) f(x-y)\ dy$$

- Soit $x \in \mathbb{R}$.
  Deux cas se présentent alors :
  - × si $x \leqslant 0$. Alors $g_2(x) = 0$ car $S_2(\Omega) \subset \,]0, +\infty[$.
  - × si $x > 0$. Remarquons que pour tout $y \in \mathbb{R}$:

$$f(y)f(x-y) \neq 0 \ \Leftrightarrow\ \begin{cases} f(y) \neq 0 \\ f(x-y) \neq 0 \end{cases} \ \Leftrightarrow\ \begin{cases} y \in [0, +\infty[\\ x-y \in [0, +\infty[\end{cases} \ \Leftrightarrow\ \begin{cases} y \geqslant 0 \\ x - y \geqslant 0 \end{cases} \ \Leftrightarrow\ \begin{cases} y \geqslant 0 \\ y \leqslant x \end{cases}$$

  On en déduit : $f(y)f(x-y) \neq 0 \ \Leftrightarrow\ y \in [0, x]$. Et ainsi :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) f(x-y)\ dy \ = \ \int_0^x f(x) f(x-y)\ dy$$

  car $y \mapsto f(y)f(x-y)$ est nulle en dehors de $[0, x]$. Ainsi :

$$\begin{aligned} g_2(x) &= \int_0^x f(y)f(x-y)\ dy \ = \ \int_0^x \mathrm{e}^{-y}\ \mathrm{e}^{-(x-y)}\ dy \\ &= \mathrm{e}^{-x} \int_0^x \mathrm{e}^{-\cancel{y}+\cancel{y}}\ dy \ = \ \mathrm{e}^{-x} \int_0^x 1\ dy \\ &= \mathrm{e}^{-x} \left[\ y\ \right]_0^x \ = \ x\mathrm{e}^{-x} \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Finalement, on a bien : } \forall x \in \mathbb{R},\ g_2(x) = \begin{cases} x\mathrm{e}^{-x} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leqslant 0 \end{cases}.}$$

Remarque

- Le théorème fournit dans l'énoncé a deux objectifs :
  1) démontrer (sous certaines hypothèses) que la somme de deux variables aléatoires à densité Z et T est à densité,
  2) donner une expression de la densité de la somme $Z + T$ en fonction des densités de Z et T.

  Ce résultat n'est pas au programme d'ECE. Il sera donc toujours rappelé dans les énoncés qui exigent son utilisation. Ce résultat revient régulièremet dans les sujets de type HEC / ESSEC. Il est donc préférable de l'avoir déjà vu.
- La fonction $x \mapsto \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f_T(x) f_Z(x-y)$ est appelée produit de convolution de f_T et f_Z.
  Le théorème stipule donc que, sous certaines hypothèse, la densité d'une somme de v.a.r. est le produit de convolution des densités. □

b) À l'aide d'un raisonnement par récurrence, montrer que pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on a :

$$g_n(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{(n-1)!}\, x^{n-1} \mathrm{e}^{-x} & \text{si} \quad x > 0 \\ 0 & \text{si} \quad x \leqslant 0 \end{cases}$$

Démonstration.
Démontrons par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{P}(n)$,

où $\quad \mathcal{P}(n) : \forall x \in \mathbb{R},\ g_n(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{(n-1)!}\, x^{n-1} \mathrm{e}^{-x} & \text{si} \quad x > 0 \\ 0 & \text{si} \quad x \leqslant 0 \end{cases}$.

- **Initialisation** :
  Par définition : $S_1 = \sum\limits_{j=1}^{1} Y_j = Y_1$. Donc : $S_1 \hookrightarrow \mathcal{E}(1)$.
  Or : $\forall x \in \mathbb{R}$, $\dfrac{1}{(1-1)!}\, x^{1-1} \mathrm{e}^{-x} = \dfrac{1}{0!}\, x^0 \mathrm{e}^{-x} = \mathrm{e}^{-x}$. Ainsi, on a bien :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ g_1(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{(1-1)!}\, x^{1-1} \mathrm{e}^{-x} & \text{si} \quad x > 0 \\ 0 & \text{si} \quad x \leqslant 0 \end{cases}$$

  Ainsi $\mathcal{P}(1)$ est vérifié.

- **Hérédité** : soit $n \in \mathbb{N}^*$.
  Supposons $\mathcal{P}(n)$ et démontrons $\mathcal{P}(n+1)$ (*i.e.* : $\forall x \in \mathbb{R}$, $g_{n+1}(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{n!}\, x^n \mathrm{e}^{-x} & \text{si} \quad x > 0 \\ 0 & \text{si} \quad x \leqslant 0 \end{cases}$)

  - Par définition : $S_{n+1} = \sum\limits_{j=1}^{n+1} Y_j = \sum\limits_{j=1}^{n} Y_j + Y_{n+1} = S_n + Y_{n+1}$.
    Comme pour tout $j \in [\![1, n+1]\!]$, $Y_j(\Omega) \subset \,]0, +\infty[$, alors $S_{n+1}(\Omega) \subset \,]0, +\infty[$.
    $$\boxed{S_{n+1}(\Omega) \subset \,]0, +\infty[}$$
  - D'autre part, les v.a.r. S_n et Y_{n+1} :
    × sont des variables à densité. En effet, Y_{n+1} suit la loi exponentielle de paramètre 1, d'après la question ***3.b)***, et, par hypothèse de récurrence, S_n admet pour densité g_n.
    × sont indépendantes, d'après l'énoncé.
    × admettent pour densités les fonctions f et g_n.
    La fonction f est bien bornée sur $\mathbb{R}$: $\forall x \in \mathbb{R}$, $0 \leqslant f(x) \leqslant \mathrm{e}^{-0} = 1$.
    La fonction g_n est également bornée sur $\mathbb{R}$: $\forall x \in \mathbb{R}$, $0 \leqslant g_n(x) \leqslant g_n(n-1)$.
  - On en déduit, d'après le théorème de l'énoncé, que la v.a.r. S_{n+1} admet une densité g_{n+1} définie par :
    $$\forall x \in \mathbb{R},\ g_{n+1}(x) = f_{S_n + Y_{n+1}}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{S_n}(y) f_{Y_{n+1}}(x-y)\ dy = \int_{-\infty}^{+\infty} g_n(y) f(x-y)\ dy$$
  - Soit $x \in \mathbb{R}$.
    Deux cas se présentent alors :
    × si $x \leqslant 0$. Alors $g_{n+1}(x) = 0$ car $S_{n+1}(\Omega) \subset \,]0, +\infty[$.
    × si $x > 0$. Remarquons que pour tout $y \in \mathbb{R}$:

$$g_n(y) f(x-y) \neq 0 \ \Leftrightarrow \begin{cases} g_n(y) \neq 0 \\ f(x-y) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y \in \,]0, +\infty[\\ x - y \in [0, +\infty[\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y > 0 \\ x - y \geqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y > 0 \\ y \leqslant x \end{cases}$$

On en déduit : $g_n(y)f(x-y) \neq 0 \;\Leftrightarrow\; y \in]0, x]$. Et ainsi :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g_n(y)f(x-y)\ dy = \int_0^x g_n(y)f(x-y)\ dy$$

car $y \mapsto g_n(y)f(x-y)$ est nulle en dehors de $]0, x]$. Ainsi :

$$\begin{aligned}
g_{n+1}(x) &= \int_0^x g_n(y)f(x-y)\ dy \\
&= \int_0^x \frac{1}{(n-1)!}\, y^{n-1}\mathrm{e}^{-y}\mathrm{e}^{-(x-y)}\ dy \qquad \textit{(par hypothèse de récurrence)} \\
&= \frac{1}{(n-1)!}\,\mathrm{e}^{-x}\int_0^x y^{n-1}\mathrm{e}^{\cancel{-y}\cancel{+y}}\ dy \\
&= \frac{1}{(n-1)!}\,\mathrm{e}^{-x}\int_0^x y^{n-1}\ dy \\
&= \frac{1}{(n-1)!}\,\mathrm{e}^{-x}\left[\frac{y^n}{n}\right]_0^x = \frac{1}{n!}\,x^n\mathrm{e}^{-x}
\end{aligned}$$

Finalement, on a bien : $\forall x \in \mathbb{R},\ g_{n+1}(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{n!}\,x^n\mathrm{e}^{-x} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leqslant 0 \end{cases}$.

Donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vérifiée.

$$\boxed{\text{Par principe de récurrence : } \forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall x \in \mathbb{R},\ g_n(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{(n-1)!}\,x^{n-1}\mathrm{e}^{-x} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leqslant 0 \end{cases}.}$$

Remarque

- L'objectif de cette question est encore une fois, l'application du théorème du produit de convolution. C'est pourquoi on ne détaille pas la démonstration du caractère borné de g_n.
  Il s'effectue proprement grâce à une simple étude de fonction.
  Cela donnerait la preuve suivante pour $n \geqslant 2$ (le cas $n = 1$ correspond au cas $g_1 = f$).
  - La fonction g_n est dérivable sur $[0, +\infty[$ en tant que produit de fonctions dérivables sur cet intervalle. Soit $x \in [0, +\infty[$.
  $$g_n'(x) = (n-1)x^{n-2}\mathrm{e}^{-x} - x^{n-1}\mathrm{e}^{-x} = x^{n-2}\mathrm{e}^{-x}(n-1-x)$$
  Donc : $g_n'(x) \geqslant 0 \Leftrightarrow x \leqslant n-1$.
  - On obtient le tableau de variations suivant :

x	0		$n-1$		$+\infty$
Signe de $g_n'(x)$		$+$	0	$-$	
Variations de g_n	0	$\nearrow$	$g_n(n-1)$	$\searrow$	0

  On en déduit que g_n est bornée. Plus précisément : $\forall x \in \mathbb{R},\ 0 \leqslant g_n(x) \leqslant g_n(n-1)$.
- Au début de la partie II, le sujet fait admettre l'indépendance entre les v.a.r. S_k et Y_{k+1} pour tout $k \in \mathbb{N}^*$. Néanmoins, la démontrer est tout à fait à notre portée : il suffit ici d'invoquer le lemme des coalitions appliqué aux v.a.r. $X_1, \ldots, X_n$. $\square$

c) On admet que pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $\dfrac{1}{S_n}$ est une variable aléatoire à densité.

Pour quelles valeurs de n, l'espérance $\mathbb{E}\left(\dfrac{1}{S_n}\right)$ et la variance $\mathbb{V}\left(\dfrac{1}{S_n}\right)$ existent-elles ?

Calculer alors leurs valeurs respectives.

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

- D'après le théorème de transfert, la v.a.r. $\dfrac{1}{S_n}$ admet une espérance si et seulement si l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x}\, g_n(x)\, dx$ est absolument convergente.
- La fonction g_n est nulle en dehors de $]0, +\infty[$. Donc :
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x}\, g_n(x)\, dx = \int_{0}^{+\infty} \frac{1}{x}\, g_n(x)\, dx$$
Les fonctions en présence étant positives sur $]0, +\infty[$, l'absolue convergence de $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} \frac{1}{x}\, g_n(x)\, dx$ équivaut à la convergence.
- Remarquons alors que pour tout $x > 0$:
$$\begin{array}{rcll}
\dfrac{1}{x}\, g_n(x) & = & \dfrac{1}{x}\, \dfrac{1}{(n-1)!}\, x^{n-1}\, \mathrm{e}^{-x} & \\[2mm]
 & = & \dfrac{1}{(n-1)!}\, x^{n-2}\, \mathrm{e}^{-x} & \\[2mm]
 & = & \dfrac{1}{n-1}\, \dfrac{1}{(n-2)!}\, x^{n-2}\, \mathrm{e}^{-x} & \\[2mm]
 & = & \dfrac{1}{n-1}\, g_{n-1}(x) & \textit{(vrai si } n-1 \geqslant 1\textit{)}
\end{array}$$
Ainsi, si $n - 1 \geqslant 1$, c'est à dire si $n \geqslant 2$, on reconnaît, à une constante multiplicative près, l'expression de g_{n-1} sur $]0, +\infty[$. La fonction g_{n-1} étant une densité de probabilité, on en déduit que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} g_{n-1}(x)\, dx$ est convergente et :
$$\int_{-\infty}^{+\infty} g_{n-1}(x)\, dx \;=\; \int_{0}^{+\infty} g_{n-1}(x)\, dx$$
car g_{n-1} nulle en dehors de $]0, +\infty[$.
On ne change pas la nature d'une intégrale impropre par multiplication par un réel non nul de son intégrande.

$$\boxed{\text{On en déduit que, pour tout } n \geqslant 2,\ \dfrac{1}{S_n} \text{ admet une espérance.}}$$

- De plus :
$$\begin{array}{rcll}
\mathbb{E}\left(\dfrac{1}{S_n}\right) & = & \displaystyle\int_{0}^{+\infty} \frac{1}{x}\, g_n(x)\, dx \;=\; \int_{0}^{+\infty} \frac{1}{n-1}\, g_{n-1}(x)\, dx & \\[3mm]
 & = & \dfrac{1}{n-1} \displaystyle\int_{0}^{+\infty} g_{n-1}(x)\, dx \;=\; \frac{1}{n-1} \int_{-\infty}^{+\infty} g_{n-1}(x)\, dx & \\[3mm]
 & = & \dfrac{1}{n-1} & \textit{(car } g_{n-1} \textit{ est une densité de probabilité)}
\end{array}$$

$$\boxed{\forall n \geqslant 2,\ \mathbb{E}\left(\frac{1}{S_n}\right) = \frac{1}{n-1}}$$

- Il reste à étudier le cas où $n = 1$.
  Commençons par rappeler : $S_1 = Y_1$ et $f_{Y_1} : x \mapsto \left\{ \begin{array}{cl} \mathrm{e}^{-x} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leqslant 0 \end{array} \right.$.
  × Tout d'abord : $\dfrac{1}{x}\, g_1(x) = \dfrac{1}{x}\, \mathrm{e}^{-x} \underset{x \to 0}{\sim} \dfrac{1}{x}$
  × $\forall x > 0$, $\dfrac{1}{x} > 0$
  × L'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x}\, dx$ est divergente en tant qu'intégrale de Riemann, impropre en $+\infty$, d'exposant $1 \not> 1$.

  Ainsi, par critère d'équivalence des intégrales généralisées de fonctions continues positives, l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x}\, g_1(x)\, dx$ diverge et il en est donc de même de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{x}\, g_1(x)\, dx$.

  $$\boxed{\text{On en déduit que } \frac{1}{S_n} \text{ admet une espérance seulement si } n \geqslant 2.}$$

- On procède de même pour la variance.
  La v.a.r. $\dfrac{1}{S_n}$ admet une variance si et seulement si la v.a.r. $\left(\dfrac{1}{S_n}\right)^2 = \dfrac{1}{S_n^2}$ admet une espérance.
  D'après le théorème de transfert, la v.a.r. $\dfrac{1}{S_n^2}$ admet une espérance si et seulement si l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^2}\, g_n(x)\, dx$ converge absolument ce qui équivaut à démontrer la convergence puisque les fonctions $x \mapsto \dfrac{1}{x^2}$ et g_n sont positives.

- La fonction g_n est nulle en dehors de $]0, +\infty[$. Donc :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^2}\, g_n(x)\, dx = \int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2}\, g_n(x)\, dx$$

- Enfin pour tout $x > 0$:

$$\begin{array}{rcll} \dfrac{1}{x^2}\, g_n(x) & = & \dfrac{1}{x^2}\, \dfrac{1}{(n-1)!}\, x^{n-1}\, \mathrm{e}^{-x} & \\ & = & \dfrac{1}{(n-1)!}\, x^{n-3}\, \mathrm{e}^{-x} & \\ & = & \dfrac{1}{(n-1)(n-2)}\, \dfrac{1}{(n-3)!}\, x^{n-3}\, \mathrm{e}^{-x} & \\ & = & \dfrac{1}{(n-1)(n-2)}\, g_{n-2}(x) & \textit{(vrai si } n-2 \geqslant 1\textit{)} \end{array}$$

$$\boxed{\text{Ainsi, } \mathbb{V}\left(\frac{1}{S_n}\right) \text{ existe si et seulement si } n \geqslant 3.}$$

- Soit $n \geqslant 3$. On calcule :

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{E}\left(\dfrac{1}{S_n^2}\right) & = & \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2}\, g_n(x)\, dx \ = \ \int_0^{+\infty} \frac{1}{(n-1)(n-2)}\, g_{n-2}(x)\, dx \\ & = & \dfrac{1}{(n-1)(n-2)} \displaystyle\int_0^{+\infty} g_{n-2}(x)\, dx \ = \ \frac{1}{(n-1)(n-2)} \int_{-\infty}^{+\infty} g_{n-2}(x)\, dx \\ & = & \dfrac{1}{(n-1)(n-2)} \qquad \textit{(car } g_{n-2} \textit{ est une densité de probabilité)} \end{array}$$

Et d'après la formule de Koenig-Huygens :

$$\begin{aligned} \mathbb{V}\left(\frac{1}{S_n}\right) &= \mathbb{E}\left(\frac{1}{S_n^2}\right) - \left(\mathbb{E}\left(\frac{1}{S_n}\right)\right)^2 \\ &= \frac{1}{(n-1)(n-2)} - \frac{1}{(n-1)^2} \\ &= \frac{\cancel{n} - 1 - (\cancel{n} - 2)}{(n-1)^2(n-2)} \\ &= \frac{1}{(n-2)(n-1)^2} \end{aligned}$$

$$\boxed{\mathbb{V}\left(\frac{1}{S_n}\right) = \frac{1}{(n-2)(n-1)^2}}$$

□

5. On note $(x_1, \dots, x_n)$ un n-uplet de $(\mathbb{R}_+^*)^n$ constituant une réalisation du n-échantillon $(X_1, \cdots, X_n)$. On suppose que le paramètre λ est inconnu. Soit H la fonction de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$H(\lambda) = \ln\left(\prod_{k=1}^{n} f_\lambda(x_k)\right)$$

Montrer que la fonction H admet un maximum atteint en un unique point λ_0 dont on donnera la valeur.

Démonstration.

- Déterminons une expression de H.
  Soit $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$. Par propriété de la fonction ln :

$$\begin{aligned} H(\lambda) &= \ln\left(\prod_{k=1}^{n} f_\lambda(x_k)\right) \\ &= \sum_{k=1}^{n} \ln\left(f_\lambda(x_k)\right) \\ &= \sum_{k=1}^{n} \ln\left(\frac{\lambda}{2\sqrt{x_k}}\ \mathrm{e}^{-\lambda\sqrt{x_k}}\right) \\ &= \sum_{k=1}^{n} \left(\ln\left(\frac{\lambda}{2\ (x_k)^{\frac{1}{2}}}\right) + \ln\left(\mathrm{e}^{-\lambda\sqrt{x_k}}\right)\right) \\ &= \sum_{k=1}^{n} \left(\ln(\lambda) - \ln(2) - \frac{1}{2}\ \ln(x_k) - \lambda\sqrt{x_k}\right) \\ &= \sum_{k=1}^{n} \ln(\lambda) - \sum_{k=1}^{n} \ln(2) - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} \ln(x_k) - \lambda\sum_{k=1}^{n} \sqrt{x_k} \qquad \textit{(par linéarité de la somme)} \\ &= n\ln(\lambda) - n\ln(2) - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} \ln(x_k) - \lambda\sum_{k=1}^{n} \sqrt{x_k} \\ &= n\ln(\lambda) - \left(\sum_{k=1}^{n} \sqrt{x_k}\right)\ \lambda - n\ln(2) - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} \ln(x_k) \end{aligned}$$

- La fonction H est dérivable sur $]0,+\infty[$ en tant que somme de :
  × $\lambda \mapsto n\ \ln(\lambda)$ dérivable sur $]0,+\infty[$.
  × $\lambda \mapsto \left(\sum\limits_{k=1}^{n} \sqrt{x_k}\right)\ \lambda - n\ln(2) - \dfrac{1}{2}\sum\limits_{k=1}^{n}\ \ln(x_k)$ dérivable sur $]0,+\infty[$ en tant que fonction affine.
  (ne pas oublier que la variable est ici λ)
- Soit $\lambda > 0$.

$$H'(\lambda) = \frac{n}{\lambda} - \sum_{k=1}^{n} \sqrt{x_k}$$

(par rapport à λ, le réel $-n\ln(2) - \dfrac{1}{2}\sum\limits_{k=1}^{n}\ \ln(x_k)$ est une constante)

On obtient alors :

$$\begin{aligned} H'(\lambda) \geqslant 0 &\Leftrightarrow \frac{n}{\lambda} - \sum_{k=1}^{n} \sqrt{x_k} \geqslant 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{n}{\lambda} \geqslant \sum_{k=1}^{n} \sqrt{x_k} \\ &\Leftrightarrow \frac{\lambda}{n} \leqslant \frac{1}{\sum\limits_{k=1}^{n} \sqrt{x_k}} && \text{(car } x \mapsto \frac{1}{x} \text{ est strictement croissante sur }]0,+\infty[\text{)} \\ &\Leftrightarrow \lambda \leqslant \frac{n}{\sum\limits_{k=1}^{n} \sqrt{x_k}} \end{aligned}$$

Notons $\lambda_0 = \dfrac{n}{\sum\limits_{k=1}^{n} \sqrt{x_k}}$.

- On obtient le tableau de variations suivant :

λ	0		λ_0		$+\infty$
Signe de $H'(\lambda)$		$+$	0	$-$	
Variations de H	$-\infty$	$\nearrow$	$H(\lambda_0)$	$\searrow$	$-\infty$

$$\boxed{\text{La fonction } H \text{ admet un unique maximum en } \lambda_0 = \frac{n}{\sum\limits_{k=1}^{n} \sqrt{x_k}}.}$$

Remarque

- Dans cette question, on dispose initialement d'un n-uplet d'observations $(x_1, \ldots, x_n)$.
  Plus précisément, $(x_1, \ldots, x_n)$ est une réalisation d'un n-échantillon $(X_1, \ldots, X_n)$ de la v.a.r. X. La loi de X dépend d'un paramètre λ, a priori inconnu et qu'on cherche à déterminer. Pour ce faire, une idée naturelle consiste à considérer que la valeur λ qui a permis de générer les observations est celle qui avait la plus grande probabilité de les générer. C'est cette idée qui guide la méthode dite du maximum de vraisemblance, dont la question ci-dessus est une illustration. Le réel λ_0 est précisément la valeur du paramètre λ maximisant la réalisation des observations initiales.
- La méthode du maximum de vraisemblance conduit à considérer la v.a.r. construite à l'aide de ce maximum. C'est l'objet de la question suivante où l'on étudie la v.a.r. λ_n^*.
  On reviendra sur ce point dans le chapitre « Estimation ». □

6. On pose pour tout entier n supérieur ou égal à 3 : $\lambda_n^* = \dfrac{n}{\sum\limits_{k=1}^{n} \sqrt{X_k}}$.

a) Que représente λ_0 pour λ_n^* ?

Démonstration.
Rappelons que : $\lambda_0 \ = \ \dfrac{n}{\sum\limits_{k=1}^{n} \sqrt{x_k}}$ où chaque x_k est une réalisation de X_k.

$$\boxed{\text{Le réel } \lambda_0 \text{ est une réalisation de la variable aléatoire } \lambda_n^*.}$$

□

b) Déterminer une suite réelle $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ telle que $\mathbb{E}\left(a_n \ \lambda_n^*\right) = \lambda$. On note alors : $\hat{\lambda}_n = a_n \ \lambda_n^*$.

Démonstration.
Soit $n \geqslant 2$.

- On commence par exprimer λ_n^* en fonction de $Y_1, \ldots, Y_n$, puis en fonction de S_n.

$$\lambda_n^* = \frac{n}{\sum\limits_{k=1}^{n} \sqrt{X_k}} = \frac{n}{\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{Y_k}{\lambda}} = \frac{n\lambda}{\sum\limits_{k=1}^{n} Y_k} = \frac{n\lambda}{S_n}$$

- On obtient alors :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(a_n\lambda_n^*) = \lambda \quad & \Leftrightarrow \quad a_n\mathbb{E}(\lambda_n^*) = \lambda && \textit{(par linéarité de l'espérance)} \\
& \Leftrightarrow \quad a_n\,\mathbb{E}\left(\frac{n\lambda}{S_n}\right) = \lambda \\
& \Leftrightarrow \quad \cancel{\lambda}\, n\, a_n \mathbb{E}\left(\frac{1}{S_n}\right) = \cancel{\lambda} \\
& \Leftrightarrow \quad n\, a_n \frac{1}{n-1} = 1 && \textit{(d'après la question 4.c)} \\
& \Leftrightarrow \quad a_n = \frac{n-1}{n}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{En posant : } \forall n \geqslant 2,\ a_n = \frac{n-1}{n}, \text{ alors } \mathbb{E}(a_n\lambda_n^*) = \lambda.}$$

Remarque
L'énoncé demande de déterminer a_n pour tout $n \geqslant 1$ et non $n \geqslant 2$.
Cependant, on a démontré en question *4.c)* que $\dfrac{1}{S_n}$ n'admet pas d'espérance si $n = 1$.
Donc λ_n^* n'en admet pas non plus si $n = 1$. La question n'est donc plus pertinente. □

c) Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{V}\left(\hat{\lambda}_n\right)$.

Démonstration.
Soit $n \geqslant 3$.

$$\begin{aligned}
\mathbb{V}(\hat{\lambda}_n) \ &= \ \mathbb{V}(a_n\lambda_n^*) \ = \ (a_n)^2\mathbb{V}(\lambda_n^*) \ = \ \frac{(n-1)^2}{n^2}\mathbb{V}\left(\frac{n\lambda}{S_n}\right) \ = \ \frac{\cancel{n^2}\lambda^2(n-1)^2}{\cancel{n^2}}\mathbb{V}\left(\frac{1}{S_n}\right) \\
&= \ \frac{\lambda^2\cancel{(n-1)^2}}{(n-2)\cancel{(n-1)^2}} \ = \ \frac{\lambda^2}{n-2} \qquad \textit{(d'après la question 4.c)}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{On en déduit : } \lim_{n\to+\infty} \mathbb{V}(\hat{\lambda}_n) = 0.}$$

□

Partie III : Loi à 2 paramètres.

7. Soit λ et α deux paramètres réels strictement positifs et $f_{(\lambda,\alpha)}$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f_{(\lambda,\alpha)}(x) = \left\{ \begin{array}{cl} \lambda\alpha\, x^{\alpha-1}\, \mathrm{e}^{-\lambda x^\alpha} & \text{si} \quad x > 0 \\ 0 & \text{si} \quad x \leqslant 0 \end{array} \right.$$

a) Montrer que $f_{(\lambda,\alpha)}$ est une densité de probabilité sur $\mathbb{R}$.

Démonstration.

- $\times$ Si $\alpha \geqslant 1$, la fonction $x \mapsto \lambda\alpha\, x^{\alpha-1}\, \mathrm{e}^{-\lambda x^\alpha}$ est continue sur $]0,+\infty[$ en tant que produit de fonctions continues sur $]0,+\infty[$.

  Si $\alpha < 1$, la fonction $x \mapsto \lambda\alpha\, x^{\alpha-1}\, \mathrm{e}^{-\lambda x^\alpha}$ est continue sur $]0,+\infty[$ en tant que quotient de fonctions continues sur $]0,+\infty[$ dont le dénominateur ne s'annule pas.
  $(\forall x \in\,]0,+\infty[,\ x^{1-\alpha} > 0)$

  $\times$ La fonction $x \mapsto 0$ est continue sur $]-\infty,0[$ en tant que fonction constante.

  On en déduit que la fonction $f_{(\lambda,\alpha)}$ est continue sur $\mathbb{R}$ sauf éventuellement en 0.
- $\forall x \in \mathbb{R}$, $f_{(\lambda,\alpha)}(x) \geqslant 0$.
- Montrons que l'intégrale impropre $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f_{(\lambda,\alpha)}(x)\ dx$ est convergente.

  La fonction $f_{(\lambda,\alpha)}$ est nulle en dehors de $]0,+\infty[$ donc :

  $$\int_{-\infty}^{+\infty} f_{(\lambda,\alpha)}(x)\ dx = \int_{0}^{+\infty} f_{(\lambda,\alpha)}(x)\ dx$$

  L'intégrale impropre $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} f_{(\lambda,\alpha)}(x)\ dx$ est convergente si $\displaystyle\int_{0}^{1} f_{(\lambda,\alpha)}(x)\ dx$ et $\displaystyle\int_{1}^{+\infty} f_{(\lambda,\alpha)}(x)\ dx$ le sont.
- La fonction $f_{(\lambda,\alpha)}$ est $\mathcal{C}^0$ sur $[1,+\infty[$.
  Soit $A \in [1,+\infty[$.

  $$\begin{array}{rcl} \displaystyle\int_1^A f_{(\lambda,\alpha)}(x)\ dx & = & \displaystyle\int_1^A \lambda\alpha\, x^{\alpha-1}\, \mathrm{e}^{-\lambda x^\alpha}\ dx \\ & = & \displaystyle -\int_1^A \big(-\lambda\alpha\, x^{\alpha-1}\big)\ \mathrm{e}^{-\lambda x^\alpha}\ dx \\ & = & -\left[\ \mathrm{e}^{-\lambda x^\alpha}\ \right]_1^A \ = \ -(\mathrm{e}^{-\lambda A^\alpha} - \mathrm{e}^{-\lambda}) \ = \ \mathrm{e}^{-\lambda} - \mathrm{e}^{-\lambda A^\alpha} \end{array}$$

  Or, comme $\alpha > 0$: $\displaystyle\lim_{A \to +\infty} \mathrm{e}^{-\lambda A^\alpha} = 0$. Ainsi, l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} f_{(\lambda,\alpha)}(x)\ dx$ converge.
- La fonction $f_{(\lambda,\alpha)}$ est $\mathcal{C}^0$ sur $]0,1]$.

  Soit $B \in\,]0,1]$. On démontre, par un calcul analogue, que l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 f_{(\lambda,\alpha)}(x)\ dx$ converge.

  $$\int_B^1 f_{(\lambda,\alpha)}(x)\ dx \ = \ -\left[\ \mathrm{e}^{-\lambda x^\alpha}\ \right]_B^1 \ = \ -(\mathrm{e}^{-\lambda} - \mathrm{e}^{-\lambda B^\alpha}) \underset{B \to 0}{\longrightarrow} -\mathrm{e}^{-\lambda} + 1$$
- On en conclut que $\displaystyle\int_0^{+\infty} f_{(\lambda,\alpha)}(x)\ dx$ est convergente. De plus :

  $$\int_0^{+\infty} f_{(\lambda,\alpha)}(x)\ dx = \int_0^1 f_{(\lambda,\alpha)}(x)\ dx + \int_1^{+\infty} f_{(\lambda,\alpha)}(x)\ dx = (-\mathrm{e}^{-\lambda} + 1) + \mathrm{e}^{-\lambda} = 1$$

$$\boxed{\text{Finalement, } f_{(\lambda,\alpha)} \text{ est une densité de probabilité sur } \mathbb{R}.}$$

□

Soit W une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$, à valeurs strictement positives, de densité $f_{(\lambda,\alpha)}$. On dit que W suit la loi $\mathcal{WB}(\lambda, \alpha)$.

b) On note $F_{(\lambda,\alpha)}$ la fonction de répartition de W. Calculer pour tout x réel, $F_{(\lambda,\alpha)}(x)$.

Démonstration.
D'après l'énoncé, $W(\Omega) \subset \,]0, +\infty[$.
Soit $x \in \mathbb{R}$. Deux cas se présentent :

× si $x \leqslant 0$ alors $[W \leqslant x] = \varnothing$.
  Ainsi, $F_{(\lambda,\alpha)}(x) = \mathbb{P}([W \leqslant x]) = \mathbb{P}(\varnothing) = 0$.

× si $x > 0$:
  La fonction $f_{(\lambda,\alpha)}$ est nulle en dehors de $]0, +\infty[$ donc :
$$\int_{-\infty}^{x} f_{(\lambda,\alpha)}(x) \, dx = \int_{0}^{x} f_{(\lambda,\alpha)}(x) \, dx$$
  La fonction $f_{(\lambda,\alpha)}$ est $\mathcal{C}^0$ sur $]0, x]$.
  Soit $B \in \,]0, x]$.
$$\begin{array}{rcl} \displaystyle\int_{B}^{x} f_{(\lambda,\alpha)}(t) \, dt & = & \displaystyle\int_{B}^{x} \lambda\alpha \, t^{\alpha-1} \, \mathrm{e}^{-\lambda t^{\alpha}} \, dt \\ & = & -\left[\, \mathrm{e}^{-\lambda t^{\alpha}} \, \right]_{B}^{x} \; = \; \mathrm{e}^{-\lambda B^{\alpha}} - \mathrm{e}^{-\lambda x^{\alpha}} \underset{B \to 0}{\longrightarrow} 1 - \mathrm{e}^{-\lambda x^{\alpha}} \end{array}$$

On en déduit :
$$F_{(\lambda,\alpha)}(x) = \mathbb{P}([W \leqslant x]) = \int_{-\infty}^{x} f_{(\lambda,\alpha)}(x) \, dx = 1 - \mathrm{e}^{-\lambda x^{\alpha}}$$

$$\boxed{\text{Finalement : } F_{(\lambda,\alpha)} : x \mapsto \left\{ \begin{array}{cl} 1 - \mathrm{e}^{-\lambda x^{\alpha}} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leqslant 0 \end{array} \right. .}$$

Remarque

- Il faut noter que la fonction $f_{(\lambda,\alpha)}$ n'est pas forcément définie (ni continue) en 0 : dans le cas où $\alpha < 1$, on retombe sur une étude similaire à celle de la question ***3.a)***.
- Il faut par ailleurs noter que l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{x} f_{(\lambda,\alpha)}(t) \, dt$ est forcément convergente puisque l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f_{(\lambda,\alpha)}(t) \, dt$ l'est. Cependant, on est amené à introduire une variable B car comme précisé au point précédent, la fonction $f_{(\lambda,\alpha)}$ n'est pas forcément continue en 0. □

c) Montrer que la variable aléatoire $F_{(\lambda,\alpha)}(W)$ suit la loi uniforme sur $[0, 1]$.

Démonstration.
On note $U = F_{(\lambda,\alpha)}(W)$.

- Tout d'abord :
$$\begin{array}{rcl} U(\Omega) & = & \big(F_{(\lambda,\alpha)}(W)\big) \, (\Omega) \\ & = & F_{(\lambda,\alpha)} \, \big(W(\Omega)\big) \\ & \subset & F_{(\lambda,\alpha)} \, \big(]0, +\infty[\big) \end{array}$$
  Or, comme $F_{(\lambda,\alpha)}$ est continue et strictement croissante sur $]0, +\infty[$:
$$F_{(\lambda,\alpha)} \, \big(]0, +\infty[\big) = \,]\lim_{x \to 0} F_{(\lambda,\alpha)}(x), \lim_{x \to +\infty} F_{(\lambda,\alpha)}(x)[\, = \,]0, 1[$$
$$\boxed{U(\Omega) \subset \,]0, 1[}$$

- Soit $x \in \mathbb{R}$.
  Trois cas se présentent :
  × si $x \leqslant 0$, alors $[U \leqslant x] = \varnothing$, car $U(\Omega) \subset \,]0,1[$. Donc :
  $$F_U(x) = \mathbb{P}([U \leqslant x]) = \mathbb{P}(\varnothing) = 0$$
  × si $x \geqslant 1$, alors $[U \leqslant x] = \Omega$, car $U(\Omega) \subset \,]0,1[$. Donc :
  $$F_U(x) = \mathbb{P}([U \leqslant x]) = \mathbb{P}(\Omega) = 1$$
  × si $x \in \,]0,1[$.
  $$\begin{array}{rcll}
  F_U(x) & = & \mathbb{P}([U \leqslant x]) & \\
  & = & \mathbb{P}\left(\left[F_{(\lambda,\alpha)}(W) \leqslant x\right]\right) & \\
  & = & \mathbb{P}\left(\left[1 - \mathrm{e}^{-\lambda W^\alpha} \leqslant x\right]\right) & \textit{(car } W \textit{ est à valeurs strictement positives)} \\
  & = & \mathbb{P}\left(\left[1 - x \leqslant \mathrm{e}^{-\lambda W^\alpha}\right]\right) & \\
  & = & \mathbb{P}\left(\left[\ln(1-x) \leqslant -\lambda W^\alpha\right]\right) & \textit{(car } x \mapsto \ln(x) \textit{ est strictement croissante sur }]0,+\infty[\textit{)} \\
  & = & \mathbb{P}\left(\left[-\dfrac{\ln(1-x)}{\lambda} \geqslant W^\alpha\right]\right) & \textit{(car } -\lambda < 0\textit{)} \\
  & = & \mathbb{P}\left(\left[\left(-\dfrac{1}{\lambda}\ln(1-x)\right)^{\frac{1}{\alpha}} \geqslant W\right]\right) & \textit{(car } x \mapsto x^\alpha \textit{ est strictement croissante sur }]0,+\infty[\textit{)} \\
  & = & F_{(\lambda,\alpha)}\left(\left(-\dfrac{1}{\lambda}\ln(1-x)\right)^{\frac{1}{\alpha}}\right) & \\
  & = & 1 - \exp\left(-\lambda\left(\left(-\dfrac{1}{\lambda}\ln(1-x)\right)^{\frac{1}{\alpha}}\right)^\alpha\right) & \textit{(car } \left(-\dfrac{1}{\lambda}\ln(1-x)\right)^{\frac{1}{\alpha}} > 0\textit{)} \\
  & = & 1 - \exp\left(-\cancel{\lambda}\left(-\dfrac{1}{\cancel{\lambda}}\ln(1-x)\right)\right) & \\
  & = & 1 - \exp(\ln(1-x)) \; = \; \cancel{1} - (\cancel{1} - x) & \\
  & = & x &
  \end{array}$$
  Finalement :
  $$F_U : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant 0 \\ x & \text{si } x \in \,]0,1[\\ 1 & \text{si } x \geqslant 1 \end{cases}$$

On reconnaît la fonction de répartition de la loi uniforme sur $[0,1]$.
Or la fonction de répartition caractérise la loi.

$$\boxed{\text{On en déduit : } U = F_{(\lambda,\alpha)}(W) \hookrightarrow \mathcal{U}([0,1]).}$$

Remarque
On reconnaît ici la méthode d'inversion appliquée à la v.a.r. W suivant une loi de Weibull.

□

d) Écrire une fonction **Scilab** permettant de simuler W.

Démonstration.

- On note $G_{(\lambda,\alpha)}$ la fonction définie par :

$$\forall x \in \,]0,1[, \;\; G_{(\lambda,\alpha)}(x) = \left(-\frac{1}{\lambda}\ln(1-x)\right)^{\frac{1}{\alpha}}$$

Alors, avec les mêmes calculs qu'à la question précédente, on obtient, pour tout $x > 0$:

$$G_{(\lambda,\alpha)}\ \big(F_{(\lambda,\alpha)}(x)\big) \;=\; x$$

Or $U = F_{(\lambda,\alpha)}(W)$ donc $G_{(\lambda,\alpha)}(U) = G_{(\lambda,\alpha)}\big(F_{(\lambda,\alpha)}(W)\big) = W$.

$$\boxed{W = G_{(\lambda,\alpha)}(U)}$$

- On en déduit la fonction **Scilab** suivante pour simuler W :

```
funcion w = simuWB(lambda, alpha)
    u = rand()
    w = (-(1 / lambda) * log(1-u)) ^ (1 / alpha)
endfunction
```

□

8. Soit K une variable aléatoire à densité définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$, à valeurs strictement positives, de densité f_K nulle sur $\mathbb{R}_-$, continue sur $\mathbb{R}$, de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et strictement positive sur $\mathbb{R}_+^*$. On note F_K la fonction de répartition de K.
On pose pour tout x réel $R(x) = -\ln\left(1 - F_K(x)\right)$ et $r(x) = R'(x)$, où R' est la dérivée de R.

a) On suppose dans cette question que K suit la loi $\mathcal{WB}(\lambda, 2)$ avec $\lambda > 0$.
Établir les propriétés ***(i)*** et ***(ii)*** suivantes :

(i) la fonction r est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$, et $r(0) = 0$.

(ii) la variable aléatoire $r(K)$ suit la loi $\mathcal{WB}\left(\dfrac{1}{4\lambda}, 2\right)$.

Démonstration.

(i) • D'après les hypothèse de cette question :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \;\; f_K(x) = f_{(\lambda,2)}(x) = \begin{cases} 2\lambda x \mathrm{e}^{-\lambda x^2} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leqslant 0 \end{cases}$$

et :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \;\; F_K(x) = F_{(\lambda,2)}(x) = \begin{cases} 1 - \mathrm{e}^{-\lambda x^2} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leqslant 0 \end{cases}$$

- Si $x > 0$, on a donc :

$$R(x) = -\ln(1 - F_K(x)) = -\ln(\cancel{1} - (\cancel{1} - \mathrm{e}^{-\lambda x^2})) = -\ln(\mathrm{e}^{-\lambda x^2}) = -(-\lambda x^2) = \lambda x^2$$

Et si $x \leqslant 0$:

$$R(x) = -\ln(1 - F_K(x)) = -\ln(1 - 0) = 0$$

$$\boxed{\text{Finalement : } R : x \mapsto \begin{cases} \lambda x^2 & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leqslant 0 \end{cases}.}$$

- La fonction R est donc de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,+\infty[$. Donc r est continue sur $]0,+\infty[$.
  De plus, pour tout $x > 0$:
  $$\tau_0(R)(x) = \frac{R(x)-R(0)}{x-0} = \frac{\lambda x^{\cancel{2}}}{\cancel{x}} = \lambda x \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$$
  Donc R est dérivable en 0 et $r(0) = R'(0) = 0$.
- Soit $x > 0$.
  $$r(x) = R'(x) = 2\lambda x$$
  Donc : $\lim\limits_{x\to 0^+} r(x) = 0 = r(0)$.
  Ainsi r est continue à droite en 0.
- De plus, comme $\lambda > 0$, r est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$.

$$\boxed{\text{La fonction } r \text{ est continue et strictement croissante sur } \mathbb{R}_+ \text{ et } r(0) = 0.}$$

(ii) On note $Z = r(K)$.

- Tout d'abord :
  $$\begin{array}{rcl} Z(\Omega) & = & \big(r(K)\big)\,(\Omega) \\ & = & r\big(K(\Omega)\big) \\ & \subset & r\big(]0,+\infty[\big) \end{array}$$
  Or, comme r est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$:
  $$r\big(]0,+\infty[\big) = \left]\lim_{x\to 0} r(x), \lim_{x\to+\infty} r(x)\right[\subset\,]0,+\infty[$$
  $$\boxed{Z(\Omega) \subset\,]0,+\infty[}$$
- Soit $x \in \mathbb{R}$. Deux cas se présentent :

× si $x \leqslant 0$, alors $[Z \leqslant x] \subset \varnothing$, car $Z(\Omega) =]0,+\infty[$. Donc :
$$F_Z(x) = \mathbb{P}([Z \leqslant x]) = \mathbb{P}(\varnothing) = 0$$

× si $x > 0$.
$$\begin{array}{rcl} F_Z(x) & = & \mathbb{P}([Z \leqslant x]) \ = \ \mathbb{P}([r(K) \leqslant x]) \\ & = & \mathbb{P}([2\lambda K \leqslant x]) \ = \ \mathbb{P}\left(\left[K \leqslant \dfrac{x}{2\lambda}\right]\right) \\ & = & F_K\left(\dfrac{x}{2\lambda}\right) \ = \ 1 - \exp\left(-\lambda\left(\dfrac{x}{2\lambda}\right)^2\right) \\ & = & 1 - \exp\left(-\dfrac{1}{4\lambda}x^2\right) \end{array}$$

- Finalement :
  $$\forall x \in \mathbb{R},\ F_Z(x) = \left\{\begin{array}{cl} 1 - \exp\left(-\dfrac{1}{4\lambda}x^2\right) & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leqslant 0 \end{array}\right.$$
  On reconnaît la fonction de répartition de la loi $\mathcal{WB}\left(\dfrac{1}{4\lambda}, 2\right)$.
  Or la fonction de répartition caractérise la loi.

$$\boxed{\text{On en déduit : } r(K) \hookrightarrow \mathcal{WB}\left(\dfrac{1}{4\lambda}, 2\right).}$$

□

b) Réciproquement, on suppose dans cette question que les propriétés ***(i)*** et ***(ii)*** sont vérifiées. Montrer que K suit la loi $\mathcal{WB}(\lambda, 2)$. Conclusion ?

Démonstration.
Soit $x \in \mathbb{R}$.

- Deux cas se présentent :
  × si $x \leqslant 0$.
  $$F_K(x) = \mathbb{P}([K \leqslant x]) = \int_{-\infty}^{x} f_K(t)\ dt = \int_{-\infty}^{x} 0\ dt = 0$$
  × si $x > 0$.
  D'après ***(i)***, la fonction r est strictement croissante, donc :
  $$[K \leqslant x] = [r(K) \leqslant r(x)]$$
  D'où :
  $$F_K(x) = \mathbb{P}([K \leqslant x]) = \mathbb{P}([r(K) \leqslant r(x)]) = F_{r(K)}(r(x))$$
  Or, d'après ***(ii)*** : $r(K) \hookrightarrow \mathcal{WB}\left(\dfrac{1}{4\lambda}, 2\right)$. D'où :
  $$F_K(x) = F_{(\frac{1}{4\lambda},2)}(x) = 1 - \exp\left(-\frac{1}{4\lambda}(r(x))^2\right)$$
  On en déduit :
  $$1 - F_K(x) = \exp\left(-\frac{1}{4\lambda}(r(x))^2\right)$$
  Ainsi :
  $$R(x) = -\ln(1 - F_K(x)) = \frac{1}{4\lambda}(r(x))^2$$
  - D'après ***(i)***, la fonction r est strictement croissante et vérifie $r(0) = 0$.
    Donc : $\forall x > 0,\ r(x) > 0$.
  - D'après l'énoncé : $\forall x > 0,\ f_K(x) > 0$. Donc F_K est strictement croissante sur $]0, +\infty[$.
    Or $F_K(0) = 0$. Donc : $\forall x > 0,\ F_K(x) > 0$.
    De plus, comme F_k est une fonction de répartition : $\lim\limits_{x \to +\infty} F_K(x) = 1$.
    Donc, comme F_K est strictement croissante : $\forall x > 0,\ F_K(x) < 1$.
    Finalement :
    $$\forall x > 0,\ 0 < F_K(x) < 1, \quad \text{donc} \quad R(x) = -\ln(1 - F_K(x)) > 0$$

  On obtient alors :
  $$R'(x) = r(x) = \sqrt{4\lambda R(x)} = 2\sqrt{\lambda}\sqrt{R(x)}$$
  Donc, comme $R(x) > 0$:
  $$\frac{R'(x)}{2\sqrt{R(x)}} = \sqrt{\lambda}$$
  Soit $a \in\ ]0, x]$. On obtient :
  $$\begin{array}{ccc} \displaystyle\int_a^x \frac{R'(t)}{2\sqrt{R(t)}}\ dt & = & \displaystyle\int_a^x \sqrt{\lambda}\ dt = \Big[\ \sqrt{\lambda}\ t\ \Big]_a^x = \sqrt{\lambda}\ x - \sqrt{\lambda}\ a \\ \| & & \\ \Big[\ \sqrt{R(x)}\ \Big]_a^x & & \\ \| & & \\ \sqrt{R(x)} - \sqrt{R(a)} & & \end{array}$$

Or F_K est une primitive de f_K et, d'après l'énoncé, f_K est continue sur $\mathbb{R}$.
Donc F_K est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. En particulier F_K est continue sur $\mathbb{R}$.
On en déduit que R est continue sur $\mathbb{R}$.
D'où : $\lim\limits_{a \to 0^+} \sqrt{R(a)} = R(0) = 0$.
De plus : $\lim\limits_{a \to 0^+} \sqrt{\lambda}\, a = 0$.
On en déduit :

$$\sqrt{R(x)} = \sqrt{\lambda}\, x \quad \text{donc} \quad R(x) = \lambda x^2$$

En dérivant, on obtient : $r(x) = R'(x) = 2\lambda x$.
En remplaçant r dans l'expression de F_K, on a :

$$F_K(x) = 1 - \exp\left(-\frac{1}{4\lambda}(r(x))^2\right) = 1 - \exp\left(-\frac{1}{4\lambda}\,(2\lambda x)^2\right) = 1 - \exp(-\lambda x^2)$$

- Finalement :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ F_K(x) = \left\{ \begin{array}{cl} 1 - \mathrm{e}^{-\lambda x^2} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leqslant 0 \end{array} \right.$$

On reconnaît la fonction de répartition de la loi $\mathcal{WB}(\lambda, 2)$.
Or la fonction de répartition caractérise la loi.

$$\boxed{\text{On en déduit : } K \hookrightarrow \mathcal{WB}(\lambda, 2)}$$

On a montré en question ***8.a)*** :

$$K \hookrightarrow \mathcal{WB}(\lambda, 2) \ \Rightarrow\ \textit{(i)} \text{ et } \textit{(ii)} \text{ sont vérifiées}$$

On a montré en question ***8.b)*** :

$$K \hookrightarrow \mathcal{WB}(\lambda, 2) \ \Leftarrow\ \textit{(i)} \text{ et } \textit{(ii)} \text{ sont vérifiées}$$

$$\boxed{\text{Donc } K \hookrightarrow \mathcal{WB}(\lambda, 2) \text{ si et seulement si les propriétés } \textit{(i)} \text{ et } \textit{(ii)} \text{ sont vérifiées}}$$

Remarque
Cette question nécessitait de nombreuses prises d'initiative.
En particulier pour la résolution de l'équation :

$$R'(x) = 2\sqrt{\lambda}\sqrt{R(x)}$$

On remarque que cette équation relie la fonction R et sa dérivée. On appelle de telles équations des **équations différentielles d'ordre 1** (d'ordre 1 puisqu'elle fait apparaître la dérivée première). On les exprime généralement sous cette forme :

$$y'(x) = f(y(x)) + c(x) \quad \text{que l'on note plus simplement} \quad y' = f(y) + c(x)$$

où c, f et y sont trois fonctions.
On est, dans cette question, dans un cas particulier d'une équation différentielle dite de Bernoulli :

$$y'(x) = b(x)\ (y(x))^\beta \quad \text{que l'on note plus simplement} \quad y' = b(x)\ y^\beta$$

Dans notre cas, $b(x) = 2\sqrt{\lambda}$ et $\beta = \dfrac{1}{2}$.
Ce type d'équation se résout toujours de la même manière :

1) on divise l'équation par y^β (en ayant vérifié au préalable que $y^\beta(x) \neq 0$, pour tout x).
On obtient :

$$\frac{y'}{y^\beta} = b(x)$$

2) on intègre l'équation précédente entre a et x (où a est une constante à fixer). □

Dans les questions ***9.*** et ***10.***, l'entier n est supérieur ou égal à 2. On note $w_1, \ldots, w_n$ des réels strictement positifs et non tous égaux.

9. Soit φ la fonction de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$\varphi(x) = \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} (w_k)^x \, \ln(w_k)}{\sum\limits_{k=1}^{n} (w_k)^x} - \frac{1}{x}$$

a) Soit $y_1, \ldots, y_n$ des réels non tous nuls et $z_1, \ldots, z_n$ des réels quelconques.
En étudiant la fonction polynomiale du second degré Q définie sur $\mathbb{R}$ par $Q(t) = \sum\limits_{k=1}^{n} (z_k - t\, y_k)^2$, établir l'inégalité :

$$\left(\sum_{k=1}^{n} y_k \, z_k \right)^2 \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n} y_k^2 \right) \left(\sum_{k=1}^{n} z_k^2 \right)$$

Démonstration.
Soit $t \in \mathbb{R}$.

$$Q(t) = \sum_{k=1}^{n} (z_k - ty_k)^2 = \sum_{k=1}^{n} (z_k^2 - 2ty_kz_k + t^2y_k^2) = \Big(\sum_{k=1}^{n} y_k^2\Big)t^2 - 2\Big(\sum_{k=1}^{n} y_kz_k\Big)t + \sum_{k=1}^{n} z_k^2$$

La fonction Q est donc une fonction polynomiale du second degré.
De plus : $Q(t) = \sum\limits_{k=1}^{n} (z_k - ty_k)^2 \geqslant 0$.
Donc son discriminant Δ est négatif ou nul. D'où :

$$\cancel{4}\Big(\sum_{k=1}^{n} y_kz_k\Big)^2 - \cancel{4}\Big(\sum_{k=1}^{n} y_k^2\Big)\Big(\sum_{k=1}^{n} z_k^2\Big) \leqslant 0$$

$$\boxed{\text{On en déduit : } \Big(\sum_{k=1}^{n} y_kz_k\Big)^2 \leqslant \Big(\sum_{k=1}^{n} y_k^2\Big)\Big(\sum_{k=1}^{n} z_k^2\Big)}$$

□

b) Montrer que la fonction φ est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

Démonstration.

- Soit $x \in \,]0, +\infty[$.

$$\varphi(x) = \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} (w_k)^x \ln(w_k)}{\sum\limits_{k=1}^{n} (w_k)^x} - \frac{1}{x} = \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} \mathrm{e}^{x\ln(w_k)} \ln(w_k)}{\sum\limits_{k=1}^{n} \mathrm{e}^{x\ln(w_k)}} - \frac{1}{x}$$

  Or : $\forall k \in [\![1, n]\!]$, $\mathrm{e}^{x\ln(w)} > 0$.
  Donc : $\sum\limits_{k=1}^{n} \mathrm{e}^{x\ln(w_k)} > 0$.
  Ainsi la fonction φ est dérivable sur $]0, +\infty[$ en tant que somme de quotients de fonctions dérivables sur $]0, +\infty[$ dont les dénominateurs ne s'annulent pas.
  ($\forall x \in \,]0, +\infty[$, $x > 0$ et $\sum\limits_{k=1}^{n} \mathrm{e}^{x\ln(w_k)} > 0$)

- Soit $x \in \,]0,+\infty[$.

$$\begin{aligned}
\varphi'(x) &= \dfrac{\left(\sum\limits_{k=1}^{n} (\ln(w_k))^2 \mathrm{e}^{x\ln(w_k)}\right)\left(\sum\limits_{k=1}^{n} \mathrm{e}^{x\ln(w_k)}\right) - \left(\sum\limits_{k=1}^{n} \ln(w_k)\mathrm{e}^{x\ln(w_k)}\right)^2}{\left(\sum\limits_{k=1}^{n} (w_k)^x\right)^2} + \dfrac{1}{x^2} \\
&= \dfrac{\left(\sum\limits_{k=1}^{n} (\ln(w_k))^2 (w_k)^x\right)\left(\sum\limits_{k=1}^{n} (w_k)^x\right) - \left(\sum\limits_{k=1}^{n} \ln(w_k)(w_k)^x\right)^2}{\left(\sum\limits_{k=1}^{n} (w_k)^x\right)^2} + \dfrac{1}{x^2} \\
&= \dfrac{\left(\sum\limits_{k=1}^{n} \left(\ln(w_k)(w_k)^{\frac{x}{2}}\right)^2\right)\left(\sum\limits_{k=1}^{n} \left((w_k)^{\frac{x}{2}}\right)^2\right) - \left(\sum\limits_{k=1}^{n} \ln(w_k)(w_k)^{\frac{x}{2}}(w_k)^{\frac{x}{2}}\right)^2}{\left(\sum\limits_{k=1}^{n} (w_k)^x\right)^2} + \dfrac{1}{x^2}
\end{aligned}$$

- On applique alors la question ***9.a)*** avec :

$$\forall k \in [\![1,n]\!], \quad \begin{cases} y_k = \ln(w_k)(w_k)^{\frac{x}{2}} \\ z_k = (w_k)^{\frac{x}{2}} \end{cases}$$

  Les réels y_1, ..., y_n sont bien non tous nuls.
  En effet, si, pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, $y_k = 0$, alors pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, $w_k = 1$.
  Ceci n'est pas possible car w_1, ..., w_n sont non tous égaux.
  On obtient alors :

$$\left(\sum_{k=1}^{n} \ln(w_k)(w_k)^{\frac{x}{2}}(w_k)^{\frac{x}{2}}\right)^2 \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n} \left(\ln(w_k)(w_k)^{\frac{x}{2}}\right)^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n} \left((w_k)^{\frac{x}{2}}\right)^2\right)$$

  Donc :

$$\dfrac{\left(\sum\limits_{k=1}^{n} \left(\ln(w_k)(w_k)^{\frac{x}{2}}\right)^2\right)\left(\sum\limits_{k=1}^{n} \left((w_k)^{\frac{x}{2}}\right)^2\right) - \left(\sum\limits_{k=1}^{n} \ln(w_k)(w_k)^{\frac{x}{2}}(w_k)^{\frac{x}{2}}\right)^2}{\left(\sum\limits_{k=1}^{n} (w_k)^x\right)^2} \geqslant 0$$

  Or : $\dfrac{1}{x^2} > 0$. Donc : $\varphi'(x) > 0$.

$$\boxed{\text{Ainsi, la fonction } \varphi \text{ est strictement croissante sur }]0,+\infty[.}$$

□

c) On note n_0 le nombre d'entiers k_0 de $[\![1,n]\!]$ vérifiant $w_{k_0} = \max\limits_{1\leqslant k\leqslant n} (w_k)$.
Montrer que $1 \leqslant n_0 \leqslant n-1$.

Démonstration.

- La famille de réels $(w_1,\dots,w_n)$ est finie. Donc elle admet un maximum. Ainsi : $n_0 \geqslant 1$.
- D'après l'énoncé, w_1, ..., w_n sont non tous égaux. Donc au moins l'un de ces réels ne réalise pas le maximum. Ainsi : $n_0 \leqslant n-1$.

$$\boxed{\text{Finalement : } 1 \leqslant n_0 \leqslant n-1.}$$

□

d) Donner un équivalent de $\sum\limits_{k=1}^{n} (w_k)^x$ en fonction de n_0 et w_{k_0}, lorsque x tend vers $+\infty$.

Démonstration.

- On note I_0 l'ensemble des entiers naturels k vérifiant : $w_k = w_{k_0} = \max\limits_{1 \leqslant k \leqslant n} (w_k)$.
  Autrement dit :
$$I_0 = \{k \in [\![1, n]\!] \ / \ w_k = w_{k_0}\}$$
  (par définition de I_0 : $\mathrm{Card}(I_0) = n_0$*)*
- Soit $x \in \,]0, +\infty[$.
$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n} (w_k)^x &= \sum_{k \in I_0} (w_k)^x + \sum_{k \notin I_0} (w_k)^x \\ &= \sum_{k \in I_0} (w_{k_0})^x + \sum_{k \notin I_0} (w_k)^x \\ &= n_0 (w_{k_0})^x + \sum_{k \notin I_0} (w_k)^x \end{aligned}$$
  On obtient alors :
$$\frac{\sum\limits_{k=1}^{n} (w_k)^x}{n_0 (w_{k_0})^x} = 1 + \frac{\sum\limits_{k \notin I_0} (w_k)^x}{n_0 (w_{k_0})^x} = 1 + \frac{1}{n_0} \sum_{k \notin I_0} \left(\frac{w_k}{w_{k_0}} \right)^x$$
- Or, si $k \notin I_0$, alors : $0 < w_k < w_{k_0} = \max\limits_{1 \leqslant k \leqslant n} (w_k)$.
  Donc : $0 < \dfrac{w_k}{w_{k_0}} < 1$.
  D'où : $\forall k \notin I_0,\ \lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{w_k}{w_{k_0}} \right)^x = 0$.
  Ainsi : $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sum\limits_{k=1}^{n} (w_k)^x}{n_0 (w_{k_0})^x} = 1$.

$$\boxed{\text{On en déduit : } \sum_{k=1}^{n} (w_k)^x \underset{x \to +\infty}{\sim} n_0 (w_{k_0})^w.}$$

□

e) Calculer en fonction de w_{k_0}, la limite de $\varphi(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.
(on distinguera les deux cas $w_{k_0} = 1$ et $w_{k_0} \neq 1$).

Démonstration.

- Si $w_{k_0} = 1$.
  - × D'après la question précédente : $\sum\limits_{k=1}^{n} (w_k)^x \underset{x \to +\infty}{\sim} n_0$. Donc : $\lim\limits_{x \to +\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} (w_k)^x = n_0$.
  - × On calcule :
$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n} \ln(w_k)(w_k)^x &= \sum_{k \in I_0} \ln(w_k)(w_k)^x + \sum_{k \notin I_0} \ln(w_k)(w_k)^x \\ &= n_0 \ln(w_{k_0})(w_{k_0})^x + \sum_{k \notin I_0} \ln(w_k)(w_k)^x \\ &= \sum_{k \notin I_0} \ln(w_k)(w_k)^x \qquad \textit{(car } w_{k_0} = 1, \textit{ donc } \ln(w_{k_0}) = 0\textit{)} \end{aligned}$$

Or, par définition de I_0 :
$$\forall k \notin I_0,\ 0 < w_k < w_{k_0} = 1$$
Donc : $\forall k \notin I_0,\ \lim\limits_{x \to +\infty} (w_k)^x = 0$.
D'où :
$$\lim_{x \to +\infty} \sum_{k=1}^{n} \ln(w_k)(w_k)^x = \lim_{x \to +\infty} \sum_{k \notin I_0} \ln(w_k)(w_k)^x = 0$$
Ainsi : $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sum\limits_{k=1}^{n} \ln(w_k)(w_k)^x}{\sum\limits_{k=1}^{n} (w_k)^x} = \dfrac{0}{n_0} = 0$.

× De plus : $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x} = 0$.

Ainsi, si $w_{k_0} = 1$: $\lim\limits_{x \to +\infty} \varphi(x) = 0 = \ln(w_{k_0})$.

- Si $w_{k_0} \neq 1$.
Avec le même raisonnement qu'à la question précédente, on obtient :
$$\sum_{k=1}^{n} \ln(w_k)(w_k)^x \underset{x \to +\infty}{\sim} n_0 \ln(w_{k_0})(w_{k_0})^x$$
Donc :
$$\frac{\sum\limits_{k=1}^{n} \ln(w_k)(w_k)^x}{\sum\limits_{k=1}^{n} (w_k)^x} \underset{x \to +\infty}{\sim} \frac{\cancel{n_0} \cancel{(w_{k_0})^x} \ln(w_{k_0})}{\cancel{n_0} \cancel{(w_{k_0})^x}} = \ln(w_{k_0})$$
D'où :
$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} \ln(w_k)(w_k)^x}{\sum\limits_{k=1}^{n} (w_k)^x} = \ln(w_{k_0})$$
Or : $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x} = 0$.
Ainsi, si $w_{k_0} \neq 1$: $\lim\limits_{x \to +\infty} \varphi(x) = \ln(w_{k_0})$.

$$\boxed{\text{Finalement : } \lim_{x \to +\infty} \varphi(x) = \ln(w_{k_0}).}$$

□

f) En déduire que sur $\mathbb{R}_+^*$ l'équation $\varphi(x) = \dfrac{1}{n} \sum\limits_{k=1}^{n} \ln(w_k)$ admet une unique solution.

Démonstration.

- La fonction φ est :
  × continue sur $]0, +\infty[$ (car dérivable sur $]0, +\infty[$ d'après la question ***9.b)***)
  × strictement croissante sur $]0, +\infty[$ (toujours d'après la question ***9.b)***)

  Ainsi, φ réalise une bijection de $]0, +\infty[$ dans $\varphi(]0, +\infty[)$.
$$\varphi(]0, +\infty[) = \left] \lim_{x \to 0^+} \varphi(x), \lim_{x \to +\infty} \varphi(x) \right[=]-\infty, \ln(w_{k_0})[$$

- Détaillons le calcul de $\lim\limits_{x \to 0^+} \varphi(x)$.
  Tout d'abord : $\lim\limits_{x \to 0^+} (w_k)^x = 1$.
  Donc :
  $$\lim_{x \to 0^+} \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} \ln(w_k)(w_k)^x}{\sum\limits_{k=1}^{n} (w_k)^x} = \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} \ln(w_k)}{n}$$
  De plus : $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{1}{x} = +\infty$.
  Finalement, on a donc bien : $\lim\limits_{x \to 0^+} \varphi(x) = -\infty$.

- Montrons maintenant que $\dfrac{1}{n} \sum\limits_{k=1}^{n} \ln(w_k) \in]-\infty, \ln(w_{k_0})[$.
  Tout d'abord :
  × pour tout $k \notin I_0$: $w_k < w_{k_0}$, donc $\ln(w_k) < \ln(w_{k_0})$ (car la fonction $x \mapsto \ln(x)$ est strictement croissante sur $]0, +\infty[$).
  D'où : $\sum\limits_{k \notin I_0} \ln(w_k) < \sum\limits_{k \notin I_0} \ln(w_{k_0})$.
  × pour tout $k \in I_0$: $w_k = w_{k_0}$, donc $\ln(w_k) = \ln(w_{k_0})$.
  D'où : $\sum\limits_{k \in I_0} \ln(w_k) = \sum\limits_{k \in I_0} \ln(w_{k_0})$.

  D'où :
  $$\begin{array}{ccc} \sum\limits_{k \in I_0} \ln(w_k) + \sum\limits_{k \notin I_0} \ln(w_k) & < & \sum\limits_{k \in I_0} \ln(w_{k_0}) + \sum\limits_{k \notin I_0} \ln(w_{k_0}) \\ \shortparallel & & \shortparallel \\ \sum\limits_{k=1}^{n} \ln(w_k) & & \sum\limits_{k=1}^{n} \ln(w_{k_0}) \ = \ n \ln(w_{k_0}) \end{array}$$
  Ainsi :
  $$\sum_{k=1}^{n} \ln(w_k) < n \ln(w_{k_0})$$
  On en déduit :
  $$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \ln(w_k) < \frac{1}{\cancel{n}} \cancel{n} \ln(w_{k_0}) = \ln(w_{k_0})$$
  On a donc bien : $\dfrac{1}{n} \sum\limits_{k=1}^{n} \ln(w_k) \in]-\infty, \ln(w_{k_0})[$.

$$\boxed{\text{Ainsi l'équation } \varphi(x) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \ln(w_k) \text{ admet une unique solution sur }]0, +\infty[, \text{ que l'on notera } \hat{\alpha}.}$$

□

10. On note $(W_1, \ldots, W_n)$ un n-échantillon de variables aléatoires à valeurs strictement positives, indépendantes et de même loi $\mathcal{WB}(\lambda, \alpha)$ définie dans la question ***7.*** dont une réalisation est le n-uplet $(w_1, \ldots, w_n)$.
On suppose que les paramètres λ et α sont inconnus.
Soit G la fonction de $(\mathbb{R}_+^*)^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par $G(\lambda, \alpha) = \ln\left(\prod_{k=1}^{n} f_{(\lambda,\alpha)}(w_k)\right)$.

a) Montrer que la fonction G admet un unique point critique $(\hat{\lambda}, \hat{\alpha})$ sur $(\mathbb{R}_+^*)^2$.

Démonstration.

- Déterminons une expression explicite de G.
Soit $(\lambda, \alpha) \in \,]0, +\infty[^2$.

$$\begin{array}{rcl} G(\lambda,\alpha) & = & \ln\left(\prod\limits_{k=1}^{n} f_{(\lambda,\alpha)}(w_k)\right) \\ & = & \sum\limits_{k=1}^{n} \ln\left(f_{(\lambda,\alpha)}(w_k)\right) \\ & = & \sum\limits_{k=1}^{n} \ln\left(\lambda\alpha(w_k)^{\alpha-1}\mathrm{e}^{-\lambda(w_k)^\alpha}\right) \\ & = & \sum\limits_{k=1}^{n} \left(\ln(\lambda) + \ln(\alpha) + (\alpha-1)\ln(w_k) + \ln(\mathrm{e}^{-\lambda(w_k)^\alpha})\right) \\ & = & \sum\limits_{k=1}^{n} \ln(\lambda) + \sum\limits_{k=1}^{n} \ln(\alpha) + (\alpha-1)\sum\limits_{k=1}^{n} \ln(w_k) - \lambda\sum\limits_{k=1}^{n} (w_k)^\alpha \\ & = & n\ln(\lambda) + n\ln(\alpha) + (\alpha-1)\Big(\sum\limits_{k=1}^{n} \ln(w_k)\Big) - \lambda\Big(\sum\limits_{k=1}^{n} (w_k)^\alpha\Big) \end{array}$$

- Montrons que la fonction G est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0, +\infty[^2$.
La fonction $(\lambda, \alpha) \mapsto \ln(\lambda)$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0, +\infty[^2$ en tant que composée $h_2 \circ h_1$ de :
  - × $h_1 : (\lambda, \alpha) \mapsto \lambda$ de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0, +\infty[^2$ en tant que fonction polynomiale,
  et $h_1(]0, +\infty[^2) \subset \,]0, +\infty[$,
  - × $h_2 : u \mapsto \ln(u)$ de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0, +\infty[$.

  De même, la fonction $(\lambda, \alpha) \mapsto \ln(\alpha)$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0, +\infty[^2$.
De plus, la fonction $(\lambda, \alpha) \mapsto (\alpha-1)\Big(\sum\limits_{k=1}^{n} \ln(w_k)\Big) - \lambda\Big(\sum\limits_{k=1}^{n} (w_k)^\alpha\Big)$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0, +\infty[^2$ en tant que fonction polynomiale.

La fonction G est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0, +\infty[^2$ en tant que combinaison linéaire de fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0, +\infty[^2$.

- Soit $(\lambda, \alpha) \in \,]0, +\infty[^2$.

$$\partial_1(G)(\lambda, \alpha) = \frac{n}{\lambda} - \sum_{k=1}^{n} (w_k)^\alpha$$

$$\partial_2(G)(\lambda, \alpha) = \frac{n}{\alpha} + \sum_{k=1}^{n} \ln(w_k) - \lambda\sum_{k=1}^{n} \ln(w_k)(w_k)^\alpha$$

- Soit $(\lambda, \alpha) \in]0, +\infty[^2$.
  Le point (λ, α) est un point critique de G si et seulement si : $\nabla(G)(\lambda, \alpha) = 0_{\mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{R})}$.

$$\begin{array}{cl} & \nabla(G)(\lambda, \alpha) = 0_{\mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{R})} \\ \Leftrightarrow & \left\{ \begin{array}{rcl} \partial_1(G)(\lambda, \alpha) & = & 0 \\ \partial_2(G)(\lambda, \alpha) & = & 0 \end{array} \right. \\ \Leftrightarrow & \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{n}{\lambda} - \sum\limits_{k=1}^{n} (w_k)^\alpha \ = \ 0 \\ \dfrac{n}{\alpha} + \sum\limits_{k=1}^{n} \ln(w_k) - \lambda \sum\limits_{k=1}^{n} \ln(w_k)(w_k)^\alpha \ = \ 0 \end{array} \right. \\ \Leftrightarrow & \left\{ \begin{array}{l} \lambda \ = \ \dfrac{n}{\sum\limits_{k=1}^{n} (w_k)^\alpha} \\ \dfrac{n}{\alpha} + \sum\limits_{k=1}^{n} \ln(w_k) - \lambda \sum\limits_{k=1}^{n} \ln(w_k)(w_k)^\alpha \ = \ 0 \end{array} \right. \\ \Leftrightarrow & \left\{ \begin{array}{l} \lambda \ = \ \dfrac{n}{\sum\limits_{k=1}^{n} (w_k)^\alpha} \\ \dfrac{n}{\alpha} + \sum\limits_{k=1}^{n} \ln(w_k) - n \, \dfrac{\sum\limits_{k=1}^{n} \ln(w_k)(w_k)^\alpha}{\sum\limits_{k=1}^{n} (w_k)^\alpha} \ = \ 0 \end{array} \right. \end{array}$$

Or :

$$\begin{array}{cl} & \dfrac{n}{\alpha} + \sum\limits_{k=1}^{n} \ln(w_k) - n \, \dfrac{\sum\limits_{k=1}^{n} \ln(w_k)(w_k)^\alpha}{\sum\limits_{k=1}^{n} (w_k)^\alpha} \ = \ 0 \\ \Leftrightarrow & n \, \dfrac{\sum\limits_{k=1}^{n} \ln(w_k)(w_k)^\alpha}{\sum\limits_{k=1}^{n} (w_k)^\alpha} - \dfrac{n}{\alpha} = \sum\limits_{k=1}^{n} \ln(w_k) \\ \Leftrightarrow & \dfrac{\sum\limits_{k=1}^{n} \ln(w_k)(w_k)^\alpha}{\sum\limits_{k=1}^{n} (w_k)^\alpha} - \dfrac{1}{\alpha} = \dfrac{1}{n} \sum\limits_{k=1}^{n} \ln(w_k) \\ \Leftrightarrow & \varphi(\alpha) = \dfrac{1}{n} \sum\limits_{k=1}^{n} \ln(w_k) \end{array}$$

Or, d'après la question ***9.f***, $\hat{\alpha}$ est l'unique solution sur $]0, +\infty[$ de l'équation $\varphi(\alpha) = \dfrac{1}{n} \sum\limits_{k=1}^{n} \ln(w_k)$.
Donc :

$$\varphi(\alpha) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \ln(w_k) \quad \Leftrightarrow \quad \alpha = \hat{\alpha}$$

On obtient donc :

$$\nabla(G)(\lambda,\alpha) = 0_{\mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{R})} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} \lambda & = & \dfrac{n}{\sum\limits_{k=1}^{n} (w_k)^{\alpha}} \\ \alpha & = & \hat{\alpha} \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} \lambda & = & \dfrac{n}{\sum\limits_{k=1}^{n} (w_k)^{\hat{\alpha}}} = \hat{\lambda} \\ \alpha & = & \hat{\alpha} \end{array} \right.$$

$$\boxed{\text{Finalement, la fonction } G \text{ admet un unique point critique } (\hat{\lambda},\hat{\alpha}) \text{ sur } (\mathbb{R}_+^*)^2.}$$

□

b) Montrer que la fonction G admet un maximum local au point $(\hat{\lambda},\hat{\alpha})$.

Démonstration.

- Soit $(\lambda,\alpha) \in \,]0,+\infty[^2$.

$$\partial^2_{1,1}(G)(\lambda,\alpha) = -\frac{n}{\lambda^2}$$

$$\partial^2_{1,2}(G)(\lambda,\alpha) = -\sum_{k=1}^{n} \ln(w_k)(w_k)^{\alpha}$$

Or, G est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0,+\infty[^2$, donc, d'après le théorème de Schwarz :

$$\partial^2_{2,1}(G)(\lambda,\alpha) = -\sum_{k=1}^{n} \ln(w_k)(w_k)^{\alpha}$$

Enfin :

$$\partial^2_{2,2}(G)(\lambda,\alpha) = -\frac{n}{\alpha^2} - \lambda \sum_{k=1}^{n} (\ln(w_k))^2(w_k)^{\alpha}$$

- On en déduit :

$$\partial^2_{1,1}(G)(\hat{\lambda},\hat{\alpha}) = -\frac{n}{\hat{\lambda}^2} = -\frac{\left(\sum\limits_{k=1}^{n} (w_k)^{\hat{\alpha}}\right)^2}{n}$$

»»

- Notons alors : $A = \nabla^2(G)(\hat{\lambda},\hat{\alpha})$. D'après le théorème de Schwarz, la matrice A est symétrique réelle et donc diagonalisable.
  On en conclut qu'il existe $P \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ inversible tel que :

$$\nabla^2(G)(\hat{\lambda},\hat{\alpha}) \;=\; P\begin{pmatrix} \mu_1 & 0 \\ 0 & \mu_2 \end{pmatrix}P^{-1}$$

(où μ_1 et μ_2 sont les valeurs propres - pas forcément distinctes - de A)
Dans la suite, on adopte les notations de Monge, à savoir :

$$A = \nabla^2(G)(\hat{\lambda},\hat{\alpha}) \;=\; \begin{pmatrix} r & t \\ t & s \end{pmatrix}$$

- Remarquons :

$$\begin{array}{rcl} \mu \text{ valeur propre de } A & \Leftrightarrow & A - \mu\, I_2 \text{ non inversible} \\ & \Leftrightarrow & \det\big(A - \mu\, I_2\big) = 0 \\ & \Leftrightarrow & \det\left(\begin{pmatrix} r-\mu & t \\ t & s-\mu \end{pmatrix}\right) = 0 \\ & \Leftrightarrow & (r-\mu)\,(t-\mu) - s^2 = 0 \\ & \Leftrightarrow & \mu^2 - (r+t)\,\mu + (rt - s^2) = 0 \\ & \Leftrightarrow & \begin{array}{l} \mu \text{ est racine du polynôme} \\ Q(X) = X^2 - (r+t)\,X + (rt-s^2) \end{array} \end{array}$$

- Comme μ_1 et μ_2 sont valeurs propres (pas forcément distinctes) de A, alors elles sont racines de P. Précisons que P ne peut admettre d'autre racine (sinon A aurait une valeur propre différente de μ_1 et μ_2). On en déduit que Q est facteur de $(X-\mu_1)$ et $(X-\mu_2)$. Enfin, comme Q est unitaire :
$$\begin{aligned} Q(X) &= (X-\mu_1)\,(X-\mu_2) \\ &= X^2 - (\mu_1+\mu_2)\,X + \mu_1\,\mu_2 \end{aligned}$$
- On en déduit, par identification :
$$\left\{ \begin{array}{rcl} r+t &=& \mu_1+\mu_2 \\ rt-s^2 &=& \mu_1\,\mu_2 \end{array} \right.$$
- Déterminons alors le signe de $\mu_1\,\mu_2$. On a :
$$\begin{aligned} \mu_1\,\mu_2 &= rt-s^2 \ = \ \det\Big(\nabla^2(G)(\hat{\lambda},\hat{\alpha})\Big) \\ &= \frac{\Big(\sum\limits_{k=1}^{n} (w_k)^{\hat{\alpha}}\Big)^2}{n} \left(\frac{n}{\hat{\alpha}^2} + \frac{n}{\Big(\sum\limits_{k=1}^{n} (w_k)^{\hat{\alpha}}\Big)^2} \sum_{k=1}^{n} (\ln(w_k))^2 (w_k)^{\hat{\alpha}} \right) - \Big(\sum_{k=1}^{n} \ln(w_k)(w_k)^{\hat{\alpha}}\Big)^2 \\ &= \left(\frac{\sum\limits_{k=1}^{n} (w_k)^{\hat{\alpha}}}{\hat{\alpha}} \right)^2 + \Big(\sum_{k=1}^{n} (w_k)^{\hat{\alpha}}\Big)\Big(\sum_{k=1}^{n} (\ln(w_k))^2 (w_k)^{\hat{\alpha}}\Big) - \Big(\sum_{k=1}^{n} \ln(w_k)(w_k)^{\hat{\alpha}}\Big)^2 \end{aligned}$$
On applique la question ***9.a)*** (en procédant comme dans la question ***9.b)***), avec :
$$\forall k \in [\![1,N]\!], \left\{ \begin{array}{rcl} y_k &=& \ln(w_k)(w_k)^{\frac{\hat{\alpha}}{2}} \\ z_k &=& (w_k)^{\frac{\hat{\alpha}}{2}} \end{array} \right.$$
On obtient alors :
$$\Big(\sum_{k=1}^{n} \ln(w_k)(w_k)^{\hat{\alpha}}\Big)^2 \leqslant \Big(\sum_{k=1}^{n} (w_k)^{\hat{\alpha}}\Big)\Big(\sum_{k=1}^{n} (\ln(w_k))^2 (w_k)^{\hat{\alpha}}\Big)$$
Comme de plus :
$$\left(\frac{\sum\limits_{k=1}^{n} (w_k)^{\hat{\alpha}}}{\hat{\alpha}} \right)^2 > 0$$
on en déduit : $rt-s^2 > 0$.

Ainsi, $\mu_1\,\mu_2 > 0$. Les valeurs propres de A sont donc non nulles et de même signe. On en conclut que G admet un extremum local au point $(\hat{\lambda},\hat{\alpha})$.

- Il reste à déterminer le signe de ces valeurs propres μ_1 et μ_2.
  Remarquons :
  $$rt \ = \ \mu_1 \, \mu_2 + s^2 \ > \ 0$$
  Ainsi, r et t sont aussi deux quantités non nulles et de même signe. Or :
  $$r \ = \ \partial^2_{1,1}(G)(\hat{\lambda}, \hat{\alpha}) = -\frac{n}{\hat{\lambda}^2} < 0$$
  Enfin :
  $$\mu_1 + \mu_2 \ = \ r + t < 0$$
  Comme μ_1 et μ_2 sont de même signe, on en déduit $\mu_1 < 0$ et $\mu_2 < 0$.

En résumé, la fonction G est de classe $\mathcal{C}^2$ sur l'ouvert $]0, +\infty[^2$. Elle admet le point critique $(\hat{\lambda}, \hat{\alpha})$ sur cet ensemble. De plus, les valeurs propres μ_1 et μ_2 de la matrice $A = \nabla^2(G)(\hat{\lambda}, \hat{\alpha})$ sont non nulles et toutes les deux négatives. On en déduit que G admet un maximum local au point $(\hat{\lambda}, \hat{\alpha})$.

Remarque
La démonstration consiste à redémontrer un théorème classique mais hors programme en voie ECE, dont l'énoncé est le suivant.

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie sur un ouvert $D \subset \mathbb{R}^2$.

Soit $(x_0, y_0) \in D$ un point critique de f.

Notons :

$$\Delta \ = \ \partial^2_{1,1}(f)(x_0, y_0) \times \partial^2_{2,2}(f)(x_0, y_0) \ - \ \left(\partial^2_{1,2}(f)(x_0, y_0)\right)^2 \ = \ \det\left(\nabla^2(f)(x_0, y_0)\right)$$

1. Si $\Delta < 0$ alors f n'admet pas d'extremum local au point (x_0, y_0).
(car dans ce cas les valeurs propres de $\nabla^2(f)(x_0, y_0)$ sont non nulles et de signe opposé)

2. Si $\Delta > 0$ alors f admet un extremum local au point (x_0, y_0).
(car dans ce cas les valeurs propres de $\nabla^2(f)(x_0, y_0)$ sont non nulles et de même signe)

  a) Si $\partial^2_{1,1}(f)(x_0, y_0) < 0$, c'est un maximum.
  (car les valeurs propres de $\nabla^2(f)(x_0, y_0)$ sont non nulles et négatives)

  b) Si $\partial^2_{1,1}(f)(x_0, y_0) > 0$, c'est un minimum.
  (car les valeurs propres de $\nabla^2(f)(x_0, y_0)$ sont non nulles et positives)

3. Si $\Delta = 0$, on ne peut pas conclure.
(l'une des deux valeurs propres est nulle) □