DS8 (version A)

Exercice 1

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique $\mathscr{B}$ de $\mathbb{R}^3$ est :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 10 & 7 \\ 1 & 4 & 3 \\ -2 & -8 & -6 \end{pmatrix}$$

On note I la matrice unité et O la matrice nulle de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ et on pose $u = (2, 1, -2)$.

1. ***a)*** Montrer que $\text{Ker}(f) = \text{Vect}\,(u)$.

b) La matrice A est-elle inversible ?

2. ***a)*** Déterminer le vecteur v de $\mathbb{R}^3$ dont la $2^{\text{ème}}$ coordonnée dans $\mathscr{B}$ vaut 1, et tel que $f(v) = u$.

b) Démontrer que le vecteur w de $\mathbb{R}^3$, dont la $2^{\text{ème}}$ coordonnée dans $\mathscr{B}$ vaut 1, et qui vérifie $f(w) = v$ est $w = (0, 1, -1)$.

c) Montrer que (u, v, w) est une base de $\mathbb{R}^3$ que l'on notera $\mathscr{B}'$. On note P la matrice de passage de la base $\mathscr{B}$ à la base $\mathscr{B}'$.

3. ***a)*** Écrire la matrice N de f relativement à la base $\mathscr{B}'$. En déduire la seule valeur propre de f. L'endomorphisme f est-il diagonalisable ?

b) Donner la relation liant les matrices A, N, P et P^{-1}, puis en déduire que, pour tout entier k supérieur ou égal à 3, on a : $A^k = O$.

4. On note C_N (respectivement C_A) l'ensemble des matrices de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ qui commutent avec N (respectivement A),

a) Montrer que C_N est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ et que $C_N = \text{Vect}\,\big(I, N, N^2\big)$.
On admet que C_A est aussi un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.

b) Établir que : $M \in C_A \;\Leftrightarrow\; P^{-1}MP \in C_N$.
En déduire que $C_A = \text{Vect}\,\big(I, A, A^2\big)$. Quelle est la dimension de C_A ?

Exercice 2

On considère la fonction f définie par :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2(1-x)^2} & \text{si } x \in \left[0, \dfrac{1}{2}\right[\\[2ex] \dfrac{1}{2x^2} & \text{si } x \in \left[\dfrac{1}{2}, 1\right[\\[2ex] 0 & \text{si } x \in \mathbb{R} \setminus [0, 1[\end{cases}$$

1. Montrer que f peut être considérée comme une densité de probabilité.
Dans toute la suite, on considère une variable aléatoire X définie sur un certain espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ et admettant la fonction f pour densité.

2. Déterminer la fonction de répartition F de X.

3. Montrer que X a une espérance et que celle-ci vaut $\dfrac{1}{2}$.

4. ***a)*** Déterminer $\mathbb{E}((X-1)^2)$.

b) En déduire que X a une variance et que $\mathbb{V}(X) = \dfrac{3}{4} - \ln(2)$.

5. On appelle variable indicatrice d'un évènement A, la variable de Bernoulli qui vaut 1 si A est réalisé et 0 sinon. On considère maintenant la variable aléatoire Y, indicatrice de l'évènement $\left[X \leqslant \dfrac{1}{2}\right]$ et la variable aléatoire Z, indicatrice de l'évènement $\left[X > \dfrac{1}{2}\right]$.

a) Préciser la relation liant Y et Z puis établir sans calcul que le coefficient de corrélation linéaire de Y et Z, noté $\rho(Y,Z)$, est égal à -1.

b) En déduire la valeur de la covariance de Y et Z.

Exercice 3

On considère l'application $f : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ définie, pour tout t de $[0,+\infty[$, par :

$$f(t) = \begin{cases} t^2 - t\ln(t) & \text{si } t \neq 0 \\ 0 & \text{si } t = 0 \end{cases}$$

On admet : $0,69 < \ln(2) < 0,70$.

PARTIE I : Étude de la fonction f

1. Montrer que f est continue sur $[0,+\infty[$.

2. Justifier que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0,+\infty[$ et calculer, pour tout t de $]0,+\infty[$, $f'(t)$ et $f''(t)$.

3. Dresser le tableau des variations de f. On précisera la limite de f en $+\infty$.

4. Montrer que l'équation $f(t) = 1$, d'inconnue $t \in [0,+\infty[$, admet une solution et une seule et que celle-ci est égale à 1.

PARTIE II : Étude d'une fonction F de deux variables réelles

On considère l'application $F :]0,+\infty[^2 \to \mathbb{R}$ définie, pour tout (x,y) de $]0,+\infty[^2$, par :

$$F(x,y) = x\ln(y) - y\ln(x)$$

5. Démontrer que F est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0,+\infty[^2$.

6. Calculer les dérivées partielles premières de F en tout (x,y) de $]0,+\infty[^2$.

7. ***a)*** Soit $(x,y) \in]0,+\infty[^2$. Montrer que (x,y) est un point critique de F si et seulement si :

$$x > 1, \quad y = \frac{x}{\ln(x)} \quad \text{et} \quad f(\ln(x)) = 1$$

b) Établir que F admet un point critique et un seul et qu'il s'agit de (e,e).

8. La fonction F admet-elle un extremum local en (e,e) ?

Exercice 4

Soit f la fonction définie pour tout couple (x, y) de $\mathbb{R}^2$ par : $f(x, y) = 2x^2 + 2y^2 + 2xy - x - y$.

1. ***a)*** Calculer les dérivées partielles premières de f.

b) En déduire que le seul point critique de f est $A = \left(\frac{1}{6}, \frac{1}{6}\right)$.

2. ***a)*** Calculer les dérivées partielles secondes de f.

b) Montrer que f présente un minimum local en A et donner la valeur m de ce minimum.

3. ***a)*** Développer $2\left(x + \frac{y}{2} - \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{3}{2}\left(y - \frac{1}{6}\right)^2$.

b) En déduire que m est le minimum global de f sur $\mathbb{R}^2$.

4. On considère la fonction g définie pour tout couple (x, y) de $\mathbb{R}^2$, par :

$$g(x, y) = 2\mathrm{e}^{2x} + 2\mathrm{e}^{2y} + 2\mathrm{e}^{x+y} - \mathrm{e}^x - \mathrm{e}^y$$

a) Utiliser la question ***3.*** pour établir que : $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad g(x, y) \geqslant -\frac{1}{6}$.

b) En déduire que g possède un minimum global sur $\mathbb{R}^2$ et préciser en quel point ce minimum est atteint.

Exercice 5

PARTIE I : Étude d'une variable aléatoire

On considère l'application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie, pour tout t de $\mathbb{R}$, par : $f(t) = \dfrac{\mathrm{e}^{-t}}{(1+\mathrm{e}^{-t})^2}$.

1. Vérifier que la fonction f est paire.

2. Montrer que f est une densité d'une variable aléatoire réelle.

Dans toute la suite de l'exercice, on considère une variable aléatoire réelle X à densité, de densité f.

3. Déterminer la fonction de répartition de X.

4. ***a)*** Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} t\, f(t)\; dt$ converge.

b) En utilisant l'imparité de la fonction $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $t \mapsto t\, f(t)$, montrer que X admet une espérance et que l'on a : $\mathbb{E}(X) = 0$.

PARTIE II. Étude d'une autre variable aléatoire

On considère l'application $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie, pour tout x de $\mathbb{R}$, par : $\varphi(x) = \ln(1+\mathrm{e}^x)$.

5. Montrer que φ est une bijection de $\mathbb{R}$ sur un intervalle I à préciser.

6. Exprimer, pour tout y de I, $\varphi^{-1}(y)$.

On considère la variable aléatoire réelle Y définie par : $Y = \varphi(X)$.

7. Justifier : $\mathbb{P}([Y \leqslant 0]) = 0$.

8. Déterminer la fonction de répartition de Y.

9. Reconnaître alors la loi de Y et donner, sans calcul, son espérance et sa variance.

PARTIE III : Étude d'une convergence en loi

On considère une suite de variables aléatoires réelles $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, mutuellement indépendantes, de même densité f, où f a été définie dans la partie I.
On pose, pour tout n de $\mathbb{N}^*$: $T_n = \max(X_1, \ldots, X_n)$ et $U_n = T_n - \ln(n)$.

10. ***a)*** Déterminer, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, la fonction de répartition de T_n.

b) En déduire : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad \mathbb{P}([U_n \leqslant x]) = \left(1 + \dfrac{\mathrm{e}^{-x}}{n}\right)^{-n}$.

11. En déduire que la suite de variables aléatoires $(U_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en loi vers une variable aléatoire réelle à densité dont on précisera la fonction de répartition et une densité.