DS8 (version A)

Exercice 1 (EDHEC 2006)

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique $\mathscr{B}$ de $\mathbb{R}^3$ est : $A = \begin{pmatrix} 2 & 10 & 7 \\ 1 & 4 & 3 \\ -2 & -8 & -6 \end{pmatrix}$.

On note I la matrice unité et O la matrice nulle de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ et on pose $u = (2, 1, -2)$.

1. a) Montrer que $\text{Ker}(f) = \text{Vect}(u)$.

Démonstration.

- Soit $v = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Notons $V = \text{Mat}_{\mathscr{B}}(v) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

$$\begin{array}{rcl}
v \in \text{Ker}(f) & \iff & f(v) = 0_{\mathbb{R}^3} \\
& \iff & A\,V = 0_{\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})} \\
& \iff & \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} 2\,x & + & 10\,y & + & 7\,z & = & 0 \\ x & + & 4\,y & + & 3\,z & = & 0 \\ -2\,x & - & 8\,y & - & 6\,z & = & 0 \end{array} \right. \\
& \underset{L_3 \leftarrow L_3 - L_1}{\overset{L_2 \leftarrow 2\,L_2 - L_1}{\iff}} & \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} 2\,x & + & 10\,y & + & 7\,z & = & 0 \\ & - & 2\,y & - & z & = & 0 \\ & & 2\,y & + & z & = & 0 \end{array} \right. \\
& \iff & \left\{ \begin{array}{rcrcl} 2\,x & + & 10\,y & = & -7\,z \\ & - & 2\,y & = & z \end{array} \right. \\
& \overset{L_1 \leftarrow L_1 + 5\,L_2}{\iff} & \left\{ \begin{array}{rcrcl} 2\,x & & & = & -2\,z \\ & - & 2\,y & = & z \end{array} \right.
\end{array}$$

- On en déduit :

$$\begin{array}{rcl}
\text{Ker}(f) & = & \{v = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid f(v) = 0_{\mathbb{R}^3}\} \\
& = & \{v = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = -z \ \texttt{ET} \ y = -\frac{1}{2}\,z\} \\
& = & \{(-z, -\frac{1}{2}\,z, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z \in \mathbb{R}\} \\
& = & \{z \cdot (-1, -\frac{1}{2}, 1) \in \mathbb{R}^3 \mid z \in \mathbb{R}\} \\
& = & \text{Vect}\left((-1, -\frac{1}{2}, 1)\right) \ = \ \text{Vect}\left((2, 1, -2)\right)
\end{array}$$

$$\boxed{\text{On a bien : } \text{Ker}(f) = \text{Vect}(u).}$$

□

b) La matrice A est-elle inversible ?

Démonstration.
D'après la question précédente : $\text{Ker}(f) = \text{Vect}(u) \neq \{0_{\mathbb{R}^3}\}$.
On en déduit que f n'est pas injective. Elle n'est donc pas bijective.

$$\boxed{\text{On en conclut que } A\text{, matrice représentative de } f \text{ dans la base } \mathscr{B}\text{, n'est pas inversible.}}$$

□

2. a) Déterminer le vecteur v de $\mathbb{R}^3$ dont la $2^{\text{ème}}$ coordonnée dans $\mathscr{B}$ vaut 1, et tel que $f(v) = u$.

Démonstration.
Soit $v = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Notons $V = \text{Mat}_{\mathscr{B}}(v) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $U = \text{Mat}_{\mathscr{B}}(u) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$.

On cherche un vecteur v dont la $2^{\text{ème}}$ coordonnée vaut 1. On considère donc : $y = 1$.

$$\begin{array}{cl}
 & f(v) = u \\
\Longleftrightarrow & A\,V = U \\
\Longleftrightarrow & \left\{\begin{array}{rcrcrcr} 2\,x & + & 10\,y & + & 7\,z & = & 2 \\ x & + & 4\,y & + & 3\,z & = & 1 \\ -2\,x & - & 8\,y & - & 6\,z & = & -2 \end{array}\right. \\
\underset{L_3 \leftarrow L_3 - L_1}{\overset{L_2 \leftarrow 2\,L_2 - L_1}{\Longleftrightarrow}} & \left\{\begin{array}{rcrcrcr} 2\,x & + & 10\,y & + & 7\,z & = & 2 \\ & - & 2\,y & - & z & = & 0 \\ & & 2\,y & + & z & = & 0 \end{array}\right. \\
\Longleftrightarrow & \left\{\begin{array}{rcrcrcr} 2\,x & + & 10\,y & + & 7\,z & = & 2 \\ & - & 2\,y & - & z & = & 0 \end{array}\right. \\
\Longleftrightarrow & \left\{\begin{array}{rcrcr} 2\,x & + & 7\,z & = & -8 \\ & - & z & = & 2 \end{array}\right. \qquad \textit{(car } y = 1\textit{)} \\
\overset{L_1 \leftarrow L_1 + 7\,L_2}{\Longleftrightarrow} & \left\{\begin{array}{rcrcr} 2\,x & & & = & 6 \\ & - & z & = & 2 \end{array}\right.
\end{array}$$

$$\boxed{\text{Le seul vecteur } v \in \mathbb{R}^3 \text{ tel que } f(v) = u \text{ est } v = (3, 1, -2).}$$

□

b) Démontrer que le vecteur w de $\mathbb{R}^3$, dont la $2^{\text{ème}}$ coordonnée dans $\mathscr{B}$ vaut 1, et qui vérifie $f(w) = v$ est $w = (0, 1, -1)$.

Démonstration.
Soit $w = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Notons $W = \text{Mat}_{\mathscr{B}}(w) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

On cherche un vecteur w dont la $2^{\text{ème}}$ coordonnée vaut 1. On considère donc : $y = 1$.

$$\begin{array}{cl}
 & f(w) = v \\
\Longleftrightarrow & A\,W = V \\
\Longleftrightarrow & \left\{\begin{array}{rcrcrcr} 2\,x & + & 10\,y & + & 7\,z & = & 3 \\ x & + & 4\,y & + & 3\,z & = & 1 \\ -2\,x & - & 8\,y & - & 6\,z & = & -2 \end{array}\right. \\
\underset{L_3 \leftarrow L_3 - L_1}{\overset{L_2 \leftarrow 2\,L_2 - L_1}{\Longleftrightarrow}} & \left\{\begin{array}{rcrcrcr} 2\,x & + & 10\,y & + & 7\,z & = & 3 \\ & - & 2\,y & - & z & = & -1 \\ & & 2\,y & + & z & = & -1 \end{array}\right. \\
\Longleftrightarrow & \left\{\begin{array}{rcrcr} 2\,x & + & 7\,z & = & -7 \\ & - & z & = & 1 \end{array}\right. \qquad \textit{(car } y = 1\textit{)} \\
\overset{L_1 \leftarrow L_1 + 7\,L_2}{\Longleftrightarrow} & \left\{\begin{array}{rcrcr} 2\,x & & & = & 0 \\ & - & z & = & 1 \end{array}\right.
\end{array}$$

$$\boxed{\text{Le seul vecteur } w \in \mathbb{R}^3 \text{ tel que } f(w) = v \text{ est } w = (0, 1, -1).}$$

Remarque

- L'énoncé précise qu'il faut trouver **le** vecteur w tel que $f(w) = v$. Ainsi, vérifier :
$$f\big((0,1,-1)\big) = (3,1,-2)$$
ne suffit pas. Il faut aussi démontrer qu'il n'y a pas d'autre vecteur qui vérifie cette propriété.
- Si la fonction f était injective, on pourrait facilement démontrer que la propriété de l'énoncé est vérifiée par un seul vecteur. En effet, si s et t vérifie cette propriété, alors :
$$f(s) = v = f(t)$$
et ainsi, par linéarité : $f(s-t) = 0_{\mathbb{R}^3}$. D'où $s - t \in \text{Ker}(f)$.
Et ainsi, si f injective, on en conclut que $s = t$.
- L'intérêt de la formulation de cette question est qu'elle fournit le vecteur v de la question précédente. Cela permet de vérifier la calcul précédent et, le cas échéant, de le rectifier. Qu'on réussisse ou non ces deux questions, on peut faire la suite car la famille (u, v, w) est en fait donnée par l'énoncé.

$\square$

c) Montrer que (u, v, w) est une base de $\mathbb{R}^3$ que l'on notera $\mathscr{B}'$.
On note P la matrice de passage de la base $\mathscr{B}$ à la base $\mathscr{B}'$.

Démonstration.

- Montrons que la famille $\big((2,1,-2),(3,1,-2),(0,1,-1)\big)$ est libre.
Soit $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3$. Supposons :
$$\lambda_1 \cdot (2,1,-2) + \lambda_2 \cdot (3,1,-2) + \lambda_3 \cdot (0,1,-1) = (0,0,0)$$
Ceci équivaut au système :
$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} 2\,\lambda_1 & + & 3\,\lambda_2 & & & = & 0 \\ \lambda_1 & + & \lambda_2 & + & \lambda_3 & = & 0 \\ -2\,\lambda_1 & - & 2\,\lambda_2 & - & \lambda_3 & = & 0 \end{array}\right.$$
$$\overset{\substack{L_2 \leftarrow 2\,L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + L_1}}{\iff} \left\{\begin{array}{rcrcrcl} 2\,\lambda_1 & + & 3\,\lambda_2 & & & = & 0 \\ & - & \lambda_2 & + & 2\,\lambda_3 & = & 0 \\ & & \lambda_2 & - & \lambda_3 & = & 0 \end{array}\right.$$
$$\overset{L_3 \leftarrow L_3 + L_2}{\iff} \left\{\begin{array}{rcrcrcl} 2\,\lambda_1 & + & 3\,\lambda_2 & & & = & 0 \\ & - & \lambda_2 & + & 2\,\lambda_3 & = & 0 \\ & & & & \lambda_3 & = & 0 \end{array}\right.$$
$$\iff \left\{\ \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0\right.$$
(par remontées successives)

La famille (u, v, w) est donc libre.
- De plus, $\text{Card}((u, v, w)) = 3 = \dim(\mathbb{R}^3)$.

$$\boxed{\text{La famille } (u, v, w) \text{ est donc une base de } \mathbb{R}^3.}$$

$\square$

3. a) Écrire la matrice N de f relativement à la base $\mathscr{B}'$. En déduire la seule valeur propre de f. L'endomorphisme f est-il diagonalisable ?

Démonstration.

- D'après la question ***1.a)*** : $f(u) = 0 \cdot u + 0 \cdot v + 0 \cdot w$.

  On en déduit que $\mathrm{Mat}_{(u,v,w)}\big(f(u)\big) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.
- D'après la question ***2.a)*** : $f(v) = 1 \cdot u + 0 \cdot v + 0 \cdot w$.

  On en déduit que $\mathrm{Mat}_{(u,v,w)}\big(f(v)\big) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.
- D'après la question ***2.b)*** : $f(w) = 0 \cdot u + 1 \cdot v + 0 \cdot w$.

  On en déduit que $\mathrm{Mat}_{(u,v,w)}\big(f(w)\big) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

$$\boxed{\text{Ainsi : } N = \mathrm{Mat}_{(u_1,u_2,u_3)}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.}$$

- La matrice N est triangulaire supérieure.
  Ses cœfficients diagonaux sont donc ses valeurs propres et $\mathrm{Sp}(N) = \{0\}$.

$$\boxed{\text{On en déduit : } \mathrm{Sp}(f) = \mathrm{Sp}(N) = \{0\}. \text{ L'endomorphisme } f \text{ a pour seule valeur propre } 0.}$$

- Supposons par l'absurde que f est diagonalisable.
  Il existe alors une base $\mathscr{B}'' = (e_1'', e_2'', e_3'')$ constituée de vecteurs propres de f dans laquelle la matrice représentative de f est la matrice diagonale :

  $$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0_{\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})}$$

  D'après la formule de changement de base :

  $$\begin{array}{ccccc} \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) & = & P_{\mathscr{B},\mathscr{B}''} & \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}''}(f) & P_{\mathscr{B}'',\mathscr{B}} \\ & & \shortparallel & \shortparallel & \shortparallel \\ & & P & D & P^{-1} \end{array}$$

  Ainsi :
  $$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) = P \ 0_{\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})} \ P^{-1} = 0_{\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})} = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(0_{\mathscr{L}(\mathbb{R}^3)})$$
  L'application $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(.)$ étant bijective, on en déduit :

  $$f = 0_{\mathscr{L}(\mathbb{R}^3)}$$

  Absurde !

$$\boxed{\text{Ainsi, } f \text{ n'est pas diagonalisable.}}$$

Remarque

- Il étatit possible de rédiger différemment la dernière partie de la question en prenant le parti de diagonaliser la matrice représentative de f. Détaillons cette rédaction.
- Supposons par l'abusrde que f est diagonalisable. Alors A est diagonalisable.
  Il existe alors une matrice $P \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ inversible telle que :
  $$A = PDP^{-1}$$
  où D est une matrice diagonale dont les cœfficients diagonaux sont les valeurs propres de A.
  Or $\text{Sp}(A) = \text{Sp}(f) = \{0\}$. Donc : $D = 0_{\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})}$.
  Et ainsi :
  $$\text{Mat}_{\mathscr{B}}(f) = P\ 0_{\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})}\ P^{-1} = 0_{\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})} = \text{Mat}_{\mathscr{B}}(0_{\mathscr{L}(\mathbb{R}^3)})$$
  Et on peut donc conclure comme ci-dessus.
- Cette question est un grand classique des sujets.
  Il faut donc savoir la traiter correctement, en adoptant l'un ou l'autre des rédactions ci-dessus.

□

b) Donner la relation liant les matrices A, N, P et P^{-1}, puis en déduire que, pour tout entier k supérieur ou égal à 3, on a : $A^k = O$.

Démonstration.

- D'après la formule de changement de base :
  $$\begin{array}{ccccc} \text{Mat}_{\mathscr{B}}(f) & = & P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'} & \text{Mat}_{\mathscr{B}'}(f) & P_{\mathscr{B}',\mathscr{B}} \\ \shortparallel & & \shortparallel & \shortparallel & \shortparallel \\ A & & P & N & P^{-1} \end{array}$$
  $$\boxed{A = PNP^{-1}}$$
- Par une récurrence immédiate, on a : $\forall k \in \mathbb{N},\ A^k = PN^kP^{-1}$.
- Or :
  $$N^2 = N \times N \ = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
  et :
  $$N^3 = N \times N^2 \ = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
  $$\boxed{\begin{array}{c} \text{On en déduit par une récurrence immédiate : } \forall k \geqslant 3,\ N^k = O. \\ \textit{(on peut aussi écrire : } \forall k \geqslant 3,\ N^k = N^3 \times N^{k-3} = O\textit{)} \end{array}}$$
  $$\boxed{\text{On en conclut : } \forall k \geqslant 3,\ A^k = POP^{-1} = O.}$$

□

4. On note C_N (respectivement C_A) l'ensemble des matrices de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ qui commutent avec N (respectivement A),

a) Montrer que C_N est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ et que $C_N = \text{Vect}\left(I, N, N^2\right)$.
On admet que C_A est aussi un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.

Démonstration.

- D'après l'énoncé, $C_N = \{M \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R}) \mid MN = NM\}$.
  Soit $M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.

$$\begin{array}{rcl} M \in C_N & \Leftrightarrow & MN = NM \\ & \Leftrightarrow & \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \\ & \Leftrightarrow & \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & d & e \\ 0 & g & h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d & e & f \\ g & h & i \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ & \Leftrightarrow & \left\{ \begin{array}{l} d = g = h = 0 \\ a = e = i \\ b = f \end{array} \right. \end{array}$$

- On en déduit :

$$\begin{array}{rcl} C_N & = & \{M \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R}) \mid MN = NM\} \\ & = & \left\{ \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \mid d = g = h = 0 \ \texttt{ET} \ a = e = i \ \texttt{ET} \ b = f \right\} \\ & = & \left\{ \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} \mid (a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \right\} \\ & = & \left\{ a \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + b \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + c \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \mid (a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \right\} \\ & = & \text{Vect}\left(I, N, N^2\right) \end{array}$$

$$\boxed{\text{Ainsi } C_N \text{ est un espace vectoriel et } C_N = \text{Vect}\left(I, N, N^2\right).}$$

□

b) Établir que : $M \in C_A \ \Leftrightarrow \ P^{-1}MP \in C_N$.
En déduire que $C_A = \text{Vect}\left(I, A, A^2\right)$. Quelle est la dimension de C_A ?

Démonstration.

- Tout d'abord :

$$\begin{array}{rcll} M \in C_A & \Leftrightarrow & M \text{ commute avec } A & \\ & \Leftrightarrow & AM = MA & \\ & \Leftrightarrow & PNP^{-1}M = MPNP^{-1} & \\ & \Leftrightarrow & P^{-1}(PNP^{-1}M) = P^{-1}(MPNP^{-1}) & \textit{(en multipliant à gauche par } P^{-1}\textit{)} \\ & \Leftrightarrow & NP^{-1}M = P^{-1}MPNP^{-1} & \\ & \Leftrightarrow & (NP^{-1}M)P = (P^{-1}MPNP^{-1})P & \textit{(en multipliant à droite par } P^{-1}\textit{)} \\ & \Leftrightarrow & N(P^{-1}MP) = (P^{-1}MP)N & \\ & \Leftrightarrow & P^{-1}MP \text{ commute avec } N & \\ & \Leftrightarrow & P^{-1}MP \in C_N & \end{array}$$

$$\boxed{M \in C_A \ \Leftrightarrow \ P^{-1}MP \in C_N}$$

- D'après ce qui précède :

$$\begin{array}{rcl} M \in C_A & \Leftrightarrow & P^{-1}MP \in C_N \\ & \Leftrightarrow & P^{-1}MP \in \text{Vect}\left(I, N, N^2\right) \\ & \Leftrightarrow & \exists (a,b,c) \in \mathbb{R}^3, \ P^{-1}MP = a \cdot I + b \cdot N + c \cdot N^2 \\ & \Leftrightarrow & \exists (a,b,c) \in \mathbb{R}^3, \quad M \ = \ P\ (a \cdot I + b \cdot N + c \cdot N^2)\ P^{-1} \\ & & \qquad = \ (a \cdot P + b \cdot PN + c \cdot PN^2)\ P^{-1} \\ & & \qquad = \ a \cdot PP^{-1} + b \cdot PNP^{-1} + c \cdot PN^2P^{-1} \\ & & \qquad = \ a \cdot I + b \cdot A + c \cdot A^2 \\ & \Leftrightarrow & M \in \text{Vect}\left(I, A, A^2\right) \end{array}$$

$$\boxed{\text{Ainsi : } C_A = \text{Vect}\left(I, A, A^2\right).}$$

- Démontrons que la famille (I, A, A^2) est libre. Soit $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3$. Supposons :

$$\lambda_1 \cdot I + \lambda_2 \cdot A + \lambda_3 \cdot A^2 = O \quad (*)$$

Or :

$$\begin{array}{cll} & \lambda_1 \cdot I + \lambda_2 \cdot A + \lambda_3 \cdot A^2 & \\ = & \lambda_1 \cdot I + \lambda_2 \cdot PNP^{-1} + \lambda_3 \cdot PN^2P^{-1} & \textit{(d'après la question \textbf{3.b})} \\ = & P\ \left(\lambda_1 \cdot I + \lambda_2 \cdot N + \lambda_3 \cdot N^2\right)\ P^{-1} & \textit{(car } I = PP^{-1}\textit{)} \\ = & P\ \left(\lambda_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \lambda_3 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right)\ P^{-1} & \\ = & P \begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 \\ 0 & \lambda_1 & \lambda_2 \\ 0 & 0 & \lambda_1 \end{pmatrix} P^{-1} & \end{array}$$

Ainsi, d'après $(*)$: $P \begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 \\ 0 & \lambda_1 & \lambda_2 \\ 0 & 0 & \lambda_1 \end{pmatrix} P^{-1} \ = \ POP^{-1} \ = \ O$.

Et par multiplication à gauche par P^{-1} puis à droite par P :

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 \\ 0 & \lambda_1 & \lambda_2 \\ 0 & 0 & \lambda_1 \end{pmatrix} \ = \ O$$

On en déduit : $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$.

$$\boxed{\text{La famille } (I, A, A^2) \text{ est libre.}}$$

- La famille (I, A, A^2) :
  × engendre C_A,
  × est libre.

  La famille (I, A, A^2) est une base de C_A.

$$\boxed{\text{On en déduit : } \dim(C_A) = \mathrm{Card}((I, A, A^2)) = 3.}$$

□

Exercice 2 (EDHEC 2006)

On considère la fonction f définie par :
$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2(1-x)^2} & \text{si } x \in \left[0, \dfrac{1}{2}\right[\\[2mm] \dfrac{1}{2x^2} & \text{si } x \in \left[\dfrac{1}{2}, 1\right[\\[2mm] 0 & \text{si } x \in \mathbb{R} \setminus [0, 1[\end{cases}$$

1. Montrer que f peut être considérée comme une densité de probabilité.
Dans toute la suite, on considère une variable aléatoire X définie sur un certain espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ et admettant la fonction f pour densité.

Démonstration.

- La fonction f est continue sur $]-\infty, 0[\cup]0, \frac{1}{2}[\cup]\frac{1}{2}, 1[\cup]1, +\infty[$. En effet :
  × la fonction f est continue sur $]-\infty, 0[$ (resp. $]1, +\infty[$) car est nulle sur cet intervalle.
  × la fonction f est continue sur $]0, \frac{1}{2}[$ (resp. $]\frac{1}{2}, 1[$) car est l'inverse de $x \mapsto 2\ (1-x)^2$ (resp. $x \mapsto 2\ x^2$), continue et qui ne s'annule pas sur cet intervalle.

$$\boxed{\text{La fonction } f \text{ est continue sur } \mathbb{R} \setminus \{0, \tfrac{1}{2}, 1\}.}$$

- De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) \geqslant 0$ car $(1-x)^2 > 0$ si $x \in [0, \frac{1}{2}[$ et $x^2 > 0$ si $x \in [\frac{1}{2}, 1[$.

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) \geqslant 0}$$

- Remarquons :
$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\ dt \ = \ \int_0^1 f(t)\ dt$$
  car la fonction f est nulle en dehors $[0, 1[$.

La fonction f est $\mathcal{C}^0_m$ sur $[0,1]$.

$$\begin{aligned}
\int_0^1 f(t)\,dt &= \int_0^{\frac{1}{2}} f(t)\,dt + \int_{\frac{1}{2}}^1 f(t)\,dt \\
&= \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{2\,(1-t)^2}\,dt + \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{1}{2\,t^2}\,dt \\
&= -\frac{1}{2}\int_0^{\frac{1}{2}} (-1)\,(1-t)^{-2}\,dt + \frac{1}{2}\int_{\frac{1}{2}}^1 t^{-2}\,dt \\
&= -\frac{1}{2}\left[\frac{(1-t)^{-1}}{-1}\right]_0^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}\left[\frac{t^{-1}}{-1}\right]_{\frac{1}{2}}^1 \\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{1-t}\right]_0^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}\left[\frac{1}{t}\right]_{\frac{1}{2}}^1 \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\frac{1}{2}} - \frac{1}{1}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1} - \frac{1}{\frac{1}{2}}\right) = \frac{1}{2}\,(2-1) - \frac{1}{2}\,(1-2) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1
\end{aligned}$$

$\boxed{\text{Ainsi, l'intégrale impropre } \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt \text{ est convergente. De plus : } \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt = 1.}$

$\boxed{\text{La fonction } f \text{ est une densité de probabilité.}}$

□

2. Déterminer la fonction de répartition F de X.

Démonstration.
Soit $x \in \mathbb{R}$. Plusieurs cas se présentent.

- Si $x \in \,]-\infty, 0[$ alors :

$$F_X(x) = \mathbb{P}([X \leqslant x]) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt = 0$$

car f est nulle sur $]-\infty, x[$.

- Si $x \in [0, \frac{1}{2}[$ alors :

$$\begin{aligned}
F_X(x) &= \mathbb{P}([X \leqslant x]) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt \\
&= \int_{-\infty}^{0} f(t)\,dt + \int_0^x f(t)\,dt \qquad \textit{(d'après la relation de Chasles)} \\
&= \cancel{\int_{-\infty}^{0} 0\,dt} + \int_0^x \frac{1}{2\,(1-t)^2}\,dt \\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{1-t}\right]_0^x = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-x} - 1\right)
\end{aligned}$$

- Si $x \in [\frac{1}{2}, 1[$ alors :

$$\begin{array}{rcll}
F_X(x) & = & \mathbb{P}([X \leqslant x]) \ = \ \displaystyle\int_{-\infty}^{x} f(t)\ dt & \\
& = & \displaystyle\int_{-\infty}^{0} f(t)\ dt + \int_{0}^{\frac{1}{2}} f(t)\ dt + \int_{\frac{1}{2}}^{x} f(t)\ dt & \textit{(d'après la relation de Chasles)} \\
& = & \displaystyle\cancel{\int_{-\infty}^{0} 0\ dt} + \frac{1}{2} + \int_{\frac{1}{2}}^{x} f(t)\ dt & \textit{(d'après les calculs de la question précédente)} \\
& = & \displaystyle\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\left[\frac{1}{t}\right]_{\frac{1}{2}}^{x} \ = \ \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\frac{1}{2}}\right) & \\
& = & \displaystyle\frac{1}{2} - \frac{1}{2x} + 1 \ = \ \frac{3}{2} - \frac{1}{2x} &
\end{array}$$

- Si $x \in [1, +\infty[$ alors :

$$\begin{array}{rcll}
F_X(x) & = & \mathbb{P}([X \leqslant x]) \ = \ \displaystyle\int_{-\infty}^{x} f(t)\ dt & \\
& = & \displaystyle\int_{-\infty}^{0} f(t)\ dt + \int_{0}^{\frac{1}{2}} f(t)\ dt + \int_{\frac{1}{2}}^{1} f(t)\ dt + \int_{1}^{x} f(t)\ dt & \textit{(d'après la relation de Chasles)} \\
& = & \displaystyle\cancel{\int_{-\infty}^{0} 0\ dt} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \cancel{\int_{1}^{x} 0\ dt} & \textit{(d'après les calculs de la question précédente)}
\end{array}$$

$$\boxed{\text{On en déduit : } F : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \dfrac{1}{2\ (1-x)} - \dfrac{1}{2} & \text{si } x \in [0, \frac{1}{2}[\\ \dfrac{3}{2} - \dfrac{1}{2x} & \text{si } x \in [\frac{1}{2}, 1[\\ 1 & \text{si } x \geqslant 1 \end{cases}}$$

□

3. Montrer que X a une espérance et que celle-ci vaut $\frac{1}{2}$.

Démonstration.

- La v.a.r. X admet une espérance si et seulement si l'intégrale impropre $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t\ f(t)\ dt$ est absolument convergente ce qui équivaut à démontrer la convergence pour les calculs de moment.
- Tout d'abord :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} t\ f(t)\ dt \ = \ \int_{0}^{1} t\ f(t)\ dt$$

car f est nulle en dehors de $[0, 1[$.
- La fonction $t \mapsto t\ f(t)$ est $\mathcal{C}_m^0$ sur $[0, 1]$.

$$\begin{array}{rcll}
\displaystyle\int_{0}^{1} t\ f(t)\ dt & = & \displaystyle\int_{0}^{\frac{1}{2}} t\ f(t)\ dt + \int_{\frac{1}{2}}^{1} t\ f(t)\ dt & \textit{(d'après la relation de Chasles)} \\
& = & \displaystyle\int_{0}^{\frac{1}{2}} \frac{t}{2\ (1-t)^2}\ dt + \int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{t}{2\ t^2}\ dt &
\end{array}$$

- Afin de calculer la première intégrale, remarquons que pout tout $t \in [0, \frac{1}{2}]$:

$$\frac{t}{(1-t)^2} = -\frac{(1-t)-1}{(1-t)^2} = -\left(\frac{(1-t)}{(1-t)^2} + \frac{-1}{(1-t)^2}\right) = \frac{1}{(1-t)^2} - \frac{1}{1-t}$$

Ainsi, par linéarité de l'intégration :

$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{t}{(1-t)^2}\, dt &= \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{(1-t)^2}\, dt - \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{1-t}\, dt \\
&= \left[\frac{1}{1-t}\right]_0^{\frac{1}{2}} - \left[\ \ln(|1-t|)\ \right]_0^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{1}{\frac{1}{2}} - \frac{1}{1}\right) - \left[\ \ln(1-t)\ \right]_0^{\frac{1}{2}} \\
&= 1 - \left(\ln(\tfrac{1}{2} - \cancel{\ln(1)})\right) = 1 - \ln(2)
\end{aligned}$$

- On obtient alors :

$$\begin{aligned}
\int_0^1 t\ f(t)\ dt &= \frac{1}{2}\left(1-\ln(2)\right) + \frac{1}{2}\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{1}{t}\, dt \\
&= \frac{1}{2}\left(1-\ln(2)\right) + \frac{1}{2}\left[\ \ln(|t|)\ \right]_{\frac{1}{2}}^1 = \frac{1}{2}\left(1-\ln(2)\right) + \frac{1}{2}\left[\ \ln(t)\ \right]_{\frac{1}{2}}^1 \\
&= \frac{1}{2}\left(1-\ln(2)\right) + \frac{1}{2}\left(\cancel{\ln(1)} - \ln(\tfrac{1}{2})\right) \\
&= \frac{1}{2} - \cancel{\frac{1}{2}\ln(2)} + \cancel{\frac{1}{2}\ln(2)}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Ainsi, la v.a.r. } X \text{ admet une espérance et } \mathbb{E}(X) = \frac{1}{2}.}$$

Remarque
Afin de calculer la première intégrale, on peut procéder par intégration par parties (IPP).

$$\left|\begin{array}{rclcrcl}
u(t) &=& t & & u'(t) &=& 1 \\
v'(t) &=& (1-t)^{-2} & & v(t) &=& (1-t)^{-1}
\end{array}\right.$$

Cette IPP est valide car les fonctions u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, \frac{1}{2}]$. On obtient :

$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{1}{2}} t\ (1-t)^{-2}\ dt &= \left[\frac{t}{1-t}\right]_0^{\frac{1}{2}} - \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{1-t}\, dt \\
&= \left(\frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} - 0\right) + \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{-1}{1-t}\, dt \\
&= 1 + \left[\ \ln(|1-t|)\ \right]_0^{\frac{1}{2}} = 1 + \left[\ \ln(1-t)\ \right]_0^{\frac{1}{2}} \\
&= 1 + \left(\ln(\tfrac{1}{2}) - \cancel{\ln(1)}\right) = 1 - \ln(2)
\end{aligned}$$

□

4. a) Déterminer $\mathbb{E}((X-1)^2)$.

Démonstration.

- D'après le théorème de transfert, $(X-1)^2$ admet une espérance si et seulement si l'intégrale impropre $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} (t-1)^2\ f(t)\ dt$ est absolument convergente ce qui équivaut à démontrer la convergence car la fonction $t \mapsto (t-1)^2\ f(t)$ est positive.
- Tout d'abord :
$$\int_{-\infty}^{+\infty} (t-1)^2\ f(t)\ dt \ = \ \int_0^1 (t-1)^2\ f(t)\ dt$$
car f est nulle en dehors de $[0,1[$.
- La fonction $t \mapsto (t-1)^2\ f(t)$ est $\mathcal{C}_m^0$ sur $[0,1]$.

$$\begin{aligned}
\int_0^1 (t-1)^2\ f(t)\ dt &= \int_0^{\frac{1}{2}} (t-1)^2\ f(t)\ dt + \int_{\frac{1}{2}}^1 (t-1)^2\ f(t)\ dt \qquad \textit{(d'après la relation de Chasles)}\\
&= \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{(t-1)^2}{2\ (1-t)^2}\ dt + \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{(t-1)^2}{2\ t^2}\ dt\\
&= \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{2}\ dt + \frac{1}{2}\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{t^2-2t+1}{t^2}\ dt\\
&= \frac{1}{2}\ \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\left(\int_{\frac{1}{2}}^1 1\ dt - \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{2}{t}\ dt + \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{1}{t^2}\right)\\
&= \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\left((1-\tfrac{1}{2}) - 2\ \Big[\ \ln(|t|)\ \Big]_{\frac{1}{2}}^1 - \left[\ \frac{1}{t}\ \right]_{\frac{1}{2}}^1\right)\\
&= \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - 2\ \big(\cancel{\ln(1)} - \ln(\tfrac{1}{2})\big) - \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{\frac{1}{2}}\right)\right)\\
&= \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - 2\ln(2) + 1\right) \ = \ \frac{1}{4} + \frac{3}{4} - \ln(2) \ = \ 1 - \ln(2)
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{On en déduit que } (X-1)^2 \text{ admet une espérance et } \mathbb{E}\big((X-1)^2\big) = 1-\ln(2)}$$ □

b) En déduire que X a une variance et que $\mathbb{V}(X) = \dfrac{3}{4} - \ln(2)$.

Démonstration.

- Remarquons tout d'abord : $(X-1)^2 \ = \ X^2 - 2X + 1$.
On en déduit :
$$X^2 \ = \ (X-1)^2 + 2X - 1$$
Ainsi, X^2 admet une espérance comme somme de v.a.r. qui admettent une espérance.

$$\boxed{\text{On en conclut que la v.a.r. } X \text{ admet un moment d'ordre 2 et donc une variance.}}$$

- De plus :

$$\begin{array}{rcll}\mathbb{E}(X^2) & = & \mathbb{E}\big((X-1)^2+2X-1\big) & \\ & = & \mathbb{E}\big((X-1)^2\big)+2\,\mathbb{E}(X)-1 & \textit{(par linéarité de l'espérance)} \\ & = & \big(1-\ln(2)\big)+\cancel{2}\,\frac{\cancel{1}}{\cancel{2}}-\cancel{1} & \textit{(d'après les calculs précédents)}\end{array}$$

$$\boxed{\mathbb{E}(X^2)=1-\ln(2)}$$

- Enfin, d'après la formule de Kœnig-Huygens :

$$\begin{array}{rcl}\mathbb{V}(X) & = & \mathbb{E}(X^2)-\big(\mathbb{E}(X)\big)^2 \\ & = & \big(1-\ln(2)\big)-\left(\frac{1}{2}\right)^2 \\ & = & 1-\ln(2)\big)-\frac{1}{4} \;=\; \frac{3}{4}-\ln(2)\end{array}$$

$$\boxed{\text{Ainsi, on a bien : } \mathbb{V}(X)=\frac{3}{4}-\ln(2).}$$

□

5. On appelle variable indicatrice d'un événement A, la variable de Bernoulli qui vaut 1 si A est réalisé et 0 sinon. On considère maintenant la variable aléatoire Y, indicatrice de l'événement $\left[X \leqslant \frac{1}{2}\right]$ et la variable aléatoire Z, indicatrice de l'événement $\left[X > \frac{1}{2}\right]$.

a) Préciser la relation liant Y et Z puis établir sans calcul que le coefficient de corrélation linéaire de Y et Z, noté $\rho(Y,Z)$, est égal à -1.

Démonstration.

- Montrons : $Y+Z=1$.
Soit $\omega \in \Omega$. Deux cas se présentent :
  × si $X(\omega) \leqslant \frac{1}{2}$, alors, par définition des v.a.r. Y et Z, $Y(\omega)=1$ et $Z(\omega)=0$. Donc :
$$Y(\omega)+Z(\omega)=1+0=1$$
  × si $X(\omega) > \frac{1}{2}$, alors, par définition des v.a.r. Y et Z, $Y(\omega)=0$ et $Z(\omega)=1$. Donc :
$$Y(\omega)+Z(\omega)=0+1=1$$
Finalement : $\forall \omega \in \Omega,\ Y(\omega)+Z(\omega)=1$.
$$\boxed{\text{Ainsi : } Y+Z=1.}$$
- On a donc la relation suivante : $Z=-Y+1$.
Ainsi, la v.a.r. Z est une fonction affine strictement décroissante de Y.
$$\boxed{\text{Donc : } \rho(Y,Z)=-1.}$$

Remarque

- Il ne faut pas se laisser déstabiliser par la définition donnée par l'énoncé des v.a.r. Y et Z.
Remarquons qu'on peut les écrire sous la forme :

$$\forall \omega \in \Omega, \quad Y(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{si } X(\omega) \leqslant \frac{1}{2} \\ 0 & \text{si } X(\omega) > \frac{1}{2} \end{cases} \qquad \text{et} \qquad Z(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{si } X(\omega) > \frac{1}{2} \\ 0 & \text{si } X(\omega) \leqslant \frac{1}{2} \end{cases}$$

Par définition, on obtient directement : $Y(\Omega) = \{0, 1\}$ (et $Z(\Omega) = \{0, 1\}$). De plus :

$$[Y = 1] = \left[X \leqslant \tfrac{1}{2}\right] \quad \text{et} \quad [Y = 0] = \left[X > \tfrac{1}{2}\right]$$

On obtient loi de Y (*i.e.* les valeurs de $\mathbb{P}([Y = 1])$ et $\mathbb{P}([Y = 0])$) à l'aide de ces égalités.

- Il est relativement classique de définir une v.a.r. en fonction des valeurs possibles d'une autre v.a.r. . Illustrons ce propos en considérant la v.a.r. T définie comme suit :

$$\forall \omega \in \Omega, \ T(\omega) = \begin{cases} 0 & \text{si } V(\omega) \leqslant 0 \\ V(\omega) & \text{si } V(\omega) > 0 \end{cases}$$

où V est une v.a.r. telle que $V \hookrightarrow \mathcal{N}(0, 1)$.
On demande généralement de déterminer la loi de T. On doit alors déterminer la probabilité de l'événement $[T \leqslant x]$. De par la définition de T, on a naturellement envie, pour calculer $\mathbb{P}([T \leqslant x])$, de faire une disjonction de cas selon les valeurs prises par V.
C'est très précisément ce qui est formalisé par la formule des probabilités totales qu'on doit ici appliquer à l'aide du système complet d'événements $([V \leqslant 0], [V > 0])$.

□

b) En déduire la valeur de la covariance de Y et Z.

Démonstration.

- Par définition du coefficient de corrélation :

$$\rho(Y, Z) = \frac{\text{Cov}(Y, Z)}{\sqrt{\mathbb{V}(Y)}\,\sqrt{\mathbb{V}(Z)}}$$

Donc : $\text{Cov}(Y, Z) = \rho(Y, Z)\,\sqrt{\mathbb{V}(Y)}\,\sqrt{\mathbb{V}(Z)}$

$$\boxed{\text{D'après la question précédente : } \text{Cov}(Y, Z) = -\sqrt{\mathbb{V}(Y)}\,\sqrt{\mathbb{V}(Z)}.}$$

- D'après l'énoncé, la v.a.r. Y suit une loi de Bernoulli.
On a de plus l'égalité entre événements suivante :

$$[Y = 1] = \left[X \leqslant \frac{1}{2}\right]$$

Donc, d'après la question ***2.*** :

$$\mathbb{P}([Y = 1]) = \mathbb{P}\left(\left[X \leqslant \frac{1}{2}\right]\right) = F\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{2} - \frac{1}{\cancel{2} \times \frac{1}{\cancel{2}}} = \frac{3}{2} - 1 = \frac{1}{2}$$

$$\boxed{\text{Ainsi : } Y \hookrightarrow \mathcal{B}\left(\frac{1}{2}\right). \text{ Et donc : } \mathbb{V}(Y) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}.}$$

- De même, la v.a.r. Y suit une loi de Bernoulli.
  De plus : $[Z=1] = \left[X > \frac{1}{2}\right]$. Donc, d'après la question *2.* :
$$\mathbb{P}([Z=1]) = \mathbb{P}\left(\left[X > \frac{1}{2}\right]\right) = 1 - \mathbb{P}\left(\left[X \leqslant \frac{1}{2}\right]\right) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$
$$\boxed{\text{Ainsi : } Z \hookrightarrow \mathcal{B}\left(\frac{1}{2}\right). \text{ Et donc : } \mathbb{V}(Z) = \frac{1}{4}.}$$
- On en déduit :
$$\mathrm{Cov}(Y,Z) = -\sqrt{\mathbb{V}(Y)\,\mathbb{V}(Z)} = -\sqrt{\left(\frac{1}{4}\right)^2} = -\frac{1}{4}$$
$$\boxed{\mathrm{Cov}(Y,Z) = -\frac{1}{4}}$$
□

Exercice 3 (d'après EML 2016)

On considère l'application $f : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ définie, pour tout t de $[0,+\infty[$, par :
$$f(t) = \begin{cases} t^2 - t\ln(t) & \text{si } t \neq 0 \\ 0 & \text{si } t = 0 \end{cases}$$
On admet : $0,\ 69 < \ln(2) < 0,\ 70$.

PARTIE I : Étude de la fonction f

1. Montrer que f est continue sur $[0,+\infty[$.

Démonstration.
- La fonction f est continue sur $]0,+\infty[$ en tant que somme $f = f_1 + f_2$ de :
  × $f_1 : t \mapsto t\ln(t)$ continue sur $]0,+\infty[$ en tant que produit de fonctions continues sur $]0,+\infty[$,
  × $f_2 : t \mapsto t^2$ continue sur $]0,+\infty[$.
- Par ailleurs : $\lim\limits_{t\to 0} t\ln(t) = 0$. De plus, $\lim\limits_{t\to 0} t^2 = 0$.
  Donc $\lim\limits_{t\to 0} f(t) = 0 = f(0)$.
  Donc f est continue en 0.

$$\boxed{\text{La fonction } f \text{ est continue sur } [0,+\infty[.}$$
□

2. Justifier que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0,+\infty[$ et calculer, pour tout t de $]0,+\infty[$, $f'(t)$ et $f''(t)$.

Démonstration.
La fonction f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0,+\infty[$ en tant que somme $f = f_1 + f_2$ de :
× $f_1 : t \mapsto t\ln(t)$ de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0,+\infty[$ en tant que produit de fonctions de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0,+\infty[$,
× $f_2 : t \mapsto t^2$ de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0,+\infty[$.

$$\boxed{\text{La fonction } f \text{ est de classe } \mathcal{C}^2 \text{ sur }]0,+\infty[.}$$
$$\boxed{\forall t \in]0,+\infty[,\ f'(t) = 2t - \left(1 \times \ln(t) + \cancel{t} \times \frac{1}{\cancel{t}}\right) = 2t - \ln(t) - 1}$$
$$\boxed{\forall t \in]0,+\infty[,\ f''(t) = 2 - \frac{1}{t} = \frac{2t-1}{t}}$$
□

3. Dresser le tableau des variations de f. On précisera la limite de f en $+\infty$.

Démonstration.

- Soit $t \in \,]0, +\infty[$. Comme $t > 0$, $f''(t) = \dfrac{2t-1}{t}$ est du signe de $2t - 1$. Or :

$$2t - 1 \geqslant 0 \ \Leftrightarrow 2t \geqslant 1 \ \Leftrightarrow \ t \geqslant \frac{1}{2}$$

- On obtient le tableau de variations suivant :

t	0		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
Signe de $f''(t)$		$-$	0	$+$	
Variations de f'	$+\infty$	$\searrow$	$\ln(2)$	$\nearrow$	$+\infty$

Détaillons les éléments de ce tableau.

– $f'\left(\frac{1}{2}\right) = \cancel{2} \times \dfrac{1}{\cancel{2}} - \ln\left(\frac{1}{2}\right) - 1 = \cancel{1} + \ln(2) - \cancel{1} = \ln(2)$

– $f'(t) = 2t - \ln(t) - 1 \underset{t \to 0}{\sim} -\ln(t)$. Donc : $\lim\limits_{t \to 0} f'(t) = +\infty$.

– $f'(t) = 2t - \ln(t) - 1 = 2t \left(1 - \dfrac{\ln(t)}{2t}\right) \underset{t \to +\infty}{\sim} 2t$, car $1 - \dfrac{\ln(t)}{2t} \underset{t \to +\infty}{\longrightarrow} 1$ par croissances comparées.
Donc : $\lim\limits_{t \to +\infty} f'(t) = +\infty$.

- Or $\ln(2) > 0$. Donc : $\forall t \in \,]0, +\infty[, \ f'(t) > 0$.
De plus : $f(t) = t^2 - t\ln(t) = t^2 \left(1 - \dfrac{\ln(t)}{t}\right) \underset{t \to +\infty}{\sim} t^2$ par croissances comparées.
Donc : $\lim\limits_{t \to +\infty} f(t) = +\infty$.
On obtient donc le tableau de variations suivant pour f :

t	0		$+\infty$
Signe de $f'(t)$		$+$	
Variations de f	0	$\nearrow$	$+\infty$

□

4. Montrer que l'équation $f(t) = 1$, d'inconnue $t \in [0, +\infty[$, admet une solution et une seule et que celle-ci est égale à 1.

Démonstration.

- La fonction f est :
  × continue sur $[0, +\infty[$,
  × strictement croissante sur $[0, +\infty[$.

  Ainsi, f réalise une bijection de $[0, +\infty[$ sur $f([0, +\infty[)$. De plus :

$$f([0, +\infty[) = \left[f(0), \lim_{t \to +\infty} f(t) \right[= [0, +\infty[$$

Or $1 \in [0, +\infty[$, donc l'équation $f(t) = 1$ admet une unique solution α sur $[0, +\infty[$.

- De plus $f(1) = 1^2 - 1 \times \ln(1) = 1$. Donc $\alpha = 1$.

$$\boxed{\text{L'équation } f(t) = 1 \text{ admet 1 comme unique solution sur } [0, +\infty[.}$$

Remarque

- Il faut tout de suite repérer cette question comme une application du théorème de la bijection. Et s'empresser d'y répondre !
- Attention de ne pas seulement vérifier que 1 est solution de l'équation $f(t) = 1$. Il faut bien montrer ici que c'est **la seule** solution sur tout l'intervalle $[0, +\infty[$. □

PARTIE II : Étude d'une fonction F de deux variables réelles

On considère l'application $F :]0, +\infty[^2 \to \mathbb{R}$, définie, pour tout (x, y) de $]0, +\infty[^2$, par :

$$F(x, y) = x \ln(y) - y \ln(x)$$

5. Démontrer que F est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0, +\infty[^2$.

Démonstration.

- Considérons tout d'abord que la fonction $G : (x, y) \mapsto x \ \ln(y)$.
  La fonction G est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0, +\infty[^2$ car est le produit $G = G_1 \times G_2$ des fonctions :
  × $G_1 : (x, y) \mapsto x$ de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0, +\infty[^2$ car polynomiale.
  × $G_2 : (x, y) \mapsto \ln(y)$ de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0, +\infty[^2$ en tant que composée $G_2 = \varphi \circ R$ de :
  - $R : (x, y) \mapsto y$ de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0, +\infty[^2$ car polynomiale
    et telle que : $R(]0, +\infty[^2) \subset]0, +\infty[$.
  - $\varphi : X \mapsto \ln(X)$ de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0, +\infty[$.
- On démontre de même que la fonction $H : (x, y) \mapsto y \ \ln(x)$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0, +\infty[^2$.

$$\boxed{\text{Ainsi, la fonction } F \text{ est de classe } \mathcal{C}^2 \text{ sur }]0, +\infty[^2 \text{ en tant que somme } F = G + H \text{ de deux fonctions de classe } \mathcal{C}^2 \text{ sur }]0, +\infty[^2.}$$

□

6. Calculer les dérivées partielles premières de F en tout (x, y) de $]0, +\infty[^2$.

Démonstration.

- F est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0, +\infty[^2$, donc elle est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[^2$.
  Ainsi, F admet des dérivées partielles d'ordre 1 sur cet ouvert.
- Soit $(x, y) \in]0, +\infty[^2$.

$$\partial_1(F)(x, y) = \ln(y) - y \times \frac{1}{x} = \ln(y) - \frac{y}{x}$$

$$\partial_2(F)(x, y) = x \times \frac{1}{y} - \ln(x) = \frac{x}{y} - \ln(x)$$

$$\boxed{\forall (x, y) \in]0, +\infty[^2,\ \partial_1(F)(x, y) = \ln(y) - \frac{y}{x} \text{ et } \partial_2(F)(x, y) = \frac{x}{y} - \ln(x)}$$

□

7. a) Soit $(x, y) \in]0, +\infty[^2$. Montrer que (x, y) est un point critique de F si et seulement si :

$$x > 1, \quad y = \frac{x}{\ln(x)} \quad \text{et} \quad f(\ln(x)) = 1$$

Démonstration.
Le couple (x, y) est un point critique de F si et seulement si :

$$\nabla(F)(x,y) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} \partial_1(F)(x,y) & = & 0 \\ \partial_2(F)(x,y) & = & 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} \ln(y) & = & \dfrac{y}{x} \\ \dfrac{x}{y} & = & \ln(x) \end{array} \right.$$

- Comme $(x, y) \in]0, +\infty[^2$, alors $x > 0$ et $y > 0$. On en déduit : $\dfrac{x}{y} > 0$.
  Ainsi, si (x, y) est un point critique de F, $\ln(x) = \dfrac{x}{y} > 0$, et, par stricte croissance de la fonction $x \mapsto e^x$, $x > e^0 = 1$.
  On a donc déjà $x > 1$.
- On reprend alors la résolution du système.

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \ln(y) & = & \dfrac{y}{x} \\ \dfrac{x}{y} & = & \ln(x) \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} x \ln(y) & = & y \\ \dfrac{x}{\ln(x)} & = & y \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} x \ln\left(\dfrac{x}{\ln(x)}\right) & = & \dfrac{x}{\ln(x)} \\ \dfrac{x}{\ln(x)} & = & y \end{array} \right.$$

  La première équation devient alors :

$$\begin{array}{rcl} x \ln\left(\dfrac{x}{\ln(x)}\right) = \dfrac{x}{\ln(x)} & \Leftrightarrow & x\ (\ln(x) - \ln(\ln(x))) = \dfrac{x}{\ln(x)} \\ & \Leftrightarrow & \cancel{x} \ln(x)\,(\ln(x) - \ln(\ln(x))) = \cancel{x} \quad \textit{(car } x \neq 0\textit{)} \\ & \Leftrightarrow & (\ln(x))^2 - \ln(x)\ \ln(\ln(x)) = 1 \\ & \Leftrightarrow & f(\ln(x)) = 1 \end{array}$$

  On en déduit alors que, si (x, y) est un point critique de F, alors :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x & > & 1 \\ f(\ln(x)) & = & 1 \\ y & = & \dfrac{x}{\ln(x)} \end{array} \right.$$

- Réciproquement, si (x, y) vérifie ces trois conditions, alors $\nabla(F)(x,y) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.
  D'où (x, y) est un point critique de F.

$$\boxed{\text{Finalement } (x,y) \text{ est un point critique de } F \text{ si et seulement si : } \left\{ \begin{array}{l} x > 1 \\ f(\ln(x)) = 1 \\ y = \dfrac{x}{\ln(x)} \end{array} \right.}$$

□

b) Établir que F admet un point critique et un seul et qu'il s'agit de (e, e).

Démonstration.

- Soit $(x, y) \in \,]0, +\infty[^2$. D'après la question précédente, si (x, y) est un point critique de F, alors, en particulier $f(\ln(x)) = 1$.
- D'après la question ***4.***, l'équation $f(t) = 1$ admet une unique solution sur $]0, +\infty[$: $\alpha = 1$. Donc $\ln(x) = 1$, d'où $x = \mathrm{e}^1 = \mathrm{e}$.
- On obtient alors : $y = \dfrac{\mathrm{e}}{\ln(\mathrm{e})} = \mathrm{e}$. D'où $(x, y) = (\mathrm{e}, \mathrm{e})$.
- Réciproquement :
$$\partial_1(F)(\mathrm{e}, \mathrm{e}) = \ln(\mathrm{e}) - \frac{\mathrm{e}}{\mathrm{e}} = 0 \quad \text{et} \quad \partial_2(F)(\mathrm{e}, \mathrm{e}) = \ln(\mathrm{e}) - \frac{\mathrm{e}}{\mathrm{e}} = 0$$
Donc (e, e) est un point critique de F.

$$\boxed{\text{Finalement, la fonction } F \text{ admet } (\mathrm{e}, \mathrm{e}) \text{ pour unique point critique.}}$$

□

8. La fonction F admet-elle un extremum local en (e, e) ?

Démonstration.
Pour savoir si (e, e) est un extremum local pour F, on détermine les valeurs propres de la matrice hessienne de F en (e, e).

- La fonction F est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0, +\infty[^2$.
Elle admet donc des dérivées partielles d'ordre 2 sur cet ouvert.
- Soit $(x, y) \in \,]0, +\infty[^2$.
$$\nabla^2(F)(x, y) = \begin{pmatrix} \partial^2_{1,1}(F)(x, y) & \partial^2_{1,2}(F)(x, y) \\ \partial^2_{2,1}(F)(x, y) & \partial^2_{2,2}(F)(x, y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{y}{x^2} & \dfrac{1}{y} - \dfrac{1}{x} \\ \dfrac{1}{y} - \dfrac{1}{x} & -\dfrac{x}{y^2} \end{pmatrix}$$
Donc on obtient :
$$\nabla^2(F)(\mathrm{e}, \mathrm{e}) = \begin{pmatrix} \dfrac{\mathrm{e}}{\mathrm{e}^2} & \dfrac{1}{\mathrm{e}} - \dfrac{1}{\mathrm{e}} \\ \dfrac{1}{\mathrm{e}} - \dfrac{1}{\mathrm{e}} & -\dfrac{\mathrm{e}}{\mathrm{e}^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{\mathrm{e}} & 0 \\ 0 & -\dfrac{1}{\mathrm{e}} \end{pmatrix}$$
- La matrice $\nabla^2(F)(\mathrm{e}, \mathrm{e})$ est diagonale, donc ses valeurs propres sont ses coefficients diagonaux. D'où $\mathrm{Sp}(\nabla^2(F)(\mathrm{e}, \mathrm{e})) = \{\mathrm{e}^{-1}, -\mathrm{e}^{-1}\}$.

$$\boxed{\begin{array}{c} \nabla^2(F)(\mathrm{e}, \mathrm{e}) \text{ admet deux valeurs propres de signe contraire,} \\ \text{donc } (\mathrm{e}, \mathrm{e}) \text{ n'est pas un extremum local pour } F \text{ (c'est un point selle).} \end{array}}$$

Remarque
On rappelle qu'on utilise ici le théorème suivant :
Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur un **ouvert** U et soit (x_0, y_0) un **point critique** de f.

- Si les valeurs propres de la matrice hessienne $\nabla^2(f)(x_0, y_0)$ sont strictement positives, alors f admet un minimum local en (x_0, y_0).
- Si les valeurs propres de la matrice hessienne $\nabla^2(f)(x_0, y_0)$ sont strictement négatives, alors f admet un maximum local en (x_0, y_0).
- Si les valeurs propres de $\nabla^2(f)(x_0, y_0)$ sont non nulles et de signes opposés, alors f n'admet pas d'extremum local en (x_0, y_0). On parle de *point col* ou *point selle*
- Si 0 est valeur propre de $\nabla^2(f)(x_0, y_0)$, alors on ne peut conclure directement avec ce théorème. □

Exercice 4 (EDHEC 2006)

Soit f la fonction définie pour tout couple (x, y) de $\mathbb{R}^2$ par : $f(x, y) = 2x^2 + 2y^2 + 2xy - x - y$.

1. a) Calculer les dérivées partielles premières de f.

Démonstration.
La fonction f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$ en tant que fonction polynomiale.
Donc elle admet des dérivées partielles d'ordre 1 (*et* 2) sur $\mathbb{R}^2$.

$$\boxed{\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ \partial_1(f)(x, y) = 4x + 2y - 1 \quad \text{et} \quad \partial_2(f)(x, y) = 4y + 2x - 1}$$

□

b) En déduire que le seul point critique de f est $A = \left(\frac{1}{6}, \frac{1}{6}\right)$.

Démonstration.
Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.
Le couple (x, y) est un point critique de f si et seulement si : $\nabla(f)(x, y) = 0_{\mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{R})}$. De plus :

$$\nabla(f)(x, y) = 0_{\mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{R})} \iff \left\{\begin{array}{rcl} \partial_1(f)(x, y) & = & 0 \\ \partial_2(f)(x, y) & = & 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcrcl} 4x & + & 2y & = & 1 \\ 2x & + & 4y & = & 1 \end{array}\right.$$

$$\overset{L_2 \leftarrow 2L_2 - L_1}{\iff} \left\{\begin{array}{rcrcl} 4x & + & 2y & = & 1 \\ & & 6y & = & 1 \end{array}\right. \overset{L_1 \leftarrow 3L_1 - L_2}{\iff} \left\{\begin{array}{rcrl} 12x & & & = 2 \\ & & 6y & = 1 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{l} x = \frac{1}{6} \\ y = \frac{1}{6} \end{array}\right.$$

$$\boxed{\text{Ainsi, le seul point critique de } f \text{ est } A = \left(\tfrac{1}{6}, \tfrac{1}{6}\right).}$$

□

2. a) Calculer les dérivées partielles secondes de f.

Démonstration.
La fonction f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$. Elle admet donc des dérivées partielles d'ordre 2 sur $\mathbb{R}^2$.

$$\boxed{\begin{array}{c} \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ \partial^2_{1,1}(f)(x, y) = 4, \quad \partial^2_{2,1}(f)(x, y) = 2 \\ \partial^2_{1,2}(f)(x, y) = 2 \quad \text{et} \quad \partial^2_{2,2}(f)(x, y) = 4 \end{array}}$$

□

b) Montrer que f présente un minimum local en A et donner la valeur m de ce minimum.

Démonstration.

- Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.
  La matrice hessienne $\nabla^2(f)(x, y)$ de f est donnée par :

$$\nabla^2(f)(x, y) = \begin{pmatrix} \partial^2_{1,1}(f)(x, y) & \partial^2_{1,2}(f)(f)(x, y) \\ \partial^2_{2,1}(f)(x, y) & \partial^2_{2,2}(f)(x, y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\nabla^2(f)\left(\tfrac{1}{6}, \tfrac{1}{6}\right) = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}}$$

- Déterminons les valeurs propres de $\nabla^2(f)\left(\frac{1}{6},\frac{1}{6}\right)$. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

  Le réel λ est valeur propre de $\nabla^2(f)\left(\frac{1}{6},\frac{1}{6}\right)$ si et seulement si $\nabla^2(f)\left(\frac{1}{6},\frac{1}{6}\right) - \lambda\, I_2$ n'est pas inversible.

$$\begin{aligned}\det\left(\nabla^2(f)\left(\tfrac{1}{6},\tfrac{1}{6}\right) - \lambda\, I_2\right) &= \det\left(\begin{pmatrix} 4-\lambda & 2 \\ 2 & 4-\lambda \end{pmatrix}\right) = (4-\lambda)^2 - 4 \\ &= (4-\lambda-2)(4-\lambda+2) = (2-\lambda)(6-\lambda)\end{aligned}$$

  Donc la matrice $\nabla^2(f)\left(\frac{1}{6},\frac{1}{6}\right) - \lambda\, I_2$ n'est pas inversible si et seulement si $\lambda \in \{2,6\}$.

$$\boxed{\text{Ainsi : } \mathrm{Sp}\left(\nabla^2(f)\left(\tfrac{1}{6},\tfrac{1}{6}\right)\right) = \{2,6\}.}$$

- Or $2 > 0$ et $6 > 0$.

$$\boxed{\text{On en déduit que } f \text{ admet un minimum local en } A.}$$

- De plus :

$$\begin{aligned} m &= f\left(\tfrac{1}{6},\tfrac{1}{6}\right) \\ &= 2\left(\frac{1}{6}\right)^2 + 2\left(\frac{1}{6}\right)^2 + 2\left(\frac{1}{6}\right)^2 - \frac{1}{6} - \frac{1}{6} \\ &= \cancel{6} \times \frac{1}{6^{\cancel{2}}} - \frac{2}{6} = -\frac{1}{6}\end{aligned}$$

$$\boxed{m = -\frac{1}{6}}$$

□

3. a) Développer $2\left(x + \dfrac{y}{2} - \dfrac{1}{4}\right)^2 + \dfrac{3}{2}\left(y - \dfrac{1}{6}\right)^2$.

Démonstration.
Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

$$\begin{aligned} & 2\left(x + \frac{y}{2} - \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{3}{2}\left(y - \frac{1}{6}\right)^2 \\ = \ & 2\left(x^2 + \frac{y^2}{4} + \frac{1}{16} + \cancel{2}\, x\, \frac{y}{\cancel{2}} - 2\, x\, \frac{1}{4} - \cancel{2}\, \frac{y}{\cancel{2}}\, \frac{1}{4}\right) + \frac{3}{2}\left(y^2 - 2\, y\, \frac{1}{6} + \frac{1}{36}\right) \\ = \ & 2x^2 + \frac{y^2}{2} + \frac{1}{8} + 2xy - x - \frac{y}{2} + \frac{3}{2}y^2 - \frac{y}{2} + \frac{1}{24} \\ = \ & 2x^2 + 2y^2 + 2xy - x - y + \frac{1}{6} \\ = \ & f(x,y) - m \end{aligned}$$

$$\boxed{\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ 2\left(x + \frac{y}{2} - \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{3}{2}\left(y - \frac{1}{6}\right)^2 = f(x,y) - m}$$

□

b) En déduire que m est le minimum global de f sur $\mathbb{R}^2$.

Démonstration.
Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.
D'après la question précédente :

$$f(x,y) - m = 2\left(x + \frac{y}{2} - \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{3}{2}\left(y - \frac{1}{6}\right)^2 \ \geqslant \ 0$$

On obtient donc :

$$f(x,y) \geqslant m$$

$$\boxed{\text{Cette inégalité est valable pour tout } (x,y) \in \mathbb{R}^2\text{, donc } m \text{ est le minimum global de } f \text{ sur } \mathbb{R}^2.}$$

□

4. On considère la fonction g définie pour tout couple (x, y) de $\mathbb{R}^2$, par :

$$g(x,y) = 2\mathrm{e}^{2x} + 2\mathrm{e}^{2y} + 2\mathrm{e}^{x+y} - \mathrm{e}^x - \mathrm{e}^y$$

a) Utiliser la question ***3.*** pour établir que : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ g(x,y) \geqslant -\dfrac{1}{6}$.

Démonstration.

- Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

$$\begin{array}{rcl} g(x,y) & = & 2\mathrm{e}^{2x} + 2\mathrm{e}^{2y} + 2\mathrm{e}^{x+y} - \mathrm{e}^x - \mathrm{e}^y \\ & = & 2(\mathrm{e}^x)^2 + 2(\mathrm{e}^y)^2 + 2(\mathrm{e}^x)(\mathrm{e}^y) - \mathrm{e}^x - \mathrm{e}^y \end{array}$$

  Donc, en posant $X = \mathrm{e}^x$ et $Y = \mathrm{e}^y$:

$$g(x,y) = 2X^2 + 2Y^2 + 2XY - X - Y = f(X,Y)$$

- Or, d'après la question ***3.***, le réel m est le minimum global de f sur $\mathbb{R}^2$.
  On en déduit : $\forall (X,Y) \in \mathbb{R}^2,\ f(X,Y) \geqslant m$. Ainsi :

$$g(x,y) = f(X,Y) \ \geqslant \ m = -\frac{1}{6}$$

$$\boxed{\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ g(x,y) \geqslant -\frac{1}{6}}$$

□

b) En déduire que g possède un minimum global sur $\mathbb{R}^2$ et préciser en quel point ce minimum est atteint.

Démonstration.
Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

- D'après la question précédente, g admet $-\dfrac{1}{6}$ comme minimum global sur $\mathbb{R}^2$.
- Par ailleurs, en conservant les notations précédentes, si $X = \dfrac{1}{6}$ et $Y = \dfrac{1}{6}$, alors :

$$f(X,Y) = -\frac{1}{6} = g(x,y)$$

- Il s'agit donc de trouver x et y tels que : $X = \dfrac{1}{6}$ et $Y = \dfrac{1}{6}$. Or :

$$X = \frac{1}{6} \ \Leftrightarrow \ \mathrm{e}^x = \frac{1}{6} \ \Leftrightarrow \ x = \ln\left(\frac{1}{6}\right) \ \Leftrightarrow \ x = -\ln(6)$$

  De même :

$$Y = \frac{1}{6} \ \Leftrightarrow \ y = -\ln(6)$$

- On obtient alors :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ g(x,y) \geqslant -\frac{1}{6} = g(-\ln(6), -\ln(6))$$

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{La fonction } g \text{ admet } -\frac{1}{6} \text{ comme minimum global sur } \mathbb{R}^2.\\ \text{Il est atteint au point } (-\ln(6), -\ln(6)).\end{array}}$$

□

Exercice 5 (EML 2016)

PARTIE I : Étude d'une variable aléatoire

On considère l'application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie, pour tout t de $\mathbb{R}$, par : $f(t) = \dfrac{\mathrm{e}^{-t}}{(1+\mathrm{e}^{-t})^2}$.

1. Vérifier que la fonction f est paire.

Démonstration.
Soit $t \in \mathbb{R}$. On a bien $-t \in \mathbb{R}$.

$$\begin{array}{rcl} f(-t) - f(t) & = & \dfrac{\mathrm{e}^{-(-t)}}{(1+\mathrm{e}^{-(-t)})^2} - \dfrac{\mathrm{e}^{-t}}{(1+\mathrm{e}^{-t})^2} \\ & = & \dfrac{\mathrm{e}^{t}}{(1+\mathrm{e}^{t})^2} - \dfrac{\mathrm{e}^{-t}}{(1+\mathrm{e}^{-t})^2} \\ & = & \dfrac{\mathrm{e}^{t}(1+\mathrm{e}^{-t})^2 - \mathrm{e}^{-t}(1+\mathrm{e}^{t})^2}{(1+\mathrm{e}^{t})^2(1+\mathrm{e}^{-t})^2} \\ & = & \dfrac{\mathrm{e}^{t}(1+2\mathrm{e}^{-t}+\mathrm{e}^{-2t}) - \mathrm{e}^{-t}(1+2\mathrm{e}^{t}+\mathrm{e}^{2t})}{(1+\mathrm{e}^{t})^2(1+\mathrm{e}^{-t})^2} \\ & = & \dfrac{\cancel{\mathrm{e}^{t}+2+\mathrm{e}^{-t}} - (\cancel{\mathrm{e}^{-t}+2+\mathrm{e}^{t}})}{(1+\mathrm{e}^{t})^2(1+\mathrm{e}^{-t})^2} \ = \ 0 \end{array}$$

Donc $f(-t) = f(t)$.

$$\boxed{\text{La fonction } f \text{ est paire.}}$$

Remarque
La méthode classique pour démontrer qu'une fonction f est paire est de prouver l'égalité :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(-x) = f(x)$$

Lorsque ce calcul direct ne semble pas aboutir, on pensera à former $f(-x) - f(x)$.

En règle générale, pour démontrer l'égalité « $a = b$ », on peut :

– partir de a et, par une succession d'égalités, arriver à b.

– partir de b et, par une succession d'égalités, arriver à a.

– prouver $a = c$, puis $b = c$ par l'une des méthodes précédentes (méthode du « mi-chemin ».

– calculer $a - b$, pour prouver $a - b = 0$.

Pour choisir entre les deux premières méthodes, on retiendra qu'il est plus simple de transformer une expression « compliquée » en expression « simple » que l'inverse.
La dernière méthode est souvent efficace, notamment lorsque les autres ne semblent pas aboutir. □

2. Montrer que f est une densité d'une variable aléatoire réelle.

Démonstration.

- La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$ en tant que quotient de fonctions continues sur $\mathbb{R}$ dont le dénominateur ne s'annule pas. Détaillons ce dernier point.
  Soit $t \in \mathbb{R}$.

$$\mathrm{e}^{-t} > 0 \quad \text{donc} \quad 1+\mathrm{e}^{-t} > 1$$

$$\text{et} \quad (1+\mathrm{e}^{-t})^2 > 1^2 \qquad \textit{(car la fonction } x \mapsto x^2 \textit{ est croissante sur } [0,+\infty[\textit{)}$$

$$\text{ainsi} \quad (1+\mathrm{e}^{-t})^2 > 0$$

$$\boxed{\text{La fonction } f \text{ est continue sur } \mathbb{R}.}$$

- Pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\mathrm{e}^{-t} > 0$ donc $(1+\mathrm{e}^{-t})^2 > 0$.

$$\boxed{\forall t \in \mathbb{R},\ f(t) \geqslant 0}$$

- L'intégrale impropre $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt$ est convergente si les intégrales impropres $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} f(t)\,dt$ et $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} f(t)\,dt$ le sont. On étudie tout d'abord l'intégrale impropre $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} f(t)\,dt$.
  - La fonction f est continue sur $[0,+\infty[$.
  - Soit $A \in [0,+\infty[$.

$$\int_0^A f(t)\,dt = \int_0^A \frac{\mathrm{e}^{-t}}{(1+\mathrm{e}^{-t})^2}\,dt = \left[\frac{1}{1+\mathrm{e}^{-t}}\right]_0^A = \frac{1}{1+\mathrm{e}^{-A}} - \frac{1}{2} \underset{A\to+\infty}{\longrightarrow} 1-\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

  Ainsi, $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} f(t)\,dt$ converge et vaut $\dfrac{1}{2}$.

  On étudie maintenant l'intégrale impropre $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} f(t)\,dt$.
  - On effectue le changement de variable $\boxed{u=-t}$.

$$\left|\begin{array}{l} u=-t \text{ (donc } t=-u) \\ \hookrightarrow du = -\,dt \quad \text{et} \quad dt=-du \\ \bullet\ t=-\infty \ \Rightarrow\ u=+\infty \\ \bullet\ t=0 \ \Rightarrow\ u=0 \end{array}\right.$$

  Ce changement de variable est valide car $\psi : u \mapsto -u$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,+\infty[$.
  On a donc :

$$\int_0^{+\infty} f(t)\,dt = \int_0^{-\infty} f(-u)(-\,du) = \int_{-\infty}^{0} f(-u)\,du = \int_{-\infty}^{0} f(u)\,du$$

  La dernière égalité est obtenue car la fonction f est paire (d'après la question ***1.***).
  On en déduit que l'intégrale impropre $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} f(u)\,du$ est convergente et vaut $\dfrac{1}{2}$.

$$\boxed{\text{Ainsi : } \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt \text{ converge et : } \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt = \int_{-\infty}^{0} f(t)\,dt + \int_{0}^{+\infty} f(t)\,dt = 1.}$$

$$\boxed{\text{Finalement, la fonction } f \text{ est une densité d'une variable aléatoire réelle.}}$$

Remarque

- Le programme officiel stipule que « les changements de variables affines pourront être utilisés directement sur des intégrales sur un intervalle quelconque ». Pour autant, ce type de changement de variable ne peut se faire qu'après avoir démontré la convergence (ce qu'on a fait dans l'exemple).
- Cela signifie aussi que, de manière générale, on ne peut effectuer de changement de variable directement sur une intégrale impropre : on doit se ramener au préalable sur une intégrale sur un segment. □

Dans toute la suite de l'exercice, on considère une variable aléatoire réelle X à densité, de densité f.

3. Déterminer la fonction de répartition de X.

Démonstration.
On note F_X la fonction de répartition de X. Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$F_X(x) = \mathbb{P}([X \leqslant x]) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\ dt$$

La fonction f est continue sur $]-\infty, x]$.
Soit $B \in\ ]-\infty, x]$.

$$\int_B^x f(t)\ dt = \int_B^x \frac{\mathrm{e}^{-t}}{(1+\mathrm{e}^{-t})^2}\ dt = \left[\ \frac{1}{1+\mathrm{e}^{-t}}\ \right]_B^x = \frac{1}{1+\mathrm{e}^{-x}} - \frac{1}{1+\mathrm{e}^{-B}} \underset{B\to-\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{1+\mathrm{e}^{-x}}$$

Donc $\displaystyle\int_{-\infty}^{x} f(t)\ dt$ converge et vaut $\dfrac{1}{1+\mathrm{e}^{-x}}$.

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ F_X(x) = \frac{1}{1+\mathrm{e}^{-x}}.}$$

□

4. ***a)*** Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} t\, f(t)\ dt$ converge.

Démonstration.

- La fonction $t \mapsto t\, f(t)$ est continue sur $[0, +\infty[$ en tant que produit de fonctions continues sur l'intervalle $[0, +\infty[$.
- × Tout d'abord : $t\, f(t) = \underset{t\to+\infty}{o}\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$.
  En effet :
  $$\frac{t\, f(t)}{\frac{1}{t^2}} = t^2\, t f(t) = \frac{t^3\, \mathrm{e}^{-t}}{(1+\mathrm{e}^{-t})^2} = \frac{t^3\, \mathrm{e}^{-t}}{1+2\mathrm{e}^{-t}+\mathrm{e}^{-2t}} \underset{t\to+\infty}{\sim} \frac{t^3\, \mathrm{e}^{-t}}{1} = t^3\, \mathrm{e}^{-t}$$
  Or, par croissances comparées, $\lim\limits_{t\to+\infty} t^3 \mathrm{e}^{-t} = 0$. Donc $\lim\limits_{t\to+\infty} t^2\, t f(t) = 0$.
  On en déduit : $t\, f(t) = \underset{t\to+\infty}{o}\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$.

  × $\forall t \in [1, +\infty[,\ t\, f(t) \geqslant 0$ et $\dfrac{1}{t^2} \geqslant 0$.

  × L'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}\ dt$ est une intégrale de Riemann impropre en $+\infty$, d'exposant $2 > 1$. Elle est donc convergente.

  Par critère de négligeabilité des intégrales généralisées de fonctions continues positives, l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} t\, f(t)\ dt$ converge.

- La fonction $t \mapsto t\,f(t)$ est continue sur le **segment** $[0,1]$.
  Ainsi, l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 t\,f(t)\ dt$ est bien définie.

$$\boxed{\text{Finalement, l'intégrale } \displaystyle\int_0^{+\infty} t\,f(t)\ dt \text{ converge.}}$$

Remarque

L'énoncé demande simplement de déterminer la **nature** de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} t\,f(t)\ dt$ (sans la calculer). Il faut donc privilégier pour cette question l'utilisation d'un critère de comparaison / équivalence / négligeabilité d'intégrales de fonctions continues positives.
On évitera donc le calcul direct de l'intégrale car :

1. il est sans doute difficile,

2. il est peut-être même (souvent) impossible. □

b) En utilisant l'imparité de la fonction $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $t \mapsto t\,f(t)$, montrer que X admet une espérance et que l'on a : $\mathbb{E}(X) = 0$.

Démonstration.

- La v.a.r. X admet une espérance si et seulement si l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t\ f(t)\ dt$ converge absolument, ce qui équivaut à démontrer sa convergence pour ce calcul de moment.
  L'intégrale impropre $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} tf(t)\ dt$ est convergente si les intégrales impropres $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} tf(t)\ dt$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} tf(t)\ dt$ le sont. Or, d'après la question précédente, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} tf(t)\ dt$ converge.
- Déterminons la nature de $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} tf(t)\ dt$.
  On effectue le changement de variable $\boxed{u = -t}$.

$$\left|\begin{array}{l} u = -t \ (\text{donc } t = -u) \\ \hookrightarrow du = -\ dt \quad \text{ et } \quad dt = -du \\ \bullet\ t = -\infty \ \Rightarrow\ u = +\infty \\ \bullet\ t = 0 \ \Rightarrow\ u = 0 \end{array}\right.$$

  Ce changement de variable est valide car $\psi : u \mapsto -u$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,+\infty[$.
  On a donc :

$$\int_0^{+\infty} tf(t)\ dt = \int_0^{-\infty} (\cancel{-}u)f(-u)(\cancel{-}\ du) = \int_0^{-\infty} uf(u)\ du = -\int_{-\infty}^{0} uf(u)\ du$$

  La deuxième égalité est obtenue car la fonction f est paire (d'après la question ***1.***).
  On en déduit que l'intégrale impropre $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} f(u)\ du$ est convergente.
- Finalement, X admet une espérance et :

$$\mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} tf(t)\ dt = \int_{-\infty}^{0} tf(t)\ dt + \int_0^{+\infty} tf(t)\ dt = -\cancel{\int_0^{+\infty} tf(t)\ dt} + \cancel{\int_0^{+\infty} tf(t)\ dt} = 0$$

$$\boxed{\text{La v.a.r. } X \text{ admet une espérance et } \mathbb{E}(X) = 0.}$$

□

PARTIE II. Étude d'une autre variable aléatoire

On considère l'application $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie, pour tout x de $\mathbb{R}$, par : $\varphi(x) = \ln(1 + e^x)$.

5. Montrer que φ est une bijection de $\mathbb{R}$ sur un intervalle I à préciser.

Démonstration.

- La fonction φ est dérivable sur $\mathbb{R}$ car elle est la composée $h \circ g$ des fonctions :
  - $\times$ $g : x \mapsto 1 + e^x$ dérivable sur $\mathbb{R}$, et telle que $g(\mathbb{R}) \subset]0, +\infty[$.
    (pour tout $x \in \mathbb{R}$, $1 + e^x > 0$)
  - $\times$ $h : y \mapsto \ln(y)$ dérivable sur $]0, +\infty[$.
- Soit $x \in \mathbb{R}$.
$$\varphi'(x) = \frac{e^x}{1 + e^x} > 0$$
Donc φ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
- La fonction φ est :
  - $\times$ continue sur $]-\infty, +\infty[$ (car dérivable sur cet intervalle),
  - $\times$ strictement croissante sur $]-\infty, +\infty[$.

  Ainsi, φ réalise une bijection de $]-\infty, +\infty[$ sur $I = \varphi(]-\infty, +\infty[)$. De plus :
$$\varphi(]-\infty, +\infty[) = \left] \lim_{x \to -\infty} \varphi(x), \lim_{x \to +\infty} \varphi(x) \right[=]0, +\infty[$$

$$\boxed{\text{La fonction } \varphi \text{ réalise une bijection de } \mathbb{R} \text{ sur } I =]0, +\infty[.}$$

□

6. Exprimer, pour tout y de I, $\varphi^{-1}(y)$.

Démonstration.
Soit $y \in I$. Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{array}{rcll}
\varphi^{-1}(y) = x & \Leftrightarrow & y = \varphi(x) & \\
& \Leftrightarrow & y = \ln(1 + e^x) & \\
& \Leftrightarrow & e^y = 1 + e^x & \textit{(car la fonction } x \mapsto e^x \textit{ est bijective sur } \mathbb{R}\textit{)} \\
& \Leftrightarrow & e^y - 1 = e^x & \\
& \Leftrightarrow & \ln(e^y - 1) = x & \textit{(car la fonction } x \mapsto \ln(x) \textit{ est bijective sur }]0, +\infty[\textit{)}
\end{array}$$

$$\boxed{\forall y \in I,\ \varphi^{-1}(y) = \ln(e^y - 1)}$$

Remarque
On remarque que la composition par ln est bien autorisée car, si $y \in I =]0, +\infty[$, alors $e^y \in]1, +\infty[$.
Et donc $e^y - 1 \in]0, +\infty[$. □

On considère la variable aléatoire réelle Y définie par : $Y = \varphi(X)$.

7. Justifier : $\mathbb{P}([Y \leqslant 0]) = 0$.

Démonstration.

- Remarquons tout d'abord :
$$Y(\Omega) = (\varphi(X))(\Omega) = \varphi\big(X(\Omega)\big) \subset \,]0, +\infty[$$
En effet, $X(\Omega) \subset \mathbb{R}$ et $\varphi(\mathbb{R}) = I = \,]0, +\infty[$ (d'après la question ***5.***)
- On obtient alors : $[Y \leqslant 0] = \varnothing$. Donc :
$$\mathbb{P}([Y \leqslant 0]) = \mathbb{P}(\varnothing) = 0$$
$$\boxed{\mathbb{P}([Y \leqslant 0]) = 0}$$

□

8. Déterminer la fonction de répartition de Y.

Démonstration.

- Tout d'abord : $Y(\Omega) \subset \,]0, +\infty[$.
- Soit $x \in \mathbb{R}$.
  - Si $x \leqslant 0$: Alors $[Y \leqslant x] = \varnothing$ car $Y(\Omega) \subset \,]0, +\infty[$. Donc, on a :
$$F_Y(x) = \mathbb{P}([Y \leqslant x]) = \mathbb{P}(\varnothing) = 0$$
  - Si $x > 0$.
$$\begin{aligned}
F_Y(x) &= \mathbb{P}([Y \leqslant x]) \\
&= \mathbb{P}([\varphi(X) \leqslant x]) \\
&= \mathbb{P}\big(\big[X \leqslant \varphi^{-1}(x)\big]\big) && \textit{(car } \varphi \textit{ est strictement croissante, donc } \varphi^{-1} \textit{ également)} \\
&= \mathbb{P}([X \leqslant \ln(\mathrm{e}^x - 1)]) \;=\; F_X(\ln(\mathrm{e}^x - 1)) \\
&= \frac{1}{1 + \exp(-\ln(\mathrm{e}^x - 1))} \\
&= \frac{1}{1 + \exp\left(\ln\left((\mathrm{e}^x - 1)^{-1}\right)\right)} \\
&= \frac{1}{1 + \frac{1}{\mathrm{e}^x - 1}} \;=\; \frac{1}{\frac{(\mathrm{e}^x - \cancel{1}) + \cancel{1}}{\mathrm{e}^x - 1}} \;=\; \frac{\mathrm{e}^x - 1}{\mathrm{e}^x} \\
&= \frac{\cancel{\mathrm{e}^x}\,(1 - \mathrm{e}^{-x})}{\cancel{\mathrm{e}^x}} \;=\; 1 - \mathrm{e}^{-x}
\end{aligned}$$
$$\boxed{F_Y : x \mapsto \begin{cases} 1 - \mathrm{e}^{-x} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leqslant 0 \end{cases}}$$

□

9. Reconnaître alors la loi de Y et donner, sans calcul, son espérance et sa variance.

Démonstration.

$$\boxed{\text{On reconnaît une loi exponentielle : } Y \hookrightarrow \mathcal{E}(1). \text{ On a alors } \mathbb{E}(Y) = \frac{1}{1} = 1 \text{ et } \mathbb{V}(Y) = \frac{1}{1^2} = 1.}$$

□

PARTIE III : Étude d'une convergence en loi

On considère une suite de variables aléatoires réelles $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, mutuellement indépendantes, de même densité f, où f a été définie dans la partie I.
On pose, pour tout n de $\mathbb{N}^*$: $T_n = \max(X_1, \dots, X_n)$ et $U_n = T_n - \ln(n)$.

10. a) Déterminer, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, la fonction de répartition de T_n.

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

- Soit $x \in \mathbb{R}$. On commence par noter que :

$$[T_n \leqslant x] = [X_1 \leqslant x] \ \cap \ \cdots \ \cap [X_n \leqslant x] = \bigcap_{i=1}^{n} \ [X_i \leqslant x]$$

- On obtient alors :

$$\begin{array}{rcll} F_{T_n}(x) & = & \mathbb{P}([T_n \leqslant x]) & \\ & = & \mathbb{P}\left(\bigcap\limits_{i=1}^{n} \ [X_i \leqslant x]\right) & \\ & = & \prod\limits_{i=1}^{n} \mathbb{P}([X_i \leqslant x]) & \textit{(car les v.a.r. } X_1, \dots, X_n \textit{ sont indépendantes)} \\ & = & \prod\limits_{i=1}^{n} \mathbb{P}([X_1 \leqslant x]) & \textit{(car les v.a.r. } X_1, \dots, X_n \textit{ ont même loi)} \\ & = & \big(\mathbb{P}([X_1 \leqslant x]\big)^n & \end{array}$$

- D'après la question ***3.*** : $\forall x \in \mathbb{R}$, $F_{X_1}(x) = \dfrac{1}{1+\mathrm{e}^{-x}}$.

$$\boxed{\text{On en déduit : } \forall x \in \mathbb{R},\ F_{T_n}(x) = \left(\dfrac{1}{1+\mathrm{e}^{-x}}\right)^n.}$$

□

b) En déduire : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall x \in \mathbb{R},\ \mathbb{P}([U_n \leqslant x]) = \left(1 + \dfrac{\mathrm{e}^{-x}}{n}\right)^{-n}$.

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{array}{rcll} \mathbb{P}([U_n \leqslant x]) & = & \mathbb{P}([T_n - \ln(n) \leqslant x]) & \\ & = & \mathbb{P}([T_n \leqslant x + \ln(n)]) & \\ & = & F_{T_n}(x+\ln(n)) & \\ & = & \left(\dfrac{1}{1+\exp(-(x+\ln(n)))}\right)^n & \textit{(d'après la question } \textbf{\textit{10.a)}}\textit{)} \\ & = & \Big(1+\exp(-x-\ln(n))\Big)^{-n} & \end{array}$$

Or : $\exp(-x-\ln(n)) = \mathrm{e}^{-x-\ln(n)} = \mathrm{e}^{-x}\ \mathrm{e}^{-\ln(n)} = \mathrm{e}^{-x}\ \mathrm{e}^{\ln(n^{-1})} = \dfrac{\mathrm{e}^{-x}}{n}$.

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R},\ \mathbb{P}([U_n \leqslant x]) = \left(1+\dfrac{\mathrm{e}^{-x}}{n}\right)^{-n}}$$

□

11. En déduire que la suite de variables aléatoires $(U_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en loi vers une variable aléatoire réelle à densité dont on précisera la fonction de répartition et une densité.

Démonstration.
Soit $x \in \mathbb{R}$. On cherche à déterminer, si elle exsite, $\lim\limits_{n\to+\infty} F_{U_n}(x)$.

- Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
$$F_{U_n}(x) = \left(1 + \frac{\mathrm{e}^{-x}}{n}\right)^{-n} = \exp\left(-n \ln\left(1 + \frac{\mathrm{e}^{-x}}{n}\right)\right)$$
- De plus : $\ln(1+u) \underset{u\to 0}{\sim} u$.
Or $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\mathrm{e}^{-x}}{n} = 0$, donc $\ln\left(1+\dfrac{\mathrm{e}^{-x}}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{\mathrm{e}^{-x}}{n}$. D'où :
$$-n \ln\left(1 + \frac{\mathrm{e}^{-x}}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} -\cancel{n}\,\frac{\mathrm{e}^{-x}}{\cancel{n}} = -\mathrm{e}^{-x}$$
- Or la fonction $x \mapsto \exp(x)$ est continue sur $\mathbb{R}$, donc, par composition de **limites** :
$$\lim_{n\to+\infty} \exp\left(-n \ln\left(1 + \frac{\mathrm{e}^{-x}}{n}\right)\right) = \exp\left(-\mathrm{e}^{-x}\right)$$
D'où :
$$\lim_{n\to+\infty} F_{U_n}(x) = \exp(-\mathrm{e}^{-x})$$
$$\boxed{\begin{array}{c}\text{On note } G \text{ la fonction définie sur } \mathbb{R} \text{ par } G : x \mapsto \exp(-\mathrm{e}^{-x}).\\ \text{On a alors } \lim\limits_{n\to+\infty} F_{U_n}(x) = G(x).\end{array}}$$
- Montrons que G est une fonction de répartition.
  - Tout d'abord : $\lim\limits_{x\to+\infty} -\mathrm{e}^{-x} = 0$. Donc, par continuité de exp en 0 :
$$\lim_{x\to+\infty} G(x) = \lim_{x\to+\infty} \exp(-\mathrm{e}^{-x}) = \mathrm{e}^0 = 1$$
  - De plus : $\lim\limits_{x\to-\infty} -\mathrm{e}^{-x} = -\infty$. D'où :
$$\lim_{x\to-\infty} G(x) = \lim_{x\to-\infty} \exp(-\mathrm{e}^{-x}) = 0$$
  - La fonction G est continue sur $\mathbb{R}$ car elle est la composée $h_2 \circ h_1$ des fonctions :
    × $h_1 : x \mapsto -\mathrm{e}^{-x}$ continue sur $\mathbb{R}$, et telle que $h_1(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}$.
    × $h_2 : y \mapsto \exp(y)$ continue sur $\mathbb{R}$.
  - Elle est dérivable sur $\mathbb{R}$ pour la même raison et, pour tout $x \in \mathbb{R}$:
$$g(x) = G'(x) = \mathrm{e}^{-x} \exp(-\mathrm{e}^{-x}) > 0$$
  Donc la fonction G est croissante sur $\mathbb{R}$.
$$\boxed{\text{La fonction } G \text{ est une fonction de répartition.}}$$

- Montrons que G est la fonction de répartition d'une v.a.r. à densité.
  - On vient de démontrer que G est continue sur $\mathbb{R}$.
  - La fonction G est aussi de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ car les fonctions h_1 et h_2 sont également de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

  La fonction G est la fonction de répartition d'une v.a.r. à densité que l'on notera V.

- Pour déterminer une densité de V, on dérive la fonction G sur $\mathbb{R}$ ($\mathbb{R} =]-\infty, +\infty[$ est bien un intervalle ouvert). On en déduit que g est bien une densité de V.

La suite (U_n) converge en loi vers la v.a.r. V de fonction de répartition $G : x \mapsto \exp(-\mathrm{e}^{-x})$ dont une densité est $g : x \mapsto \mathrm{e}^{-x} \exp(-\mathrm{e}^{-x})$.

Remarque

- Le programme officiel liste certaines propriétés d'une fonction de répartition F :
  1. F est croissante.
  2. F est continue à droite en tout point.
  3. $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = 1$.
  4. $\lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = 0$.

  Cependant, il n'est pas précisé qu'il s'agit là d'une caractérisation d'une fonction de répartition : toute fonction $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ qui vérifie les propriétés ***1.***, ***2.***, ***3.*** et ***4.*** peut être considérée comme la fonction de répartition d'une variable aléatoire.
- L'utilisation de la caractérisation ci-dessus ne semble apparaître que dans ce type de question traitant de la convergence en loi. Ce type de question apparaît aussi dans le sujet d'EML 2017. Il est donc conseillé de connaître la caractérisation ci-dessus. □