DS9

Exercice 1

On considère les éléments suivants de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$:

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad K = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On note E le sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ engendré par I, J et K.
Pour toute matrice M de E, on note $M^0 = I$, et si M est inversible, on note, pour tout entier naturel k, $M^{-k} = (M^{-1})^k$, et on rappelle qu'alors M^k est inversible et que $(M^k)^{-1} = M^{-k}$.

1. Déterminer la dimension de E.

2. Calculer J^2, JK, KJ et K^2.

3. Soit la matrice $L = I + J$.

a) Montrer, pour tout entier naturel n :

$$L^n = I + nJ + \frac{n(n-1)}{2}K$$

b) Vérifier que L est inversible et montrer, pour tout entier relatif n :

$$L^n = I + nJ + \frac{n(n-1)}{2}K$$

c) Exprimer, pour tout entier relatif n, L^n à l'aide de I, L, L^2 et n.

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & -3 & 3 \end{pmatrix}$ de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ et on note f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ représenté par la matrice A dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et e l'application identique de $\mathbb{R}^3$ dans lui-même.

4. Montrer que f admet une valeur propre et une seule que l'on déterminera.
Est-ce que f est diagonalisable ?

5. ***a)*** Soit $w = (1, 0, 0)$. Calculer $v = (f - e)(w)$ et $u = (f - e)(v)$.
Montrer que (u, v, w) est une base de $\mathbb{R}^3$.

b) Déterminer la matrice associée à f relativement à la base (u, v, w).

c) Montrer que f est un automorphisme de $\mathbb{R}^3$ et, pour tout entier relatif n, exprimer f^n à l'aide de e, f, f^2 et n.

Exercice 2

Dans cet exercice, θ désigne un réel strictement positif et n un entier naturel supérieur ou égal à 2.

Pour tout k de $\mathbb{N}$, on pose : $u_k = \dfrac{1}{1+\theta}\left(\dfrac{\theta}{1+\theta}\right)^k$.

1. Montrer que la suite $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ définit une loi de probabilité.

On considère maintenant une variable aléatoire X prenant ses valeurs dans $\mathbb{N}$ et dont la loi est donnée par :

$$\forall k \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}\left([X=k]\right) = u_k.$$

2. ***a)*** On pose $Y = X+1$. Reconnaître la loi de Y, puis en déduire l'espérance et la variance de X.

b) On rappelle que `grand(1, 1, 'geom', p)` renvoie une simulation d'une variable aléatoire géométrique de paramètre `p`. Compléter la fonction **Scilab** suivante pour qu'elle simule la variable aléatoire X :

```
function x = SimuX(theta)
    y = ................
    x = ................
endfunction
```

3. Dans cette question, on souhaite estimer le paramètre θ par la méthode du maximum de vraisemblance. Pour ce faire, on considère un échantillon $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ composé de variables aléatoires indépendantes ayant toutes la même loi que X et on introduit $\mathcal{L}$, de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$, définie par :

$$\forall \theta \in \mathbb{R}_+^*,\ \mathcal{L}(\theta) = \prod_{k=1}^{n} \mathbb{P}\left([X_k = x_k]\right)$$

où $x_1, x_2, \dots, x_n$ désignent des entiers naturels éléments de $X(\Omega)$.
L'objectif est de chosir la valeur de θ qui rend $\mathcal{L}(\theta)$ maximale.

a) Écrire $\ln\left(\mathcal{L}(\theta)\right)$ en fonction de θ et de $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} x_k$.

b) On considère la fonction φ définie par :

$$\forall \theta \in \left]0, +\infty\right[,\ \varphi(\theta) = S_n \ln(\theta) - (S_n + n)\ln(1+\theta)$$

Montrer que la fonction φ admet un maximum, atteint en un seul réel que l'on notera $\widehat{\theta}_n$ et que l'on exprimera en fonction de S_n. Que représente $\widehat{\theta}_n$ pour la fonction $\mathcal{L}$?

4. On pose dorénavant : $T_n = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} X_i$.
La variable T_n est appelée estimateur du maximum de vraisemblance pour θ.

a) Vérifier que T_n est un estimateur sans biais de θ.

b) Calculer le risque quadratique $r_\theta(T_n)$ de T_n.

c) En déduire que T_n est un estimateur convergent de θ.

Exercice 3

Dans tout l'exercice, les variables aléatoires sont définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$. Dans la suite, λ désigne un réel strictement positif.

1. Soit X une variable aléatoire suivant la loi exponentielle de paramètre λ.

a) Déterminer la fonction : $x \mapsto \mathbb{P}([X > x])$ (appelée *fonction de survie de* X).

b) Pour tous nombres réels strictement positifs x et y, calculer la probabilité conditionnelle $\mathbb{P}_{[X>x]}([X > x+y])$; justifier alors que, si X modélise la durée de vie d'un phénomène, on dise de ce dernier qu'il est « sans vieillissement ».

2. Soit $(X_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes, de même loi exponentielle de paramètre λ. Pour tout entier naturel n non nul, on pose : $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} X_k$.

a) Déterminer l'espérance et la variance de S_n.

b) Démontrer par récurrence que, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, la variable aléatoire S_n admet pour densité la fonction f_n :

$$t \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0\,; \\ \dfrac{\lambda^n}{(n-1)!}\, \mathrm{e}^{-\lambda t}\, t^{n-1} & \text{si } t \geqslant 0. \end{cases}$$

Pour cela, on admettra que, si U et V sont des variables aléatoires indépendantes admettant respectivement pour densité les fonctions f_U et f_V, alors la variable aléatoire $U+V$ admet pour densité la fonction f_{U+V} définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f_{U+V}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_U(x) f_V(t-x)\, dx$$

Exercice 4

Toutes les variables aléatoires considérées dans cet exercice sont définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$. On considère une suite de variables aléatoires réelles $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ indépendantes, de même loi, à valeurs dans $[0, \theta]$, ayant pour fonction de densité :

$$f_\theta(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \dfrac{2x}{\theta^2} & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant \theta \\ 0 & \text{si } x > \theta \end{cases}$$

où θ est un paramètre réel strictement positif.
On note F_θ la fonction de répartition commune aux variables $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$.

1. **Étude d'un premier estimateur de θ**

a) Pour tout entier naturel non nul n, on considère la variable aléatoire $M_n = \sup(X_1, \ldots, X_n)$. Déterminer une densité de M_n.

b) Calculer les moments d'ordre 1 et 2 de M_n.

c) Montrer que M_n est un estimateur biaisé de θ. Est-il asymptotiquement sans biais ?

d) Montrer que la suite $(M_n)_n$ est une suite d'estimateurs convergente de θ.

2. **Étude d'un second estimateur de θ**

a) Donner l'espérance et la variance de la variable $Y_n = \dfrac{1}{n} \sum\limits_{i=1}^{n} X_i$.

b) À l'aide de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, montrer que la suite $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une suite d'estimateurs convergents de $\dfrac{2\theta}{3}$.

c) Déduire de la variable Y_n un estimateur sans biais Z_n de θ.

d) Calculer le risque quadratique de Z_n.

e) Montrer que la suite d'estimateurs $(Z_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est convergente.

3. Comparer les risques quadratiques de M_n et de Z_n.
Quelle méthode choisiriez-vous pour estimer la valeur du paramètre θ ?

4. **Un premier intervalle de confiance asymptotique pour θ**

a) Montrer que la suite de variables aléatoires $\left(2\sqrt{2n}\ \dfrac{Z_n - \theta}{\theta}\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge en loi vers une variable aléatoire de loi normale centrée réduite.

b) Dans la suite, on note $\alpha \in \,]0, 1[$ et on note Φ la fonction de répartition associée à loi normale centrée réduite. Enfin, on note $t_{1-\frac{\alpha}{2}}$ l'unique réel tel que $\Phi(t_{1-\frac{\alpha}{2}}) = 1 - \frac{\alpha}{2}$.
Justifier l'existence de $t_{1-\frac{\alpha}{2}}$.

c) Justifier que : $\lim\limits_{n \to +\infty} \mathbb{P}\left(\left[-t_{1-\frac{\alpha}{2}} \leqslant 2\sqrt{2n}\ \dfrac{Z_n - \theta}{\theta} \leqslant t_{1-\frac{\alpha}{2}}\right]\right) = 1 - \alpha$.
En déduire un intervalle de confiance asymptotique de θ au niveau de confiance 95%.
(on donne $\Phi(1,96) = 0,975$*)*

5. **Un second intervalle de confiance asymptotique pour θ**

a) Montrer que la suite de variables aléatoires $\left(2n\left(1 - \dfrac{M_n}{\theta}\right)\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge en loi vers une variable aléatoire W telle que W suit la loi exponentielle $\mathcal{E}(1)$.

b) Calculer $\mathbb{P}([-\ln(0,975) \leqslant W \leqslant -\ln(0,025)])$.

c) En déduire un nouvel intervalle de confiance asymptotique de θ au niveau de confiance 95%.

Exercice 5

1. On considère la fonction f définie pour tout x réel par : $f(x) = \begin{cases} 1 - |x| & \text{si } x \in [-1, 1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

a) Calculer $\displaystyle\int_0^1 f(x)\ dx$. En déduire sans calcul $\displaystyle\int_{-1}^0 f(x)\ dx$.

b) Vérifier que f peut être considérée comme une densité.

On considère dorénavant une variable aléatoire X, définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, et admettant f comme densité.

2. *a)* Établir l'existence de l'espérance de X, puis donner sa valeur.

b) Établir l'existence de la variance de X, puis donner sa valeur.

3. Déterminer la fonction de répartition de X, notée F_X.