DS9

Exercice 1 /34

On considère les éléments suivants de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$:

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad K = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On note E le sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ engendré par I, J et K.
Pour toute matrice M de E, on note $M^0 = I$, et si M est inversible, on note, pour tout entier naturel k, $M^{-k} = (M^{-1})^k$, et on rappelle qu'alors M^k est inversible et que $(M^k)^{-1} = M^{-k}$.

1. Déterminer la dimension de E.

- 1 pt : (I, J, K) **libre**

- 1 pt : (I, J, K) **génératrice**

- 1 pt : $\dim(E) = 3$

2. Calculer J^2, JK, KJ et K^2.

- 2 pts (0.5 pour $J^2 = K$, 0.5 pour $JK = 0$, 0.5 pour $KJ = 0$, 0.5 pour $K^2 = 0$)

3. Soit la matrice $L = I + J$.

a) Montrer, pour tout entier naturel n :

$$L^n = I + nJ + \frac{n(n-1)}{2}K$$

- 1 pt : I **et** J **commutent**

- 1 pt : $n \geqslant 2$

- 1 pt : $\forall k \geqslant 3,\ J^k = 0$

- 1 pt : utiliser relations de la question *2.*

- 1 pt : cas $n = 0$

- 1 pt : cas $n = 1$

b) Vérifier que L est inversible et montrer, pour tout entier relatif n :

$$L^n = I + nJ + \frac{n(n-1)}{2}K$$

- 1 pt : L **est triangulaire à cœfficients diagonaux tous non nuls, donc inversible**

- 3 pts : $L^{-n} = I + (-n)J + \dfrac{(-n)(-n-1)}{2}K$

c) Exprimer, pour tout entier relatif n, L^n à l'aide de I, L, L^2 et n.

- 1 pt : $J = L - I$

- 1 pt : $K = L^2 - 2L + I$

- 2 pts : $L^n = \dfrac{(n-1)(n-2)}{2}I - n(n-2)L + \dfrac{n(n-1)}{2}L^2$

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & -3 & 3 \end{pmatrix}$ de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ et on note f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ représenté par la matrice A dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et e l'application identique de $\mathbb{R}^3$ dans lui-même.

4. Montrer que f admet une valeur propre et une seule que l'on déterminera.
Est-ce que f est diagonalisable ?

- 3 pts : $\text{Sp}(f) = \{1\}$

- 2 pts : par l'absurde, f n'est pas diagonalisable

5. ***a)*** Soit $w = (1, 0, 0)$. Calculer $v = (f - e)(w)$ et $u = (f - e)(v)$.
Montrer que (u, v, w) est une base de $\mathbb{R}^3$.

- 1 pt : $v = (-1, 1, 2)$

- 1 pt : $u = (1, 0, -1)$

- 1 pt : (u, v, w) **libre**

- 1 pt : $\text{Card}((u, v, w)) = 3 = \dim(\mathbb{R}^3)$

b) Déterminer la matrice associée à f relativement à la base (u, v, w).

- 3 pts : $\text{Mat}_{(u,v,w)}(f(w)) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\text{Mat}_{(u,v,w)}(f(v)) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\text{Mat}_{(u,v,w)}(f(u)) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

c) Montrer que f est un automorphisme de $\mathbb{R}^3$ et, pour tout entier relatif n, exprimer f^n à l'aide de e, f, f^2 et n.

- 1 pt : f automorphisme

- 1 pt : $f^n = \dfrac{(n-1)(n-2)}{2} e - n(n-2) f + \dfrac{n(n-1)}{2} f^2$

Exercice 2 /24

Dans cet exercice, θ désigne un réel strictement positif et n un entier naturel supérieur ou égal à 2.

Pour tout k de $\mathbb{N}$, on pose : $u_k = \dfrac{1}{1+\theta} \left(\dfrac{\theta}{1+\theta} \right)^k$.

1. Montrer que la suite $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ définit une loi de probabilité.

- 1 pt : $u_k \geqslant 0$

- 2 pts : $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} u_k = 1$ **(dont 1 pt pour convergence avant le symbole** $\sum\limits_{k=0}^{+\infty}$ **)**

On considère maintenant une variable aléatoire X prenant ses valeurs dans $\mathbb{N}$ et dont la loi est donnée par :

$$\forall k \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}([X = k]) = u_k.$$

2. ***a)*** On pose $Y = X + 1$. Reconnaître la loi de Y, puis en déduire l'espérance et la variance de X.

- 1 pt : $\mathbb{P}([Y = k]) = \dfrac{1}{1+\theta} \left(1 - \dfrac{1}{1+\theta}\right)^{k-1}$

- 1 pt : $Y \hookrightarrow \mathcal{G}\left(\dfrac{1}{1+\theta}\right)$

- 1 pt : existence espérance et variance

- 1 pt : $\mathbb{E}(X) = \theta$

- 1 pt : $\mathbb{V}(X) = \theta(1 + \theta)$

b) On rappelle que `grand(1, 1, 'geom', p)` renvoie une simulation d'une variable aléatoire géométrique de paramètre `p`. Compléter la fonction **Scilab** suivante pour qu'elle simule la variable aléatoire X :

```
function x = SimuX(theta)
    y = ...............
    x = ...............
endfunction
```

- **1 pt :** `y = grand(1,1,'geom',1/(theta+1))`
- **1 pt :** `x = y-1`

3. Dans cette question, on souhaite estimer le paramètre θ par la méthode du maximum de vraisemblance. Pour ce faire, on considère un échantillon $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ composé de variables aléatoires indépendantes ayant toutes la même loi que X et on introduit $\mathcal{L}$, de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$, définie par :

$$\forall \theta \in \mathbb{R}_+^*, \ \mathcal{L}(\theta) = \prod_{k=1}^{n} \mathbb{P}\left([X_k = x_k]\right)$$

où $x_1, x_2, \ldots, x_n$ désignent des entiers naturels éléments de $X(\Omega)$.
L'objectif est de chosir la valeur de θ qui rend $\mathcal{L}(\theta)$ maximale.

a) Écrire $\ln\left(\mathcal{L}(\theta)\right)$ en fonction de θ et de $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} x_k$.

- **3 pts :** $\ln(\mathcal{L}(\theta)) = S_n \ln(\theta) - (S_n + n) \ln(1+\theta)$

b) On considère la fonction φ définie par :

$$\forall \theta \in \,]0, +\infty[, \ \varphi(\theta) = S_n \ln(\theta) - (S_n + n) \ln(1+\theta)$$

Montrer que la fonction φ admet un maximum, atteint en un seul réel que l'on notera $\widehat{\theta}_n$ et que l'on exprimera en fonction de S_n. Que représente $\widehat{\theta}_n$ pour la fonction $\mathcal{L}$?

- **1 pt :** φ **dérivable et** $\varphi'(\theta) = S_n \dfrac{1}{\theta} - (S_n + n) \dfrac{1}{1+\theta}$
- **1 pt :** $\varphi'(\theta) \geqslant 0$ **ssi** $\dfrac{S_n}{n} \geqslant \theta$ + **variations de** φ
- **1 pt :** $\hat{\theta}_n = \dfrac{S_n}{n}$ **maximum de** φ
- **1 pt :** $\hat{\theta}_n$ **maximum de** $\mathcal{L}$

4. On pose dorénavant : $T_n = \dfrac{1}{n} \sum\limits_{i=1}^{n} X_i$.
La variable T_n est appelée estimateur du maximum de vraisemblance pour θ.

a) Vérifier que T_n est un estimateur sans biais de θ.

- **3 pts : 1 pt pour existence dubiais de** T_n**, 1 pt pour linéarité de l'espérance, 1 pt pour** $E_\theta(X_1) = \theta$

b) Calculer le risque quadratique $r_\theta(T_n)$ de T_n et vérifier que $\lim\limits_{n \to +\infty} r_\theta(T_n) = 0$.

- **1 pt : existence du risque quadratique**
- **1 pt : décomposition biais / variance**
- **1 pt :** (X_i) **indépendantes**

c) En déduire que T_n est un estimateur convergent de θ.

- **1 pt :** $\lim\limits_{n \to +\infty} r_\theta(T_n) = 0$

Exercice 3

Dans tout l'exercice, les variables aléatoires sont définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$. Dans la suite, λ désigne un réel strictement positif.

1. Soit X une variable aléatoire suivant la loi exponentielle de paramètre λ.

a) Déterminer la fonction : $x \mapsto \mathbb{P}([X > x])$ (appelée *fonction de survie de X*).

- 1 pt : survie $x \mapsto \begin{cases} \mathrm{e}^{-\lambda x} & \textbf{si } x \geqslant 0 \\ 1 & \textbf{si } x < 0 \end{cases}$

b) Pour tous nombres réels strictement positifs x et y, calculer la probabilité conditionnelle $\mathbb{P}_{[X>x]}([X > x + y])$; justifier alors que, si X modélise la durée de vie d'un phénomène, on dise de ce dernier qu'il est « sans vieillissement ».

- 1 pt : $[X > x + y] \subset [X > x]$ **car** $y > 0$

- 1 pt : $x + y \geqslant 0$ **et** $x \geqslant 0$ **et donc** $\mathbb{P}([X > x + y]) = \mathrm{e}^{-(x+y)}$ **et** $\mathbb{P}([X > x]) = \mathrm{e}^{-x}$

- 1 pt : résultat $\mathbb{P}_{[X>x]}([X > x + y]) = \mathbb{P}([X > y])$

- 1 pt : interprétation

2. Soit $(X_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes, de même loi exponentielle de paramètre λ. Pour tout entier naturel n non nul, on pose :

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k.$$

a) Déterminer l'espérance et la variance de S_n.

- 2 pts : $\mathbb{E}(S_n) = \dfrac{n}{\lambda}$ **(1 pt pour linéarité, 1 pr pour** $\mathbb{E}(X_i)$**)**

- 2 pts : $\mathbb{V}(S_n) = \dfrac{n}{\lambda^2}$ **(1 pt pour indépendance, 1 pt pour** $\mathbb{V}(X_i)$**)**

b) Démontrer par récurrence que, pour tout n de$\mathbb{N}^*$, la variable aléatoire S_n admet pour densité la fonction f_n :

$$t \longmapsto \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0\,; \\ \dfrac{\lambda^n}{(n-1)!}\mathrm{e}^{-\lambda t} t^{n-1} & \text{si } t \geqslant 0. \end{cases}$$

Pour cela, on admettra que, si U et V sont des variables aléatoires indépendantes admettant respectivement pour densité les fonctions f_U et f_V, alors la variable aléatoire $U + V$ admet pour densité la fonction f_{U+V} définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f_{U+V}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_U(x) f_V(t - x)\, dx.$$

- 1 pt : initialisation

- 5 pts : hérédité

- × **2 pts pour utilisation résultat énoncé (1 pt pour faire apparaître** $S_{n+1} = S_n + X_{n+1}$**, 1 pt pour indépendance via lemme des coalitions)**
- × **1 pt pour** $f_{S_{n+1}}(t) = 0$ **si** $t \in \,]-\infty, 0[$**,**
- × **1 pt pour** $f_{S_{n+1}}(t) = \displaystyle\int_0^t \ldots$ **si** $t \in [0, +\infty[$**,**
- × **1 pt calcul de** $\displaystyle\int_0^t \ldots$

Exercice 4

Toutes les variables aléatoires considérées dans cet exercice sont définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$. On considère une suite de variables aléatoires réelles $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$ indépendantes et identiquement distribuées, ayant pour fonction de densité :

$$f_\theta(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \dfrac{2x}{\theta^2} & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant \theta \\ 0 & \text{si } x > \theta \end{cases}$$

où θ est un paramètre réel strictement positif.
On note F_θ la fonction de répartition commune aux variables $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$.

1. **Étude d'un premier estimateur de θ**

a) Pour tout entier naturel non nul n, on considère la variable aléatoire $M_n = \sup(X_1, \dots, X_n)$. Déterminer une densité de M_n.

- 2 pts : détermination $F_\theta : x \mapsto \begin{cases} 0 & \textbf{si } x < 0 \\ \dfrac{x^2}{\theta^2} & \textbf{si } x \in [0, \theta] \\ 1 & \textbf{si } x > \theta \end{cases}$

- 3pts : détermination $F_{M_n} : x \mapsto \begin{cases} 0 & \textbf{si } x < 0 \\ \left(\dfrac{x^2}{\theta^2}\right)^n & \textbf{si } x \in [0, \theta] \\ 1 & \textbf{si } x > \theta \end{cases}$

- 1 pt : M_n **est une v.a.r. à densité**

- 2 pts : $f_{M_n} : x \mapsto \begin{cases} 0 & \textbf{si } x < 0 \\ n \left(\dfrac{x^2}{\theta^2}\right)^{n-1} \dfrac{2x}{\theta^2} = \dfrac{2n}{\theta^{2n}} x^{2n-1} & \textbf{si } x \in \,]0, \theta[\\ 0 & \textbf{si } x > \theta \end{cases}$

(dont 1 pt pour dérivation sur les intervalles ouverts)

b) Calculer les moments d'ordre 1 et 2 de M_n.

- 1 pt : rédaction esp. / convergence absolue

- 1 pt : $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t \ f_{M_n}(t) \ dt = \int_0^\theta t \ f_{M_n}(t) \ dt$

- 1 pt : La fonction $t \mapsto t f_{M_n}(t)$ **est** $\mathcal{C}^0_m$ **sur** $[0, \theta]$

- 1 pt : $\mathbb{E}_\theta(M_n) = \dfrac{2n}{2n+1} \ \theta$

- 2 pts : de même pour $\mathbb{E}_\theta({M_n}^2) = \dfrac{n}{n+1} \ \theta^2$

c) Montrer que M_n est un estimateur biaisé de θ. Est-il asymptotiquement sans biais ?

- 1 pt : biaisé

- 1 pt : asymptotiquement sans biais

d) Montrer que la suite $(M_n)_n$ est une suite d'estimateurs convergente de θ.

- 2 pts : $r_\theta(M_n) = \dfrac{1}{(n+1)(2n+1)}\ \theta^2$ (quelle que soit la méthode)

- 1 pt : $r_\theta(M_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$

2. **Étude d'un second estimateur de θ**

a) Donner l'espérance et la variance de la variable $Y_n = \dfrac{1}{n} \sum\limits_{i=1}^{n} X_i$.

- 1 pt : Y_n admet une espérance

- 1 pt : linéarité de l'espérance

- 1 pt : $\mathbb{E}_\theta(Y_n) = \mathbb{E}_\theta(X_1) = \dfrac{2}{3}\ \theta$

- 1 pt : Y_n admet une variance

- 1 pt : indépendance des v.a.r. X_i

- 1 pt : formule de K-H

- 1 pt : $\mathbb{V}_\theta(Y_n) = \dfrac{1}{18n}\ \theta^2$

b) À l'aide de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, montrer que la suite $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite d'estimateurs convergents de $\dfrac{2\theta}{3}$.

- 2 pts : inégalité de BT (1 pt expression, 1pt pour hypothèses)

- 1 pt : théorème d'encadrement

c) Déduire de la variable Y_n un estimateur sans biais Z_n de θ.

- 1 pt : $Z_n = \dfrac{3}{2}\ Y_n$

d) Calculer le risque quadratique de Z_n.

- 1 pt : décomp biais / variance

- 1 pt : $r_\theta\big(Z_n\big) = \dfrac{\theta^2}{8n}$

e) Montrer que la suite d'estimateurs $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente.

- 1 pt : $r_\theta\big(Z_n\big) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$

3. Comparer les risques quadratiques de M_n et de Z_n.
Quelle méthode choisiriez-vous pour estimer la valeur du paramètre θ ?

- 1 pt : $r_\theta\big(M_n\big) \leqslant r_\theta\big(Z_n\big) \quad \Leftrightarrow \quad 0 \leqslant 2n^2 - 5n + 1$

- 1 pt : étude $P(X) = 2X^2 - 5X + 1$

4. **Un premier intervalle de confiance asymptotique pour θ**

a) Montrer que la suite de variables aléatoires $\left(2\sqrt{2n}\ \dfrac{Z_n - \theta}{\theta}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en loi vers une variable aléatoire de loi normale centrée réduite.

- 1 pt : $Z_n = \dfrac{1}{n} \sum\limits_{i=1}^{n} \left(\dfrac{3}{2}\ X_i\right)$ et on note $R_i = \dfrac{3}{2}\ X_i$

- 2 pts : TCL (1 pt hypothèses, 1 pt expression)

- 1 pt : expression $\overline{R_n}^*$

b) Dans la suite, on note $\alpha \in]0,1[$ et on note Φ la fonction de répartition associée à loi normale centrée réduite. Enfin, on note $t_{1-\frac{\alpha}{2}}$ l'unique réel tel que $\Phi(t_{1-\frac{\alpha}{2}}) = 1 - \frac{\alpha}{2}$.
Justifier l'existence de $t_{1-\frac{\alpha}{2}}$.

- **1 pt : Φ continue / strictement croissante**
- **1 pt : bijection de** $]-\infty, +\infty[$ **sur** $]0,1[$
- **1 pt :** $(1 - \frac{\alpha}{2}) \in]0,1[$

c) Justifier que : $\lim\limits_{n \to +\infty} \mathbb{P}\left(\left[-t_{1-\frac{\alpha}{2}} \leqslant 2\sqrt{2n}\ \dfrac{Z_n - \theta}{\theta} \leqslant t_{1-\frac{\alpha}{2}}\right]\right) = 1 - \alpha$.
En déduire un intervalle de confiance asymptotique de θ au niveau de confiance 95%.
(on donne $\Phi(1,96) = 0,975$)

- **1 pt :** $\lim\limits_{n \to +\infty} \mathbb{P}\left(\left[-t_{1-\frac{\alpha}{2}} \leqslant 2\sqrt{2n}\ \dfrac{Z_n - \theta}{\theta} \leqslant t_{1-\frac{\alpha}{2}}\right]\right) = \mathbb{P}\left(\left[-t_{1-\frac{\alpha}{2}} \leqslant Z \leqslant t_{1-\frac{\alpha}{2}}\right]\right)$
- **1 pt :** $\mathbb{P}\left(\left[-t_{1-\frac{\alpha}{2}} \leqslant Z \leqslant t_{1-\frac{\alpha}{2}}\right]\right) = 1 - \alpha$
- **2 pts : isoler θ (**$\mathbb{P}\left(\left[-t_{1-\frac{\alpha}{2}} \ \leqslant\ 2\sqrt{2n}\ \dfrac{Z_n - \theta}{\theta}\ \leqslant\ t_{1-\frac{\alpha}{2}}\right]\right) = \mathbb{P}\left(\left[\dfrac{Z_n}{1 - \frac{t_{1-\frac{\alpha}{2}}}{2\sqrt{2n}}} \leqslant \theta\ \leqslant\ \dfrac{Z_n}{1 + \frac{t_{1-\frac{\alpha}{2}}}{2\sqrt{2n}}}\right]\right)$**)**

5. **Un second intervalle de confiance asymptotique pour θ**

a) Montrer que la suite de variables aléatoires $\left(2n\left(1 - \dfrac{M_n}{\theta}\right)\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge en loi vers une variable aléatoire W telle que W suit la loi exponentielle $\mathcal{E}(1)$.

- **3 pts :** $F_{Q_n} : x \mapsto \begin{cases} 0 & \textbf{si } x < 0 \\ 1 - \left(1 - \dfrac{x}{2n}\right)^{2n} & \textbf{si } x \in [0, 2n] \\ 1 & \textbf{si } x > 2n \end{cases}$
- **1 pt : si $x \leqslant 0$:** $F_{Q_n}(x) = 0 \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$
- **1 pt : si $x > 0$:** $F_{Q_n}(x) \ = \ 1 - \left(1 - \dfrac{x}{2n}\right)^{2n}$ **si n suffisamment grand**
- **1 pt :** $\lim\limits_{n \to +\infty} F_{Q_n}(x) \ = \ \lim\limits_{n \to +\infty} 1 - \left(1 - \dfrac{x}{2n}\right)^{2n} \ = \ 1 - \mathrm{e}^{-x}$

b) Calculer $\mathbb{P}([-\ln(0,975) \leqslant W \leqslant -\ln(0,025)])$.

- **1 pt : calcul** $\mathbb{P}([-\ln(0,975) \leqslant W \leqslant -\ln(0,025)]) = 0,95$

c) En déduire un nouvel intervalle de confiance asymptotique de θ au niveau de confiance 95%.

- **1 pt :** $\lim\limits_{n \to +\infty} \mathbb{P}\left(\left[-\ln(0,975) \leqslant 2n\ \left(1 - \dfrac{M_n}{\theta}\right) \leqslant -\ln(0,025)\right]\right) = \mathbb{P}([-\ln(0,975) \leqslant W \leqslant -\ln(0,025)]) = 0,95$
- **2 pts : isoler θ :** $\mathbb{P}\left(\left[u \leqslant 2n\ \left(1 - \dfrac{M_n}{\theta}\right) \leqslant v\right]\right) = \mathbb{P}\left(\left[\dfrac{M_n}{1 - \frac{u}{2n}} \leqslant \theta \leqslant \dfrac{M_n}{1 - \frac{v}{2n}}\right]\right)$

Exercice 5

1. On considère la fonction f définie pour tout x réel par : $f(x) = \begin{cases} 1-|x| & \text{si } x \in [-1,1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

a) Calculer $\displaystyle\int_0^1 f(x)\ dx$. En déduire sans calcul $\displaystyle\int_{-1}^0 f(x)\ dx$.

- 1 pt : f continue sur $[0,1]$

- 1 pt : $\displaystyle\int_0^1 f(t)\ dt = \frac{1}{2}$

- 1 pt : f paire

- 1 pt : $\displaystyle\int_{-1}^0 f(t)\ dt = \frac{1}{2}$

b) Vérifier que f peut être considérée comme une densité.

- 1 pt : f continue sur $\mathbb{R}$ sauf éventuellement en -1 **et** 1

- 1 pt : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) \geqslant 0$

- 1 pts : $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\ dt = 1$

On considère dorénavant une variable aléatoire X, définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, et admettant f comme densité.

2. *a)* Établir l'existence de l'espérance de X, puis donner sa valeur.

- 1 pt : convergence absolue

- 1 pt : f est nulle en dehors de $[-1,1]$

- 1 pt : $t \mapsto t\,f(t)$ **continue sur** $[-1,1]$

- 2 pts : $\mathbb{E}(X) = \displaystyle\int_{-1}^1 t\,f(t)\ dt = 0$

b) Établir l'existence de la variance de X, puis donner sa valeur.

- 1 pt : convergence absolue

- 1 pt : $t \mapsto t^2\,f(t)$ **continue sur** $[-1,1]$

- 2 pts : $\mathbb{E}(X^2) = \displaystyle\int_{-1}^1 t^2\,f(t)\ dt = \frac{1}{6}$

- 1 pt : $\mathbb{V}(X) = \dfrac{1}{6}$

3. Déterminer la fonction de répartition de X, notée F_X.

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < -1 \\ \dfrac{1}{2} + x + \dfrac{x^2}{2} & \text{si } -1 \leqslant x \leqslant 0 \\ \dfrac{1}{2} + x - \dfrac{x^2}{2} & \text{si } 0 < x \leqslant 1 \\ 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

- 1 pt : si $x < -1$, $F_X(x) = 0$

- 1 pt : si $x > 1$, $F_X(x) = 1$

- 1 pt : si $x \in [-1,0]$, $F_X(x) = \dfrac{1}{2} + x + \dfrac{x^2}{2}$

- 1 pt : si $x \in [0,1]$, $F_X(x) = \dfrac{1}{2} + x - \dfrac{x^2}{2}$