DS9

On considère les éléments suivants de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$:

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad K = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On note E le sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ engendré par I, J et K.
Pour toute matrice M de E, on note $M^0 = I$, et si M est inversible, on note, pour tout entier naturel k, $M^{-k} = (M^{-1})^k$, et on rappelle qu'alors M^k est inversible et que $(M^k)^{-1} = M^{-k}$.

1. Déterminer la dimension de E.

Démonstration.
Par définition : $E = \mathrm{Vect}\,(I, J, K)$

- Montrons que la famille (I, J, K) est libre.
  Soit $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3$. Supposons : $\lambda_1 \cdot I + \lambda_2 \cdot J + \lambda_3 \cdot K = 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})}$. Alors :

$$\lambda_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \lambda_3 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

  Donc :

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 \\ 0 & \lambda_1 & \lambda_2 \\ 0 & 0 & \lambda_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

  On obtient alors : $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$.

$$\boxed{\text{La famille } (I, J, K) \text{ est libre.}}$$

- En résumé, la famille (I, J, K) :
  - × est libre, d'après ce qui précède,
  - × engendre E, par définition.

$$\boxed{\text{La famille } (I, J, K) \text{ est une base de } E.}$$

$$\boxed{\dim(E) = \mathrm{Card}((I, J, K)) = 3}$$

□

2. Calculer J^2, JK, KJ et K^2.

Démonstration.

- $J^2 = J \times J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = K$

$$\boxed{J^2 = K}$$

- $JK = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$$\boxed{JK = 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})}}$$

$$KJ = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{KJ = 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})}}$$

$$K^2 = K \times K = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{K^2 = 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})}}$$

Remarque
Pour le calcul de KJ et K^2, on pouvait rédiger de la façon suivante :

- $KJ = J^2 \times J = J^3 = J \times J^2 = JK = 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})}$
- $K^2 = J^2 \times J^2 = J^4 = J \times J^3 = J \times 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})} = 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})}$ □

3. Soit la matrice $L = I + J$.

a) Montrer, pour tout entier naturel n :

$$L^n = I + nJ + \frac{n(n-1)}{2}K$$

Démonstration.

- Les matrices I et J commutent : $I \times J = J = J \times I$.
  Soit $n \geqslant 2$. D'après la formule du binôme de Newton :

$$\begin{aligned} L^n = (I+J)^n &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} I^{n-k} J^k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} J^k && \textit{(car } I^{n-k} = I\textit{)} \\ &= \sum_{k=0}^{2} \binom{n}{k} J^k + \sum_{k=3}^{n} \binom{n}{k} J^k && \textit{(car } n \geqslant 2\textit{)} \\ &= \sum_{k=0}^{2} \binom{n}{k} J^k && \textit{(car } J^k = 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})} \textit{ pour tout } k \geqslant 3 \textit{ par récurrence immédiate)} \\ &= \binom{n}{0} J^0 + \binom{n}{1} J^1 + \binom{n}{2} J^2 \\ &= I + nJ + \frac{n(n-1)}{2}K && \textit{(d'après la question précédente)} \end{aligned}$$

- On remarque de plus : $L^0 = I$ et $L^1 = L = I + J$.
  Donc la formule reste valable pour $n = 0$ et $n = 1$.

$$\boxed{\text{On en déduit : } \forall n \in \mathbb{N},\ L^n = I + nJ + \frac{n(n-1)}{2}K.}$$

Remarque

- Afin de démontrer : $\forall k \geqslant 3$, $J^k = 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})}$, on peut procéder de manière directe.
  En effet, pour tout $k \geqslant 3$:

$$J^k = J^3 \times J^{k-3} = 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})} \times J^{k-3} = 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})}$$

(on peut considérer J^{k-3} car $k - 3 \geqslant 0$)

- Le résultat étant donné dans l'énoncé, il est possible de traiter cette question par récurrence.
  Démontrons par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$ où $\mathcal{P}(n)$: $L^n = I + n\ J + \dfrac{n(n-1)}{2}\ K$.

  ► **Initialisation** :

  × D'une part : $L^0 = I$.

  × D'autre part : $I + 0\ J + \dfrac{0(0-1)}{2}\ K = I$

  D'où $\mathcal{P}(0)$.

  ► **Hérédité** : soit $n \in \mathbb{N}$.

  Supposons $\mathcal{P}(n)$ et démontrons $\mathcal{P}(n+1)$ (*i.e.* $L^{n+1} = I + (n+1)\ J + \dfrac{(n+1)n}{2}\ K$).

$$\begin{array}{rcll}
L^{n+1} & = & L^n\ L & \\
& = & \left(I + n\ J + \dfrac{n(n-1)}{2}\ K\right)\ (I+J) & \textit{(par hypohèse de récurrence)} \\
& = & \left(I + n\ J + \dfrac{n(n-1)}{2}\ K\right) + \left(J + n\ J^2 + \dfrac{n(n-1)}{2}\ \cancel{KJ}\right) & \\
& = & I + (n+1)\ J + \left(\dfrac{n(n-1)}{2} + n\right)\ K & \textit{(car } J^2 = K\textit{)} \\
& = & I + (n+1)\ J + n\ \left(\dfrac{n-1}{2} + 1\right)\ K & \\
& = & I + (n+1)\ J + n\ \dfrac{n+1}{2}\ K &
\end{array}$$

  D'où $\mathcal{P}(n+1)$.

  Ainsi, par principe de récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$. □

b) Vérifier que L est inversible et montrer, pour tout entier relatif n :

$$L^n = I + nJ + \frac{n(n-1)}{2}K$$

Démonstration.

- On calcule :

$$L = I + J = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

  L est une matrice triangulaire supérieure dont les cœfficients diagonaux sont tous non nuls.

  $\boxed{\text{Ainsi, la matrice } L \text{ est inversible.}}$

- On a démontré en question précédente que cette relation est vérifiée pour tout $n \in \mathbb{N}$.
- Il reste alors à démontrer que la relation est vérifiée pour les entiers négatifs.
  Plus précisément, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on veut montrer :

$$L^{-n} = I + (-n)J + \frac{(-n)(-n-1)}{2}K = I - nJ + \frac{n(n+1)}{2}K$$

  où $L^{-n} = \left(L^{-1}\right)^n = \left(L^n\right)^{-1}$.

  Il s'agit donc de montrer que $A_n = I - nJ + \dfrac{n(n+1)}{2}K$ est l'inverse de L^n.

Or :

$$\begin{array}{rcl}
A_n \times L^n & = & \left(I - nJ + \dfrac{n(n+1)}{2} K\right) \times \left(I + nJ + \dfrac{n(n-1)}{2} K\right) \\
& = & \left(I + nJ + \dfrac{n(n-1)}{2} K\right) + \left(-nJ - n^2 J^2 - \dfrac{n^2(n-1)}{2} \cancel{JK}\right) \quad \textit{(car } K^2 = KJ = JK = 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})}\textit{)} \\
& + & \left(\dfrac{n(n+1)}{2} K + \dfrac{n^2(n+1)}{2} \cancel{KJ} + \dfrac{n^2(n+1)(n-1)}{4} \cancel{K^2}\right) \\
& = & I + (n-n)\ J + \left(\dfrac{n(n-1)}{2} - n^2 + \dfrac{n(n+1)}{2}\right)\ K \quad \textit{(car } J^2 = K\textit{)} \\
& = & I + \dfrac{n}{2}\ \cancel{\big((n-1) - 2n + (n+1)\big)}\ K \ = \ I
\end{array}$$

Ainsi, L^n est inversible d'inverse :

$$L^{-n} = (L^n)^{-1} = A_n = I - nJ + \frac{n(n+1)}{2} K$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{Z},\ L^n = I + nJ + \frac{n(n-1)}{2} K}$$

□

c) Exprimer, pour tout entier relatif n, L^n à l'aide de I, L, L^2 et n.

Démonstration.

- Rappelons tout d'abord : $L = I + J$ donc $J = L - I$.
  D'autre part, comme I et L commutent :

$$K = J^2 = (L-I)^2 = L^2 - 2L + I$$

$$\boxed{J = L - I \quad \text{et} \quad K = L^2 - 2L + I}$$

- Soit $n \in \mathbb{Z}$. D'après la question précédente :

$$\begin{array}{rcl}
L^n & = & I + nJ + \dfrac{n(n-1)}{2} K \\
& = & I + n(L - I) + \dfrac{n(n-1)}{2} (L^2 - 2L + I) \\
& = & I + nL - nI + \dfrac{n(n-1)}{2} L^2 - n(n-1)L + \dfrac{n(n-1)}{2} I \\
& = & \left(1 - n + \dfrac{n(n-1)}{2}\right) I + n(1 - (n-1))L + \dfrac{n(n-1)}{2} L^2 \\
& = & \dfrac{(n-1)(n-2)}{2} I - n(n-2)L + \dfrac{n(n-1)}{2} L^2
\end{array}$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{Z},\ L^n = \frac{(n-1)(n-2)}{2} I - n(n-2)L + \frac{n(n-1)}{2} L^2}$$

□

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & -3 & 3 \end{pmatrix}$ de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ et on note f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ représenté par la matrice A dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et e l'application identique de $\mathbb{R}^3$ dans lui-même.

4. Montrer que f admet une valeur propre et une seule que l'on déterminera.
Est-ce que f est diagonalisable ?

Démonstration.

- Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Rappelons :

$$\lambda \text{ est valeur propre de } M \ \Leftrightarrow\ M - \lambda I_3 \text{ n'est pas inversible}$$

- Or :

$$\begin{array}{rcl}
\mathrm{rg}(A - \lambda\, I) & = & \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix} -\lambda & 2 & -1 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 2 & -3 & 3-\lambda \end{pmatrix}\right) \\[2mm]
& \overset{L_1 \leftrightarrow L_3}{=} & \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix} 2 & -3 & 3-\lambda \\ 1 & -\lambda & 1 \\ -\lambda & 2 & -1 \end{pmatrix}\right) \\[2mm]
& \overset{\substack{L_2 \leftarrow 2\,L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow 2\,L_3 + \lambda\,L_1}}{=} & \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix} 2 & -3 & 3-\lambda \\ 0 & 3-2\lambda & -1+\lambda \\ 0 & 4-3\lambda & -2+3\lambda-\lambda^2 \end{pmatrix}\right) \\[2mm]
& \overset{L_2 \leftarrow 3\,L_2 - 2\,L_3}{=} & \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix} 2 & -3 & 3-\lambda \\ 0 & 1 & 1-3\lambda+2\lambda^2 \\ 0 & 4-3\lambda & -2+3\lambda-\lambda^2 \end{pmatrix}\right) \\[2mm]
& \overset{L_3 \leftarrow L_3 - (4-3\lambda)\,L_2}{=} & \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix} 2 & -3 & 3-\lambda \\ 0 & 1 & 1-3\lambda+2\lambda^2 \\ 0 & 0 & P(\lambda) \end{pmatrix}\right)
\end{array}$$

où :

$$\begin{array}{rcl}
P(\lambda) & = & \left(-2+3\lambda-\lambda^2\right) - (4-3\lambda)\left(1-3\lambda+2\lambda^2\right) \\
& = & -(\lambda-1)(\lambda-2) - (4-3\lambda)(\lambda-1)(2\lambda-1) \\
& = & (\lambda-1)\big(-(\lambda-2) + (3\lambda-4)(2\lambda-1)\big) \\
& = & (\lambda-1)\big(-\lambda+2+\left(6\lambda^2-11\lambda+4\right)\big) \\
& = & (\lambda-1)\left(6\lambda^2-12\lambda+6\right) \\
& = & 6\,(\lambda-1)\left(\lambda^2-2\lambda+1\right) \ = \ 6\,(\lambda-1)(\lambda-1)^2
\end{array}$$

La réduite obtenue est triangulaire supérieure.
Elle est non inversible ssi l'un de ses cœfficients diagonaux est nul. Ainsi :

$$\begin{array}{rcl}
(A - \lambda\, I) \text{ non inversible} & \Leftrightarrow & 6\,(\lambda-1)^3 = 0 \\
& \Leftrightarrow & \lambda = 1
\end{array}$$

$$\boxed{\text{L'endormorphisme } f \text{ admet } 1 \text{ pour unique valeur propre : } \mathrm{Sp}(f) = \{1\}.}$$

- Supposons par l'abusrde que f est diagonalisable. Alors A est diagonalisable.
  Il existe alors une matrice $P \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ inversible telle que :
  $$A = PDP^{-1}$$
  où D est une matrice diagonale dont les cœfficients diagonaux sont les valeurs propres de A.
  Or $\text{Sp}(A) = \text{Sp}(f) = \{1\}$. Donc : $D = I_3$.

  Et ainsi :
  $$A = P\ I_3\ P^{-1} = P\ P^{-1} = I_3$$
  Absurde !

  $$\boxed{\text{On en déduit que l'endomorphisme } f \text{ n'est pas diagonalisable.}}$$

Remarque

- L'avant dernière étape du calcul du rang présenté dans cette question est un peu particulière : au lieu de placer un 0 en position $(3, 2)$, on s'est débarrassé de λ en position $(2, 2)$.
  Il était aussi possible d'opérer comme suit :
  $$\begin{array}{rcll} \text{rg}(A - \lambda\, I) & = & \text{rg}\left(\begin{pmatrix} 2 & -3 & 3-\lambda \\ 0 & 3-2\lambda & -1+\lambda \\ 0 & 4-3\lambda & -2+3\lambda-\lambda^2 \end{pmatrix}\right) & \\ & \overset{L_3 \leftarrow (3-2\lambda)\, L_3 - (4-3\lambda)\, L_2}{=} & \text{rg}\left(\begin{pmatrix} 2 & -3 & 3-\lambda \\ 0 & 3-2\lambda & -1+\lambda \\ 0 & 0 & Q(\lambda) \end{pmatrix}\right) & \textit{(si } 3-2\lambda \neq 0\textit{)} \end{array}$$
  où :
  $$\begin{array}{rcl} Q(\lambda) & = & (3-2\lambda)(-2+3\,\lambda-\lambda^2) - (4-3\lambda)(-1+\lambda) \\ & = & (3-2\lambda)(1-\lambda)(-2+\lambda) + (4-3\lambda)(1-\lambda) \\ & = & (1-\lambda)\Big((3-2\lambda)(-2+\lambda) + (4-3\lambda)\Big) \\ & = & (1-\lambda)\Big((-6+7\lambda-2\lambda^2) + (4-3\lambda)\Big) \\ & = & (1-\lambda)(-2+4\lambda-2\lambda^2) \\ & = & (1-\lambda)\ (-2)\ (1-2\lambda+\lambda^2)\ \ =\ \ -2\ (1-\lambda)^3 \end{array}$$
  Ainsi, dans le cas où $3 - 2\lambda \neq 0$, on obtient une réduite triangulaire supérieure.
  Elle est non inversible ssi l'un de ses cœfficients diagonaux est nul. Ainsi, si $3 - 2\lambda \neq 0$:
  $$A - \lambda I \text{ non inversible } \Leftrightarrow\ -2\ (1-\lambda)^3 = 0\ \Leftrightarrow\ \lambda = 1$$
  Il reste à traiter le cas où $3 - 2\lambda = 0$ (*i.e.* $\lambda = \frac{3}{2}$).
  Dans ce cas, en reprenant le début du calcul précédent, on obtient :
  $$\begin{array}{rcll} \text{rg}(A - \lambda\, I) & = & \text{rg}\left(\begin{pmatrix} 2 & -3 & 3-\lambda \\ 0 & 3-2\lambda & -1+\lambda \\ 0 & 4-3\lambda & -2+3\lambda-\lambda^2 \end{pmatrix}\right) & \\ & = & \text{rg}\left(\begin{pmatrix} 2 & -3 & 3-\lambda \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}\right) & \textit{(car } 3-2\lambda = 0\textit{)} \\ & \overset{L_2 \Leftrightarrow L_3}{=} & \text{rg}\left(\begin{pmatrix} 2 & -3 & 3-\lambda \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}\right) & \end{array}$$
  La réduite obtenue est triangulaire supérieure et sous ses cœfficients diagonaux sont non nuls.
  Elle est donc inversible. On en déduit que $\dfrac{3}{2}$ n'est pas valeur propre de A. $\square$

5. a) Soit $w = (1, 0, 0)$. Calculer $v = (f - e)(w)$ et $u = (f - e)(v)$.
Montrer que (u, v, w) est une base de $\mathbb{R}^3$.

Démonstration.
On note $\mathscr{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

- Tout d'abord, d'après l'énoncé : $w = (1, 0, 0)$. Donc :

$$W = \text{Mat}_{\mathscr{B}}(w) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- Ensuite :

$$V = \text{Mat}_{\mathscr{B}}(v) = \text{Mat}_{\mathscr{B}}((f - e)(w)) = (A - I)W = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{v = (-1, 1, 2)}$$

- Enfin :

$$U = \text{Mat}_{\mathscr{B}}(u) = \text{Mat}_{\mathscr{B}}((f - e)(v)) = (A - I)V = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{u = (1, 0, -1)}$$

- Montrons que la famille (u, v, w) est libre.
  Soit $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3$.
  Supposons : $\lambda_1 \cdot u + \lambda_2 \cdot v + \lambda_3 \cdot w = 0_{\mathbb{R}^3}$.
  On obtient alors le système suivant :

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcl} \lambda_1 & - & \lambda_2 & + & \lambda_3 & = & 0 \\ & & \lambda_2 & & & = & 0 \\ -\lambda_1 & + & 2\lambda_2 & & & = & 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0 \right.$$

(par remontées successives)

$$\boxed{\text{Ainsi, la famille } (u, v, w) \text{ est libre.}}$$

- En résumé :
  × (u, v, w) est une famille libre,
  × $\text{Card}((u, v, w)) = 3 = \dim(\mathbb{R}^3)$

$$\boxed{\text{On en déduit que la famille } (u, v, w) \text{ est une base de } \mathbb{R}^3.}$$

□

b) Déterminer la matrice associée à f relativement à la base (u, v, w).

Démonstration.
Par définition des vecteurs u, v et w :

× $v = (f - e)(w) = f(w) - w$. Donc : $f(w) = v + w = 0 \cdot u + 1 \cdot v + 1 \cdot w$.
  Ainsi : $\text{Mat}_{(u,v,w)}(f(w)) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

× $u = (f - e)(v) = f(v) - v$. Donc : $f(v) = u + v = 1 \cdot u + 1 \cdot v + 0 \cdot w$.
Ainsi : $\mathrm{Mat}_{(u,v,w)}(f(w)) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

× avec les mêmes notations que précédemment :

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f(u)) = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)\ \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u) = AU = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & -3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = U$$

Donc : $f(u) = u = 1 \cdot u + 0 \cdot v + 0 \cdot w$.
Ainsi : $\mathrm{Mat}_{(u,v,w)}(f(u)) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

$$\boxed{\text{Donc : } \mathrm{Mat}_{(u,v,w)}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = L.}$$

□

c) Montrer que f est un automorphisme de $\mathbb{R}^3$ et, pour tout entier relatif n, exprimer f^n à l'aide de e, f, f^2 et n.

Démonstration.

- D'après la question ***3.b)***, la matrice L est inversible. Donc l'endomorphisme f est bijectif. De plus, f est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$.

$$\boxed{\text{On en déduit que } f \text{ est un automorphisme de } \mathbb{R}^3.}$$

- Soit $n \in \mathbb{Z}$. D'après la question ***3.c)*** :

$$L^n = \frac{(n-1)(n-2)}{2} I - n(n-2)L + \frac{n(n-1)}{2} L^2$$

Or L est la matrice représentative de f dans la base (u, v, w).

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{Ainsi, par passerelle matrice-endomorphisme :} \\ f^n = \dfrac{(n-1)(n-2)}{2} e - n(n-2) f + \dfrac{n(n-1)}{2} f^2.\end{array}}$$

Remarque
Détaillons le deuxième aspect de la question.

- Tout d'abord :

$$L^n = \big(\mathrm{Mat}_{(u,v,w)}(f)\big)^n = \mathrm{Mat}_{(u,v,w)}(f^n)$$

- D'autre part :

$$\begin{aligned} & \frac{(n-1)(n-2)}{2} I - n(n-2)L + \frac{n(n-1)}{2} L^2 \\ = \ & \frac{(n-1)(n-2)}{2}\ \mathrm{Mat}_{(u,v,w)}(e) - n(n-2)\ \mathrm{Mat}_{(u,v,w)}(f) + \frac{n(n-1)}{2}\ \big(\mathrm{Mat}_{(u,v,w)}(f)\big)^2 \\ = \ & \frac{(n-1)(n-2)}{2}\ \mathrm{Mat}_{(u,v,w)}(e) - n(n-2)\ \mathrm{Mat}_{(u,v,w)}(f) + \frac{n(n-1)}{2}\ \big(\mathrm{Mat}_{(u,v,w)}(f^2)\big) \\ = \ & \mathrm{Mat}_{(u,v,w)}\left(\frac{(n-1)(n-2)}{2}\ e - n(n-2)\ f + \frac{n(n-1)}{2}\ f^2\right) \end{aligned}$$

- On en déduit :

$$\mathrm{Mat}_{(u,v,w)}(f^n) \ = \ \mathrm{Mat}_{(u,v,w)}\left(\frac{(n-1)(n-2)}{2}\ e - n(n-2)\ f + \frac{n(n-1)}{2}\ f^2\right)$$

L'application $\mathrm{Mat}_{(u,v,w)}(.)$ étant bijective, on obtient :

$$f^n \ = \ \frac{(n-1)(n-2)}{2}\ e - n(n-2)\ f + \frac{n(n-1)}{2}\ f^2$$

□

Exercice 2 (EDHEC 2014)

Dans cet exercice, θ désigne un réel strictement positif et n un entier naturel supérieur ou égal à 2.

Pour tout k de $\mathbb{N}$, on pose : $u_k = \dfrac{1}{1+\theta}\left(\dfrac{\theta}{1+\theta}\right)^k$.

1. Montrer que la suite $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ définit une loi de probabilité.

Démonstration.

- Comme $\theta > 0$: $\forall k \in \mathbb{N}$, $\dfrac{1}{1+\theta}\left(\dfrac{\theta}{1+\theta}\right)^k \geqslant 0$.
- Soit $N \in \mathbb{N}$.

$$\sum_{k=0}^{N} u_k = \sum_{k=0}^{N} \frac{1}{1+\theta}\left(\frac{\theta}{1+\theta}\right)^k = \frac{1}{1+\theta}\sum_{k=0}^{N}\left(\frac{\theta}{1+\theta}\right)^k = \frac{1}{1+\theta}\,\frac{1-\left(\frac{\theta}{\theta+1}\right)^{N+1}}{1-\frac{\theta}{\theta+1}}$$

Comme $\left|\dfrac{\theta}{1+\theta}\right| < 1$, alors : $\lim\limits_{N\to+\infty}\left(\frac{\theta}{\theta+1}\right)^{N+1} = 0$. Ainsi, la série $\sum u_n$ converge et :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} u_k = \frac{1}{1+\theta}\lim_{N\to+\infty}\sum_{k=0}^{N}\left(\frac{\theta}{1+\theta}\right)^k = \frac{1}{1+\theta}\,\frac{1}{1-\frac{\theta}{1+\theta}} = \frac{1}{1+\theta}\,\frac{1+\theta}{1+\cancel{\theta}-\cancel{\theta}} = 1$$

$$\boxed{\text{On en déduit que } (u_k) \text{ définit une loi de probabilité.}}$$

□

On considère maintenant une variable aléatoire X prenant ses valeurs dans $\mathbb{N}$ et dont la loi est donnée par :

$$\forall k \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}([X=k]) = u_k.$$

2. a) On pose $Y = X+1$. Reconnaître la loi de Y, puis en déduire l'espérance et la variance de X.

Démonstration.

- D'après l'énoncé : $X(\Omega) \subset \mathbb{N}$. Donc $Y(\Omega) \subset \mathbb{N}^*$.
- Soit $k \in \mathbb{N}^*$.

$$\mathbb{P}([Y=k]) = \mathbb{P}([X+1=k]) = \mathbb{P}([X=k-1]) = \frac{1}{1+\theta}\left(\frac{\theta}{1+\theta}\right)^{k-1} = \frac{1}{1+\theta}\left(1-\frac{1}{1+\theta}\right)^{k-1}$$

$$\boxed{\text{On en conclut : } Y \hookrightarrow \mathcal{G}\left(\frac{1}{1+\theta}\right).}$$

- On obtient alors :

$$\mathbb{E}(Y) = \frac{1}{\frac{1}{1+\theta}} = 1+\theta \quad \text{et} \quad \mathbb{V}(Y) = \frac{1-\frac{1}{1+\theta}}{\left(\frac{1}{1+\theta}\right)^2} = \frac{\frac{\theta}{\cancel{1+\theta}}}{\left(\frac{1}{1+\theta}\right)^{\cancel{2}}} = \theta(1+\theta)$$

- Par définition, $X = Y-1$. Ainsi, la v.a.r. X admet une espérance et une variance en tant que somme de v.a.r. qui en admettent.
  - Par linéarité de l'espérance :

$$\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(Y-1) = \mathbb{E}(Y) - 1 = \cancel{1}+\theta-\cancel{1} = \theta$$

$$\boxed{\mathbb{E}(X) = \theta}$$

- Par propriété de la variance :

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{V}(Y) = \theta(1+\theta)$$

$$\boxed{\mathbb{V}(X) = \theta(1+\theta)}$$

□

b) On rappelle que `grand(1, 1, 'geom', p)` renvoie une simulation d'une variable aléatoire géométrique de paramètre `p`. Compléter la fonction **Scilab** suivante pour qu'elle simule la variable aléatoire X :

```
function x = SimuX(theta)
    y = ................
    x = ................
endfunction
```

Démonstration.

```
    y = grand(1,1,'geom',1 / (theta + 1))
    x = y - 1
```

□

3. Dans cette question, on souhaite estimer le paramètre θ par la méthode du maximum de vraisemblance. Pour ce faire, on considère un échantillon $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ composé de variables aléatoires indépendantes ayant toutes la même loi que X et on introduit $\mathcal{L}$, de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$, définie par :

$$\forall \theta \in \mathbb{R}_+^*, \ \mathcal{L}(\theta) = \prod_{k=1}^{n} \mathbb{P}\left([X_k = x_k]\right)$$

où $x_1, x_2, \dots, x_n$ désignent des entiers naturels éléments de $X(\Omega)$.
L'objectif est de chosir la valeur de θ qui rend $\mathcal{L}(\theta)$ maximale.

a) Écrire $\ln\left(\mathcal{L}(\theta)\right)$ en fonction de θ et de $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} x_k$.

Démonstration.
Soit $\theta \in \mathbb{R}_+^*$.

$$\begin{aligned}
\ln(\mathcal{L}(\theta)) &= \ln\Big(\prod_{k=1}^{n} \mathbb{P}([X_k = x_k])\Big) = \sum_{k=1}^{n} \ln\Big(\mathbb{P}([X_k = x_k])\Big) \\
&= \sum_{k=1}^{n} \ln\left(\frac{1}{1+\theta}\left(\frac{\theta}{1+\theta}\right)^{x_k}\right) = \sum_{k=1}^{n} \left(\ln\left(\frac{1}{1+\theta}\right) + x_k \ln\left(\frac{\theta}{1+\theta}\right)\right) \\
&= \sum_{k=1}^{n} \Big(-\ln(1+\theta) + x_k(\ln(\theta) - \ln(1+\theta))\Big) \\
&= -n\ln(1+\theta) + \sum_{k=1}^{n} x_k(\ln(\theta) - \ln(1+\theta)) \\
&= -n\ln(1+\theta) + (\ln(\theta) + \ln(1+\theta)) \sum_{k=1}^{n} x_k \\
&= -n\ln(1+\theta) + (\ln(\theta) - \ln(1+\theta)) S_n \\
&= S_n \ln(\theta) - (S_n + n)\ln(1+\theta)
\end{aligned}$$

$$\boxed{\forall \theta \in \mathbb{R}_+^*, \ \ln(\mathcal{L}(\theta)) = S_n \ln(\theta) - (S_n + n)\ln(1+\theta)}$$

Remarque

- Dans cette question, on dispose initialement d'un n-uplet d'observations $(x_1, \dots, x_n)$. Plus précisément, $(x_1, \dots, x_n)$ est une réalisation d'un n-échantillon $(X_1, \dots, X_n)$ de la v.a.r. X. Les lois des v.a.r. X_i dépendent d'un paramètre θ, a priori inconnu et qu'on cherche à déterminer. Pour ce faire, une idée naturelle consiste à considérer que la valeur de θ qui a permis de générer les observations est celle qui avait la plus grande probabilité de les générer. C'est cette idée qui guide la méthode dite du maximum de vraisemblance, dont le sujet traite.
- Plus précisément, l'idée est de choisir comme estimation de θ le réel $\hat{\theta}_n$ tel que la **vraisemblance** d'avoir obtenu l'échantillon utilisé soit maximisée.
  Autrement dit, le réel $\hat{\theta}_n$ tel que la probabilité :
$$\begin{aligned}\mathcal{L}(\theta) &= \mathbb{P}_\theta([X_1 = x_1] \ \cap \ \dots \ \cap \ [X_n = x_n]) \\ &= \mathbb{P}_\theta([X_1 = x_1]) \ \times \ \dots \ \times \ \mathbb{P}_\theta([X_n = x_n]) \qquad \textit{(par indépendance)} \\ &= \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}_\theta([X_i = x_i])\end{aligned}$$
  soit maximale. Au lieu d'étudier la fonction $\mathcal{L}$, définie par un produit, on préfère considérer la fonction $\varphi : \theta \mapsto \ln(\mathcal{L}(\theta))$, définie par une somme. La fonction ln étant strictement croissante, le maximum de φ fournit le maximum de $\mathcal{L}$. C'est le but de la question suivante. □

b) On considère la fonction φ définie par :
$$\forall \theta \in \,]0, +\infty[, \ \ \varphi(\theta) = S_n \ln(\theta) - (S_n + n) \ln(1 + \theta)$$
Montrer que la fonction φ admet un maximum, atteint en un seul réel que l'on notera $\widehat{\theta}_n$ et que l'on exprimera en fonction de S_n. Que représente $\widehat{\theta}_n$ pour la fonction $\mathcal{L}$?

Démonstration.

- La fonction φ est dérivable sur $]0, +\infty[$ en tant que somme de fonctions dérivables sur $]0, +\infty[$.
  Soit $\theta \in \mathbb{R}_+^*$.
$$\varphi'(\theta) = S_n \ \frac{1}{\theta} - (S_n + n) \ \frac{1}{1+\theta} = \frac{S_n \ (1+\theta) - (S_n + n) \ \theta}{\theta \ (1+\theta)} = \frac{S_n + \cancel{S_n \ \theta} - \cancel{S_n \ \theta} - n \ \theta}{\theta \ (1+\theta)}$$
  Étudions le signe de $\varphi'(\theta)$:
$$\begin{aligned}\varphi'(\theta) > 0 \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{S_n - n \ \theta}{\theta \ (1+\theta)} > 0 \\ &\Leftrightarrow \quad S_n - n \ \theta > 0 \qquad \textit{(car } \theta(1+\theta) > 0\textit{)} \\ &\Leftrightarrow \quad \frac{S_n}{n} > \theta\end{aligned}$$
  On note $\hat{\theta}_n = \dfrac{S_n}{n}$. On obtient le tableau de variations suivant :

θ	0		$\hat{\theta}_n$		$+\infty$
Signe de $\varphi'(\theta)$		$+$	0	$-$	
Variations de φ	$-\infty$	$\nearrow$	$\varphi(\hat{\theta}_n)$	$\searrow$	$-\infty$

- Ainsi :
  × la fonction φ est croissante sur $]0, \hat{\theta}_n]$, donc : $\forall \theta \in]0, \hat{\theta}_n]$, $\varphi(\theta) \leqslant \varphi(\hat{\theta}_n)$.
  × la fonction φ est décroissante sur $[\hat{\theta}_n, +\infty[$, donc : $\forall \theta \in [\hat{\theta}_n, +\infty[$, $\varphi(\theta) \leqslant \varphi(\hat{\theta}_n)$.
  Finalement : $\forall \theta \in \mathbb{R}_+^*$, $\varphi(\theta) \leqslant \varphi(\hat{\theta}_n)$.

$$\boxed{\text{On en déduit que la fonction } \varphi \text{ admet un unique maximum en } \hat{\theta}_n = \frac{S_n}{n}.}$$

- Soit $\theta \in \mathbb{R}_+^*$, on a : $\varphi(\theta) \leqslant \varphi(\hat{\theta}_n)$.
  Par définition de φ, on en déduit :

$$\ln(\mathcal{L}(\theta)) \leqslant \ln(\mathcal{L}(\hat{\theta}_n))$$

  Par croissance de la fonction exp sur $\mathbb{R}$, on obtient :

$$\mathcal{L}(\theta) \leqslant \mathcal{L}(\hat{\theta}_n)$$

$$\boxed{\text{Ainsi, le réel } \hat{\theta}_n \text{ est un maximum de } \mathcal{L}.}$$

Remarque
On peut détailler les éléments apparaissant dans le tableau de variation.

× Tout d'abord : $\lim\limits_{\theta \to 0^+} \ln(\theta) = -\infty$ et $\lim\limits_{\theta \to 0^+} \ln(1+\theta) = 0$.
  De plus : $\forall k \in [\![1, n]\!]$, $x_k \in \mathbb{N}$, donc $x_k \geqslant 0$. D'où : $S_n \geqslant 0$.
  On en déduit : $\lim\limits_{\theta \to 0^+} \varphi(\theta) = -\infty$

× Soit $\theta \in \mathbb{R}_+^*$.

$$\varphi(\theta) = S_n \ln(\theta) - (S_n + n) \ln(1+\theta) = \ln(\theta) \left(S_n - (S_n + n) \, \frac{\ln(1+\theta)}{\ln(\theta)} \right)$$

  Or :

$$\frac{\ln(1+\theta)}{\ln(\theta)} = \frac{\ln\left(\theta\left(\frac{1}{\theta}+1\right)\right)}{\ln(\theta)} = \frac{\ln(\theta) + \ln\left(\frac{1}{\theta}+1\right)}{\ln(\theta)} = 1 + \frac{\ln\left(\frac{1}{\theta}+1\right)}{\ln(\theta)} \underset{\theta \to +\infty}{\longrightarrow} 1$$

  On en déduit :

$$\lim_{\theta \to +\infty} \left(S_n - (S_n+n) \frac{\ln(1+\theta)}{\ln(\theta)} \right) = S_n - (S_n + n) \times 1 = -n \leqslant 0$$

  De plus : $\lim\limits_{\theta \to +\infty} \ln(\theta) = +\infty$.
  On en déduit : $\lim\limits_{\theta \to +\infty} \varphi(\theta) = -\infty$.

□

4. On pose dorénavant : $T_n = \frac{1}{n} \sum\limits_{i=1}^{n} X_i$.
La variable T_n est appelée estimateur du maximum de vraisemblance pour θ.

a) Vérifier que T_n est un estimateur sans biais de θ.

Démonstration.

- La v.a.r. T_n admet une espérance en tant que combinaison linéaire de v.a.r. en admettant.
- On a :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_\theta(T_n) &= \mathbb{E}_\theta\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right) \\
&= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}_\theta(X_i) && \textit{(par linéarité de l'espérance)} \\
&= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \theta && \textit{(d'après la question } \textbf{\textit{2.a)}}\textit{)} \\
&= \frac{1}{\cancel{n}} \times \cancel{n}\,\theta \ = \ \theta
\end{aligned}$$

Ainsi :

$$b_\theta(T_n) = \mathbb{E}_\theta(T_n) - \theta = \cancel{\theta} - \cancel{\theta} = 0$$

$$\boxed{\text{On en déduit que } T_n \text{ est un estimateur sans biais de } \theta.}$$

□

b) Calculer le risque quadratique $r_\theta(T_n)$ de T_n et vérifier que $\lim\limits_{n\to+\infty} r_\theta(T_n) = 0$.

Démonstration.

- La v.a.r. T_n admet une variance en tant que combinaison linéaire de v.a.r. qui en admettent.
- D'après la décomposition biais / variance :

$$\begin{aligned}
r_\theta(T_n) &= \mathbb{V}_\theta(T_n) + \cancel{(b_\theta(T_n))^2} && \textit{(car } b_\theta(T_n) = 0\textit{)} \\
&= \mathbb{V}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \frac{1}{n^2}\mathbb{V}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) && \textit{(par propriété de la variance)} \\
&= \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} \mathbb{V}(X_i) && \textit{(car } X_1, \ldots, X_n \textit{ sont indépendantes)} \\
&= \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} \mathbb{V}(X_1) && \textit{(car } X_1, \ldots, X_n \textit{ ont même loi)} \\
&= \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} \theta(1+\theta) && \textit{(d'après la question } \textbf{\textit{2.a)}}\textit{)} \\
&= \frac{1}{n^{\cancel{2}}} \times \cancel{n}\,\theta(1+\theta) = \frac{\theta(1+\theta)}{n}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Ainsi : } r_\theta(T_n) = \frac{\theta(1+\theta)}{n} \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty} r_\theta(T_n) = 0}$$

Remarque
On rappelle que, comme $\lim\limits_{n\to+\infty} r_\theta(T_n) = 0$, la v.a.r. T_n est un estimateur **convergent** de θ. □

Exercice 3 (ESSEC I 2007)

Dans tout l'exercice, les variables aléatoires sont définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$. Dans la suite, λ désigne un réel strictement positif.

1. Soit X une variable aléatoire suivant la loi exponentielle de paramètre λ.

a) Déterminer la fonction : $x \mapsto \mathbb{P}([X > x])$ (appelée *fonction de survie de X*).

Démonstration.
Soit $x \in \mathbb{R}$.

- Comme X suit la loi exponentielle de paramètre λ, sa fonction de répartition est donnée par :

$$F_X : x \mapsto \left\{ \begin{array}{cl} 1 - \mathrm{e}^{-\lambda x} & \text{si } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{array} \right.$$

- On en déduit que :

$$\mathbb{P}([X > x]) = 1 - \mathbb{P}([X \leqslant x]) = 1 - F_X(x) = \left\{ \begin{array}{cl} \mathrm{e}^{-\lambda x} & \text{si } x \geqslant 0 \\ 1 & \text{si } x < 0 \end{array} \right.$$

$$\boxed{\text{La fonction de survie est : } x \mapsto \left\{ \begin{array}{cl} \mathrm{e}^{-\lambda x} & \text{si } x \geqslant 0 \\ 1 & \text{si } x < 0 \end{array} \right. .}$$

□

b) Pour tous nombres réels strictement positifs x et y, calculer la probabilité conditionnelle $\mathbb{P}_{[X>x]}([X > x + y])$; justifier alors que, si X modélise la durée de vie d'un phénomène, on dise de ce dernier qu'il est « sans vieillissement ».

Démonstration.
Soient $x > 0$ et $y > 0$.

- D'après la question précédente, $\mathbb{P}([X > x]) > 0$.
- On peut donc calculer la probabilité conditionnelle suivante :

$$\begin{array}{rcll} \mathbb{P}_{[X>x]}([X > x + y]) & = & \dfrac{\mathbb{P}([X > x] \cap [X > x + y])}{\mathbb{P}([X > x])} & \\ & = & \dfrac{\mathbb{P}([X > x + y])}{\mathbb{P}([X > x])} & \textit{(car, comme } y > 0 \textit{ :} \\ & & & X > x + y \ \Rightarrow \ X > x \\ & & & \textit{donc } [X > x + y] \subset [X > x]\textit{)} \\ & = & \dfrac{\mathrm{e}^{-\lambda(x+y)}}{\mathrm{e}^{-\lambda x}} & \textit{(car } x + y \geqslant 0 \textit{ et } x \geqslant 0\textit{)} \\ & = & \dfrac{\mathrm{e}^{-\lambda x} \ \mathrm{e}^{-\lambda y}}{\mathrm{e}^{-\lambda x}} \ = \ \mathrm{e}^{-\lambda y} & \\ & = & \mathbb{P}([X > y]) & \end{array}$$

$$\boxed{\mathbb{P}_{[X>x]}([X > x + y]) = \mathbb{P}([X > y])}$$

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{La probabilité que le phénomène ait encore lieu après } x+y \text{ « heures » sachant qu'il a déjà} \\ \text{eut lieu durant } x \text{ heures ne dépend que de la durée supplémentaire } x+y-x=y \text{ ajoutée.}\end{array}}$$

□

2. Soit $(X_n)_{n \geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes, de même loi exponentielle de paramètre λ. Pour tout entier naturel n non nul, on pose :

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k.$$

a) Déterminer l'espérance et la variance de S_n.

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

- La v.a.r. S_n admet une espérance en tant que somme de variables aléatoires qui admettent toutes une espérance.

$$\begin{array}{rcll} \mathbb{E}(S_n) & = & \mathbb{E}(\sum\limits_{k=1}^{n} X_k) & \\ & = & \sum\limits_{k=1}^{n} \mathbb{E}(X_k) & \textit{(par linéarité de l'espérance)} \\ & = & \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{\lambda} & \textit{(car pour tout } k \in \mathbb{N}^*, \\ & & & X_k \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)\textit{)} \\ & = & n \, \dfrac{1}{\lambda} & \end{array}$$

$$\boxed{\mathbb{E}(S_n) = \frac{n}{\lambda}}$$

- La v.a.r. S_n admet une variance en tant que somme de variables aléatoires qui admettent toutes une variance.

$$\begin{array}{rcll} \mathbb{V}(S_n) & = & \mathbb{V}(\sum\limits_{k=1}^{n} X_k) & \\ & = & \sum\limits_{k=1}^{n} \mathbb{V}(X_k) & \textit{(car } X_1, \ldots, X_n \textit{ sont} \\ & & & \textit{indépendantes)} \\ & = & \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{\lambda^2} & \textit{(car pour tout } k \in \mathbb{N}^*, \\ & & & X_k \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)\textit{)} \\ & = & n \, \dfrac{1}{\lambda^2} & \end{array}$$

$$\boxed{\mathbb{V}(S_n) = \frac{n}{\lambda^2}}$$

□

b) Démontrer par récurrence que, pour tout n de$\mathbb{N}^*$, la variable aléatoire S_n admet pour densité la fonction f_n :

$$t \longmapsto \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0\,; \\ \dfrac{\lambda^n}{(n-1)!} \mathrm{e}^{-\lambda t} t^{n-1} & \text{si } t \geqslant 0. \end{cases}$$

Pour cela, on admettra que, si U et V sont des variables aléatoires indépendantes admettant respectivement pour densité les fonctions f_U et f_V, alors la variable aléatoire $U+V$ admet pour densité la fonction f_{U+V} définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f_{U+V}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_U(x) f_V(t-x)\, dx.$$

Démonstration.
Démontrons par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{P}(n)$
où $\mathcal{P}(n)$: S_n est une variable à densité, de densité f_n.

- **Initialisation** :
  Par définition, $f_1 : t \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ \dfrac{\lambda}{0!}\ \mathrm{e}^{-\lambda t}\ t^0 & \text{si } t \geqslant 0 \end{cases}$
  Comme $\dfrac{\lambda}{0!}\ \mathrm{e}^{-\lambda t}\ t^0 = \lambda\ \mathrm{e}^{-\lambda t}$, on reconnaît la densité d'une variable aléatoire de loi $\mathcal{E}(\lambda)$.
  D'où $\mathcal{P}(1)$.
- **Hérédité** : soit $n \in \mathbb{N}^*$.
  Supposons $\mathcal{P}(n)$ et démontrons $\mathcal{P}(n+1)$
  (*i.e.* S_{n+1} est une variable à densité, de densité f_{n+1}).
  - Remarquons tout d'abord que $S_{n+1}(\Omega) \subset [0, +\infty[$ puisque les v.a.r. X_i sont telles que : $X_i(\Omega) = [0, +\infty[$.
  - Par définition : $S_{n+1} = \sum\limits_{k=1}^{n+1} X_k = \left(\sum\limits_{k=1}^{n} X_k \right) + X_{n+1}$.

    On est dans le cadre d'utilisation du théorème fourni par l'énoncé :
    × par hypothèse de récurrence, S_n est une variable à densité, de densité f_n.
    × d'après l'énoncé, X_{n+1} est une variable à densité de densité f_1 (puisque pour tout i, $X_i \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$).
    × d'après le lemme des coalitions, les v.a.r. $X_1, \ldots, X_{n+1}$ étant indépendantes, les v.a.r. S_n et X_{n+1} sont indépendantes.
  - On en déduit que S_{n+1} est une v.a.r. à densité dont il reste à déterminer une densité.
    Soit $t \in \mathbb{R}$. Deux cas se présentent :
    × si $t < 0$: $f_{S_{n+1}}(t) = 0$ car $S_{n+1}(\Omega) \subset [0, +\infty[$.
    × si $t \geqslant 0$:
    Remarquons que pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} f_n(x)\ f_1(t-x) \neq 0 \quad &\Leftrightarrow \quad \begin{cases} f_n(x) \neq 0 \\ f_1(t-x) \neq 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \quad \begin{cases} x \in [0, +\infty[\\ (t-x) \in [0, +\infty[\end{cases} \\ &\Leftrightarrow \quad \begin{cases} x \geqslant 0 \\ t - x \geqslant 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x \geqslant 0 \\ x \leqslant t \end{cases} \end{aligned}$$

    On en déduit : $f_n(x)\, f_1(t-x) \neq 0 \Leftrightarrow x \in [0, t]$.

Et ainsi :

$$f_{S_{n+1}}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{S_n}(x)\, f_{X_{n+1}}(t-x)\, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f_n(x)\, f_1(t-x)\, dx = \int_0^t f_n(x)\, f_1(t-x)\, dx$$

car $x \mapsto f_n(x)\, f_1(t-x)$ est nulle en dehors de $[0, t]$. Enfin :

$$\begin{array}{rcl} f_{S_{n+1}}(t) & = & \displaystyle\int_0^t \frac{\lambda^n}{(n-1)!}\ \mathrm{e}^{-\lambda x}\ x^{n-1}\ \lambda\ \mathrm{e}^{-\lambda(t-x)}\ dx \\ & = & \displaystyle\frac{\lambda^{n+1}}{(n-1)!} \int_0^t \cancel{\mathrm{e}^{-\lambda x}}\ x^{n-1}\ \mathrm{e}^{-\lambda t}\ \cancel{\mathrm{e}^{\lambda x}}\ dx \\ & = & \displaystyle\frac{\lambda^{n+1}}{(n-1)!}\ \mathrm{e}^{-\lambda t} \int_0^t x^{n-1}\ dx \\ & = & \displaystyle\frac{\lambda^{n+1}}{(n-1)!}\ \mathrm{e}^{-\lambda t} \left[\frac{x^n}{n} \right]_0^t \ = \ \frac{\lambda^{n+1}}{n!}\ \mathrm{e}^{-\lambda t}\ t^n \end{array}$$

D'où $\mathcal{P}(n+1)$.

$$\boxed{\text{Ainsi, par principe de récurrence, pour tout } n \in \mathbb{N}^*,\ S_n \text{ est une variable à densité de densité } f_n.}$$

Remarque
Lorsque l'énoncé demande de déterminer la loi d'une v.a.r. Y, ou sa fonction de répartition F_Y, ou une densité f_Y, il est utile de commencer par déterminer $Y(\Omega)$ puisque cet ensemble fournit la disjonction de cas permettant de déterminer F_Y et f_Y. □

Exercice 4 (inspiré de : `oraux ESCP-2005-voie S`)

Toutes les variables aléatoires considérées dans cet exercice sont définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$. On considère une suite de variables aléatoires réelles $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ indépendantes, de même loi, à valeurs dans $[0, \theta]$, ayant pour fonction de densité :

$$f_\theta(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \dfrac{2x}{\theta^2} & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant \theta \\ 0 & \text{si } x > \theta \end{cases}$$

où θ est un paramètre réel strictement positif.
On note F_θ la fonction de répartition commune aux variables $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$

***1.* Étude d'un premier estimateur de θ**

a) Pour tout entier naturel non nul n, on considère la variable aléatoire $M_n = \sup(X_1, \ldots, X_n)$. Déterminer une densité de M_n.

Démonstration.
On commence par déterminer $F_\theta = F_{X_1}$.

- D'après l'énoncé, $X_1(\Omega) \subset [0, \theta]$.

- Soit $x \in \mathbb{R}$. Trois cas se présentent.
  × si $x < 0$: alors $[X_1 \leqslant x] = \varnothing$.
  Ainsi, $\mathbb{P}([X_1 \leqslant x]) = \mathbb{P}(\varnothing) = 0$.
  × si $x \in [0, \theta]$:

$$\begin{array}{rcll} F_\theta(x) & = & \mathbb{P}([X_1 \leqslant x]) & \\ & = & \displaystyle\int_{-\infty}^{x} f_\theta(t)\ dt & \\ & = & \cancel{\displaystyle\int_{-\infty}^{0} f_\theta(t)\ dt} + \displaystyle\int_{0}^{x} f_\theta(t)\ dt & \textit{(car f_θ est nulle sur $]-\infty, 0[$)} \\ & = & \displaystyle\int_{0}^{x} \frac{2t}{\theta^2}\ dt \ = \ \frac{\cancel{2}}{\theta^2} \left[\frac{t^2}{\cancel{2}} \right]_0^x & \\ & = & \dfrac{x^2}{\theta^2} & \end{array}$$

  × si $x > \theta$: alors $[X_1 \leqslant x] = \Omega$.
  Ainsi, $\mathbb{P}([X_1 \leqslant x]) = \mathbb{P}(\Omega) = 1$.

$$\boxed{F_\theta : x \mapsto \left\{ \begin{array}{cl} 0 & \text{si } x < 0 \\ \dfrac{x^2}{\theta^2} & \text{si } x \in [0, \theta] \\ 1 & \text{si } x > \theta \end{array} \right.}$$

Remarque

- L'énoncé précise que les v.a.r. X_i sont à valeurs dans $[0, \theta]$, ce qui nous a permis de mettre en place facilement la disjonction de cas. En cas d'absence de précision dans l'énoncé, le permier et dernier cas de disjonction se présentent de manière légèrement différente. Détaillons ces cas :
  × si $x < 0$:

$$F_\theta(x) \ = \ \mathbb{P}([X_1 \leqslant x]) \ = \ \int_{-\infty}^{x} 0\ dt \ = \ 0$$

  × si $x > \theta$:

$$\begin{array}{rcll} F_\theta(x) & = & \mathbb{P}([X_1 \leqslant x]) & \\ & = & \cancel{\displaystyle\int_{-\infty}^{0} f_\theta(t)\ dt} + \displaystyle\int_{0}^{\theta} f_\theta(t)\ dt + \cancel{\displaystyle\int_{\theta}^{+\infty} f_\theta(t)\ dt} & \textit{(car f_θ est nulle sur $]-\infty, 0[$ et $]\theta, x]$)} \\ & = & \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f_\theta(t)\ dt & \textit{(car f_θ est nulle en dehors de $[0, \theta]$)} \\ & = & 1 & \textit{(car f_θ est une densité de probabilité)} \end{array}$$

Déterminons alors F_{M_n}.

- D'après l'énoncé, pour tout $i \in \mathbb{N}^*$, $X_i(\Omega) \subset [0, \theta]$.

$$\boxed{\text{On en déduit : } M_n(\Omega) \subset [0, \theta].}$$

- Soit $x \in \mathbb{R}$. Trois cas se présentent.
  - si $x < 0$: alors $[M_n \leqslant x] = \varnothing$.
    Ainsi, $\mathbb{P}([M_n \leqslant x]) = \mathbb{P}(\varnothing) = 0$.
  - si $x \in [0, \theta]$:

$$\begin{array}{rcll}
F_{M_n}(x) & = & \mathbb{P}([M_n \leqslant x]) & \\
& = & \mathbb{P}([\sup(X_1, \dots, X_n) \leqslant x]) & \\
& = & \mathbb{P}([X_1 \leqslant x] \cap \dots \cap [X_n \leqslant x]) & \\
& = & \mathbb{P}([X_1 \leqslant x]) \times \dots \times \mathbb{P}([X_n \leqslant x]) & \textit{(car les v.a.r. } X_1, \dots, X_n \textit{ sont indépendantes)} \\
& = & \mathbb{P}([X_1 \leqslant x])^n & \textit{(car les v.a.r. } X_1, \dots, X_n \textit{ ont même loi)} \\
& = & \big(F_{X_1}(x)\big)^n & \\
& = & \big(F_\theta(x)\big)^n \ = \ \left(\dfrac{x^2}{\theta^2}\right)^n &
\end{array}$$

  - si $x > \theta$: alors $[M_n \leqslant x] = \Omega$.
    Ainsi, $\mathbb{P}([M_n \leqslant x]) = \mathbb{P}(\Omega) = 1$.

$$\boxed{\text{Ainsi, } F_{M_n} : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \left(\dfrac{x^2}{\theta^2}\right)^n & \text{si } x \in [0, \theta] \\ 1 & \text{si } x > \theta \end{cases}.}$$

- La fonction F_{M_n} est continue sur $\mathbb{R}$ car est la composée $F_{M_n} = G \circ F_\theta$ des fonctions :
  - F_θ continue sur $\mathbb{R}$ en tant que fonction de répartition d'une variable à densité et telle que : $F_\theta(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}$.
  - $G : x \mapsto x^n$ continue sur $\mathbb{R}$ car polynomiale.

  De même, la fonction F_{M_n} est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R} \setminus \{0, \theta\}$ car est la composée $F_{M_n} = G \circ F_\theta$ des fonctions :
  - F_θ $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R} \setminus \{0, \theta\}$ car f_θ est $\mathcal{C}^0$ sur $\mathbb{R} \setminus \{0, \theta\}$ et telle que : $F_\theta\big(\mathbb{R} \setminus \{0, \theta\}\big) \subset \mathbb{R}$.
  - $G : x \mapsto x^n$ $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ car polynomiale.

$$\boxed{\text{La v.a.r. } M_n \text{ est une variable à densité.}}$$

- On détermine une densité f_{M_n} de la v.a.r. M_n en dérivant la fonction F_{M_n} sur les intervalles ouverts.

$$f_{M_n} : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ n \left(\dfrac{x^2}{\theta^2}\right)^{n-1} \dfrac{2x}{\theta^2} = \dfrac{2n}{\theta^{2n}}\, x^{2n-1} & \text{si } x \in \,]0, \theta[\\ 0 & \text{si } x > \theta \end{cases}$$

  On pose alors : $f_\theta(0) = 0$ et $f_\theta(\theta) = 0$. □

b) Calculer les moments d'ordre 1 et 2 de M_n.

Démonstration.

- La v.a.r. M_n admet un moment d'ordre 1 si et seulement si l'intégrale impropre $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t\ f_{M_n}(t)\ dt$ est absolument convergente, ce qui équivaut à démontrer la convergence pour un calcul de moment.
- Tout d'abord :
$$\int_{-\infty}^{+\infty} t\ f_{M_n}(t)\ dt \ = \ \int_0^\theta t\ f_{M_n}(t)\ dt$$
car la fonction f_{M_n} est nulle en dehors de $[0, \theta]$.
- La fonction $t \mapsto t f_{M_n}(t)$ est $\mathcal{C}_m^0$ sur $[0, \theta]$.
Ainsi, l'intégrale impropre $\displaystyle\int_0^\theta t\ f_{M_n}(t)\ dt$ est bien définie et :
$$\begin{aligned}
\int_0^\theta t\ f_{M_n}(t)\ dt &= \int_0^\theta t\ \frac{2n}{\theta^{2n}}\ t^{2n-1}\ dt && \textit{(par définition de } f_\theta\textit{)}\\
&= \frac{2n}{\theta^{2n}} \int_0^\theta t^{2n}\\
&= \frac{2n}{\theta^{2n}} \left[\ \frac{t^{2n+1}}{2n+1}\ \right]_0^\theta\\
&= \frac{2n}{2n+1}\ \frac{1}{\theta^{2n}}\ \left[\ t^{2n+1}\ \right]_0^\theta\\
&= \frac{2n}{2n+1}\ \frac{1}{\theta^{2n}}\ \theta^{2n+1} \ = \ \frac{2n}{2n+1}\ \theta
\end{aligned}$$
$$\boxed{\text{Ainsi, on en déduit que } M_n \text{ admet une espérance et } \mathbb{E}_\theta(M_n) = \frac{2n}{2n+1}\ \theta.}$$
- Une rédaction analogue permet de démontrer que M_n admet un moment d'ordre 2 donné par $\displaystyle\int_0^\theta t^2\ f_\theta(t)\ dt$. Le calcul fournit alors :
$$\begin{aligned}
\int_0^\theta t^2\ f_{M_n}(t)\ dt &= \int_0^\theta t^2\ \frac{2n}{\theta^{2n}}\ t^{2n-1}\ dt && \textit{(par définition de } f_\theta\textit{)}\\
&= \frac{2n}{\theta^{2n}} \int_0^\theta t^{2n+1}\\
&= \frac{2n}{\theta^{2n}} \left[\ \frac{t^{2n+2}}{2n+2}\ \right]_0^\theta\\
&= \frac{2n}{2n+2}\ \frac{1}{\theta^{2n}}\ \left[\ t^{2n+2}\ \right]_0^\theta\\
&= \frac{n}{n+1}\ \frac{1}{\theta^{2n}}\ \theta^{2n+2} \ = \ \frac{n}{n+1}\ \theta^2
\end{aligned}$$
$$\boxed{\text{Ainsi, on en déduit que } M_n \text{ admet un moment d'ordre 2 et } \mathbb{E}_\theta({M_n}^2) = \frac{n}{n+1}\ \theta^2.}$$

□

c) Montrer que M_n est un estimateur biaisé de θ. Est-il asymptotiquement sans biais ?

Démonstration.

- D'après la question précédente, la v.a.r. admet une espérance et donc un biais. De plus :

$$\mathbb{E}_\theta(M_n) \;=\; \frac{2n}{2n+1}\,\theta \;\neq\; \theta$$

$$\boxed{\text{L'estimateur } M_n \text{ est biaisé, de biais : } b_\theta(M_n) = \mathbb{E}_\theta(M_n) - \theta = \left(\frac{2n}{2n+1} - 1\right)\theta = \frac{-1}{2n+1}\,\theta.}$$

- De plus, comme $\dfrac{2n}{2n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$, alors : $\mathbb{E}_\theta(M_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \theta$.

$$\boxed{\text{L'estimateur } M_n \text{ est asymptotiquement sans biais.}}$$

□

d) Montrer que la suite $(M_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite d'estimateurs convergente de θ.

Démonstration.

- D'après la question ***1.b)***, la v.a.r. M_n admet un moment d'ordre 2.
  On peut donc déterminer son risque quadratique.

$$\begin{aligned}
r_\theta(M_n) &= \mathbb{E}_\theta\big((M_n-\theta)^2\big) \\
&= \mathbb{E}_\theta\big({M_n}^2 - 2\theta\, M_n + \theta^2\big) \\
&= \mathbb{E}_\theta\big({M_n}^2\big) - 2\theta\,\mathbb{E}_\theta\big(M_n\big) + \theta^2 && \textit{(par linéarité de l'espérance)} \\
&= \frac{n}{n+1}\,\theta^2 - 2\theta\frac{2n}{2n+1}\,\theta + \theta^2 && \textit{(d'après la question } \textbf{\textit{1.b)}}\textit{)} \\
&= \left(\frac{n}{n+1} - \frac{4n^2}{2n+1} + 1\right)\theta^2 \\
&= \left(\frac{n(2n+1) - 4n(n+1) + (n+1)(2n+1)}{(n+1)(2n+1)}\right)\theta^2 \\
&= \left(\frac{\cancel{2n^2} + n - \cancel{4n^2} - 4n + \cancel{2n^2} + 3n + 1}{(n+1)(2n+1)}\right)\theta^2 \\
&= \frac{1}{(n+1)(2n+1)}\,\theta^2
\end{aligned}$$

$$\boxed{r_\theta(M_n) = \frac{1}{(n+1)(2n+1)}\,\theta^2}$$

- Ainsi :

$$r_\theta(M_n) = \frac{1}{(n+1)(2n+1)}\,\theta^2 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

$$\boxed{\text{On peut donc en conclure que } (M_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ est une suite d'estimateurs convergente de } \theta.}$$

Remarque

- Dans la question ***1.b)***, on a déterminé les moments d'ordre 1 et 2 de M_n.
  On a donc fait apparaître l'écriture :

$$r_\theta(M_n) \ = \mathbb{E}_\theta\big({M_n}^2\big) - 2\theta \ \mathbb{E}_\theta\big(M_n\big) + \theta^2$$

  pour le calcul du risque quadratique.
- Dans de nombreux sujets on demande plutôt de déterminer la variance de M_n.
  Ce qui nous amène à utiliser la décomposition biais-variance afin de calculer $r_\theta(M_n)$:

$$r_\theta(M_n) \ = \ \mathbb{V}_\theta(M_n) + \big(b_\theta(M_n)\big)^2$$

□

2. **Étude d'un second estimateur de θ**

a) Donner l'espérance et la variance de la variable $Y_n = \dfrac{1}{n} \sum\limits_{i=1}^{n} X_i$.

Démonstration.

- La v.a.r. Y_n admet un moment d'ordre 1 comme combinaison linéraire de v.a.r. qui admettent un moment d'ordre 1.
- On a alors :

$$\begin{array}{rcll}
\mathbb{E}_\theta(Y_n) & = & \mathbb{E}_\theta\left(\dfrac{1}{n} \sum\limits_{i=1}^{n} X_i\right) & \\
 & = & \dfrac{1}{n} \, \mathbb{E}_\theta\left(\sum\limits_{i=1}^{n} X_i\right) & \textit{(par linéarité de l'espérance)} \\
 & = & \dfrac{1}{n} \sum\limits_{i=1}^{n} \mathbb{E}_\theta(X_i) & \textit{(par linéarité de l'espérance)} \\
 & = & \dfrac{1}{n} \sum\limits_{i=1}^{n} \mathbb{E}_\theta(X_1) & \textit{(car les v.a.r. } X_1, \ldots, X_n \textit{ ont même loi)} \\
 & = & \dfrac{1}{\cancel{n}} \, \cancel{n} \, \mathbb{E}_\theta(X_1) & \\
 & = & \mathbb{E}_\theta(M_1) & \textit{(car } M_1 = \sup(X_1) = X_1\textit{)} \\
 & = & \dfrac{2 \times 1}{2 \times 1 + 1} \, \theta \ = \ \dfrac{2}{3} \, \theta & \textit{(d'après la question } \mathbf{1.b)}\textit{)}
\end{array}$$

$$\boxed{\mathbb{E}_\theta(Y_n) = \mathbb{E}_\theta(X_1) = \frac{2}{3} \, \theta}$$

- La v.a.r. Y_n admet un moment d'ordre 2 comme combinaison linéraire de v.a.r. **indépendantes** qui admettent un moment d'ordre 2.
- On a alors :

$$
\begin{array}{rcll}
\mathbb{V}(Y_n) & = & \mathbb{V}\left(\frac{1}{n} \sum\limits_{i=1}^{n} X_i\right) & \\
 & = & \frac{1}{n^2}\, \mathbb{E}_\theta\left(\sum\limits_{i=1}^{n} X_i\right) & \textit{(par propriété de la variance)} \\
 & = & \frac{1}{n^2} \sum\limits_{i=1}^{n} \mathbb{V}(X_i) & \textit{(par indépendance des v.a.r. } X_1, \ldots, X_n\textit{)} \\
 & = & \frac{1}{n^2} \sum\limits_{i=1}^{n} \mathbb{V}(X_1) & \textit{(car les v.a.r. } X_1, \ldots, X_n \textit{ ont même loi)} \\
 & = & \frac{1}{n^{\cancel{2}}}\, \cancel{n}\, \mathbb{V}(X_1) & \\
 & = & \frac{\mathbb{V}(M_1)}{n} & \textit{(car } M_1 = \sup(X_1) = X_1\textit{)} \\
 & = & \frac{1}{n}\, \left(\mathbb{E}_\theta\left({M_1}^2\right) - \left(\mathbb{E}_\theta(M_1)\right)^2\right) & \textit{(d'après la formule de Kœnig-Huygens)} \\
 & = & \frac{1}{n}\, \left(\frac{1}{1+1}\, \theta^2 - \left(\frac{2}{3}\, \theta\right)^2\right) & \\
 & = & \frac{1}{n}\, \left(\frac{1}{2} - \frac{4}{9}\right)\, \theta^2 \ = \ \frac{1}{n}\, \frac{9-8}{18}\, \theta^2 & \\
 & = & \frac{\theta^2}{18\, n} &
\end{array}
$$

$$
\boxed{\mathbb{V}(Y_n) = \frac{\theta^2}{18\, n}}
$$

□

b) À l'aide de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, montrer que la suite $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une suite d'estimateurs convergente de $\frac{2\theta}{3}$.

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

- La v.a.r. $\overline{X_n}$ admet un moment d'ordre 2.
  On peut donc appliquer l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev :

$$
\forall \varepsilon > 0,\ \mathbb{P}\left(\left[\left|\overline{X_n} - \mathbb{E}\left(\overline{X_n}\right)\right| \geqslant \varepsilon\right]\right) \leqslant \frac{\mathbb{V}\left(\overline{X_n}\right)}{\varepsilon^2}
$$

- D'après ce qui précède : $\mathbb{E}\left(\overline{X_n}\right) = \mathbb{E}_\theta(Y_n) = \frac{2}{3}\, \theta$ et $\mathbb{V}\left(\overline{X_n}\right) = \mathbb{V}(Y_n) = \frac{\theta^2}{18\, n}$.

- On a donc, pour tout $\varepsilon > 0$:

$$\begin{array}{ccccc} 0 & \leqslant & \mathbb{P}\left(\left[\left|Y_n - \frac{2}{3}\,\theta\right| \geqslant \varepsilon\right]\right) & \leqslant & \dfrac{\theta^2}{18\,\varepsilon^2}\,\dfrac{1}{n} \\ {\scriptstyle n\to+\infty}\downarrow & & & & {\scriptstyle n\to+\infty}\downarrow \\ 0 & & & & 0 \end{array}$$

Comme $0 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et $\dfrac{\theta^2}{18\,\varepsilon^2}\,\dfrac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, alors, d'après le théorème d'encadrement, la suite $\left(\mathbb{P}\left(\left[\left|Y_n - \frac{2}{3}\,\theta\right| \geqslant \varepsilon\right]\right)\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente, de limite nulle.

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{Ainsi, pour tout } \varepsilon > 0,\ \lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left(\left[\left|Y_n - \frac{2}{3}\,\theta\right| \geqslant \varepsilon\right]\right) = 0. \\ \text{La suite } (Y_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ est une suite d'estimateurs convergente de } \dfrac{2\theta}{3}.\end{array}}$$

□

c) Déduire de la variable Y_n un estimateur sans biais Z_n de θ.

Démonstration.

- D'après la question ***2.a)***, $\mathbb{E}_\theta\big(Y_n\big) = \dfrac{2}{3}\,\theta$.
- Notons $Z_n = \dfrac{3}{2}\,Y_n$. Alors, par linéarité de l'espérance :

$$\mathbb{E}_\theta(Z_n) \;=\; \mathbb{E}_\theta\left(\frac{3}{2}\,Y_n\right) \;=\; \frac{3}{2}\,\mathbb{E}_\theta(Y_n) \;=\; \frac{3}{2}\,\frac{2}{3}\,\theta \;=\; \theta$$

$$\boxed{\text{La v.a.r. } Z_n = \dfrac{3}{2}\,Y_n \text{ est un estimateur sans biais de } \theta.}$$

□

d) Calculer le risque quadratique de Z_n.

Démonstration.

- La v.a.r. Z_n admet un moment d'ordre 2 car est une transformée affine de la v.a.r. Y_n qui admet un moment d'ordre 2.
- D'après la décomposition biais-variance :

$$\begin{array}{rcll} r_\theta(Z_n) & = & \mathbb{V}_\theta(Z_n) + \cancel{\big(b_\theta(Z_n)\big)^2} & \textit{(car } Z_n \textit{ est un estimateur sans biais)} \\ & = & \mathbb{V}_\theta\left(\dfrac{3}{2}\,Y_n\right) & \\ & = & \dfrac{9}{4}\,\mathbb{V}\big(Y_n\big) \;=\; \dfrac{9}{4}\,\dfrac{\theta^2}{18\,n} & \textit{(par propriété de la variance)} \\ & = & \dfrac{\theta^2}{8n} & \end{array}$$

$$\boxed{r_\theta\big(Z_n\big) = \dfrac{\theta^2}{8n}}$$

□

e) Montrer que la suite d'estimateurs $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente.

Démonstration.
D'après la question précédente :

$$r_\theta(Z_n) = \frac{\theta^2}{8n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

$$\boxed{\text{La suite d'estimateurs } (Z_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ est convergente.}}$$

□

3. Comparer les risques quadratiques de M_n et de Z_n.
Quelle méthode choisiriez-vous pour estimer la valeur du paramètre θ ?

Démonstration.

- Il faut choisir l'estimateur possédant le risque quadratique le plus faible.
  Raisonnons par équivalence :

$$\begin{array}{rrcll}
 & r_\theta(M_n) & \leqslant & r_\theta(Z_n) & \\
\Leftrightarrow & \dfrac{1}{(n+1)(2n+1)}\ \cancel{\theta^2} & \leqslant & \dfrac{1}{8n}\ \cancel{\theta^2} & (\textit{car } \theta > 0) \\
\Leftrightarrow & 8n & \leqslant & (n+1)(2n+1) & (\textit{car } 8n > 0 \textit{ et } (n+1)(2n+1) > 0) \\
\Leftrightarrow & 0 & \leqslant & (n+1)(2n+1) - 8n & \\
\Leftrightarrow & 0 & \leqslant & 2n^2 - 5n + 1 &
\end{array}$$

- Notons $P(X) = 2X^2 - 5X + 1$.
  Ce polynôme admet pour discriminant $\Delta = 25 - 8 = 17$.
  Il admet donc comme racines $x_- = \dfrac{5-\sqrt{17}}{4}$ et $x_+ = \dfrac{5+\sqrt{17}}{4} \simeq \dfrac{5+\sqrt{16}}{4} = \dfrac{9}{4} = 2,25$.
  La fonction polynomiale associée à P est négative sur $[x_-, x_+]$ et positive ailleurs.
  Ainsi, pour tout $n \geqslant 3$:

$$P(n) \geqslant 0 \quad \text{et donc} \quad r_\theta(Z_n) \geqslant r_\theta(M_n)$$

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{Pour estimer le paramètre } \theta \text{, on choisit l'estimateur } M_n \text{ qui possède un risque} \\ \text{quadratique plus faible que l'estimateur } Z_n.\end{array}}$$

□

4. **Un premier intervalle de confiance asymptotique pour θ**

a) Montrer que la suite de variables aléatoires $\left(2\sqrt{2n}\ \dfrac{Z_n - \theta}{\theta}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en loi vers une variable aléatoire de loi normale centrée réduite.

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

- Commençons par rappeler :

$$Z_n = \frac{3}{2}\, Y_n = \frac{3}{2}\, \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{3}{2}\, X_i\right)$$

- Pour tout $i \in \mathbb{N}^*$, notons $R_i = \dfrac{3}{2}\ X_i$.
  La suite $(R_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite de v.a.r. :
  × indépendantes,
  × de même loi (car les v.a.r. X_i ont même loi),
  × de même espérance $\mathbb{E}_\theta(R_1) = \mathbb{E}_\theta\left(\dfrac{3}{2}\ X_1\right) = \dfrac{3}{2}\ \mathbb{E}_\theta(X_1) = \dfrac{3}{2}\ \dfrac{2}{3}\ \theta = \theta$,
  × de même variance $\mathbb{V}(R_1) = \mathbb{V}\left(\dfrac{3}{2}\ X_1\right) = \dfrac{3^2}{2^2}\ \mathbb{V}(X_1) = \dfrac{9}{4}\ \dfrac{\theta^2}{18} = \dfrac{\theta^2}{8}$.

  Ainsi, d'après le théorème central limite :

$$\overline{R_n}^* \underset{n\to+\infty}{\overset{\mathscr{L}}{\longrightarrow}} Z \quad \text{où} \quad Z \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$$

- Remarquons alors :

$$\begin{aligned}
\overline{R_n}^* &= \frac{\overline{R_n} - \mathbb{E}_\theta\left(\overline{R_n}\right)}{\sigma\left(\overline{R_n}\right)} \\
&= \frac{Z_n - \mathbb{E}_\theta(Z_n)}{\sigma(Z_n)} && \textit{(par définition de } Z_n\textit{)} \\
&= \frac{Z_n - \theta}{\sqrt{\mathbb{V}(Z_n)}} && \textit{(par définition de } Z_n \textit{ en } \textbf{2.c)}\textit{)} \\
&= \frac{Z_n - \theta}{\sqrt{\frac{\theta^2}{8n}}} && \textit{(d'après la question } \textbf{2.d)}\textit{)} \\
&= \frac{Z_n - \theta}{\frac{\sqrt{\theta^2}}{\sqrt{8n}}} \\
&= \sqrt{8n}\ \frac{Z_n - \theta}{\theta} \ = \ 2\sqrt{2n}\ \frac{Z_n - \theta}{\theta}
\end{aligned}$$

> Ainsi, la suite de variables aléatoires $\left(2\sqrt{2n}\ \dfrac{Z_n-\theta}{\theta}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge bien en loi vers Z, v.a.r. de loi normale centrée réduite. □

b) Dans la suite, on note $\alpha \in]0,1[$ et on note Φ la fonction de répartition associée à loi normale centrée réduite. Enfin, on note $t_{1-\frac{\alpha}{2}}$ l'unique réel tel que $\Phi(t_{1-\frac{\alpha}{2}}) = 1 - \frac{\alpha}{2}$.
Justifier l'existence de $t_{1-\frac{\alpha}{2}}$.

Démonstration.
La fonction Φ est :
× continue sur $]-\infty,+\infty[$,
× strictement croissante sur $]-\infty,+\infty[$.
Elle réalise donc une bijection de $]-\infty,+\infty[$ sur $\Phi\big(]-\infty,+\infty[\big)$. Or :

$$\Phi\big(]-\infty,+\infty[\big) = \left]\lim_{x\to-\infty} \Phi(x), \lim_{x\to+\infty} \Phi(x)\right[=]0,1[$$

> Comme $(1-\frac{\alpha}{2}) \in]0,1[$, alors $1-\frac{\alpha}{2}$ possède un unique antécédent $t_{1-\frac{\alpha}{2}} \in]-\infty,+\infty[$ par Φ. □

c) Justifier que : $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left(\left[-t_{1-\frac{\alpha}{2}} \leqslant 2\sqrt{2n}\ \dfrac{Z_n-\theta}{\theta} \leqslant t_{1-\frac{\alpha}{2}}\right]\right) = 1-\alpha$.
En déduire un intervalle de confiance asymptotique de θ au niveau de confiance 95%.
(on donne $\Phi(1,96) = 0,975$*)*

Démonstration.

- D'après la question précédente : $2\sqrt{2n}\ \dfrac{Z_n-\theta}{\theta} \underset{n\to+\infty}{\overset{\mathscr{L}}{\longrightarrow}} Z$ où $Z \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$.
- On en déduit notamment :
$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left(\left[-t_{1-\frac{\alpha}{2}} \leqslant 2\sqrt{2n}\ \frac{Z_n-\theta}{\theta} \leqslant t_{1-\frac{\alpha}{2}}\right]\right) = \mathbb{P}\left(\left[-t_{1-\frac{\alpha}{2}} \leqslant Z \leqslant t_{1-\frac{\alpha}{2}}\right]\right)$$
- Il suffit alors de remarquer :
$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(\left[-t_{1-\frac{\alpha}{2}} \leqslant Z \leqslant t_{1-\frac{\alpha}{2}}\right]\right) &= \Phi\big(t_{1-\frac{\alpha}{2}}\big) - \Phi\big(-t_{1-\frac{\alpha}{2}}\big) \\
&= \Phi\big(t_{1-\frac{\alpha}{2}}\big) - \Big(1-\Phi\big(t_{1-\frac{\alpha}{2}}\big)\Big) && \textit{(par propriété de } \Phi\textit{)} \\
&= 2\Phi\big(t_{1-\frac{\alpha}{2}}\big) - 1 \\
&= 2\big(1-\tfrac{\alpha}{2}\big) - 1 && \textit{(par définition de } t_{1-\frac{\alpha}{2}}\textit{)} \\
&= 1-\alpha
\end{aligned}$$
$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left(\left[-t_{1-\frac{\alpha}{2}} \leqslant 2\sqrt{2n}\ \frac{Z_n-\theta}{\theta} \leqslant t_{1-\frac{\alpha}{2}}\right]\right) = 1-\alpha}$$
- Il reste alors à isoler θ dans l'inégalité précédente afin d'obtenir l'intervalle de confiance souhaité. Plus précisément :
$$\begin{aligned}
& \mathbb{P}\left(\left[-t_{1-\frac{\alpha}{2}} \ \leqslant\ 2\sqrt{2n}\ \frac{Z_n-\theta}{\theta} \ \leqslant\ t_{1-\frac{\alpha}{2}}\right]\right) \\
=\ & \mathbb{P}\left(\left[-t_{1-\frac{\alpha}{2}} \ \leqslant\ 2\sqrt{2n}\ \left(\frac{Z_n}{\theta}-1\right) \ \leqslant\ t_{1-\frac{\alpha}{2}}\right]\right) \\
=\ & \mathbb{P}\left(\left[-\frac{t_{1-\frac{\alpha}{2}}}{2\sqrt{2n}} \ \leqslant\ \frac{Z_n}{\theta}-1 \ \leqslant\ \frac{t_{1-\frac{\alpha}{2}}}{2\sqrt{2n}}\right]\right) \\
=\ & \mathbb{P}\left(\left[1-\frac{t_{1-\frac{\alpha}{2}}}{2\sqrt{2n}} \ \leqslant\ \frac{Z_n}{\theta} \ \leqslant\ 1+\frac{t_{1-\frac{\alpha}{2}}}{2\sqrt{2n}}\right]\right) \\
=\ & \mathbb{P}\left(\left[\frac{1}{1-\frac{t_{1-\frac{\alpha}{2}}}{2\sqrt{2n}}} \ \leqslant\ \frac{\theta}{Z_n} \ \leqslant\ \frac{1}{1+\frac{t_{1-\frac{\alpha}{2}}}{2\sqrt{2n}}}\right]\right) \\
=\ & \mathbb{P}\left(\left[\frac{Z_n}{1-\frac{t_{1-\frac{\alpha}{2}}}{2\sqrt{2n}}} \ \leqslant \theta\ \leqslant\ \frac{Z_n}{1+\frac{t_{1-\frac{\alpha}{2}}}{2\sqrt{2n}}}\right]\right) && \textit{(car } Z_n \textit{ est presque sûrement strictement positive)}
\end{aligned}$$
Notons $U_n = \dfrac{Z_n}{1-\frac{t_{1-\frac{\alpha}{2}}}{2\sqrt{2n}}}$ et $V_n = \dfrac{Z_n}{1+\frac{t_{1-\frac{\alpha}{2}}}{2\sqrt{2n}}}$. On a alors :
$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left([U_n \leqslant \theta \ \leqslant\ V_n]\right) = 1-\alpha$$

$$\boxed{\text{En choisissant } \alpha = 0,05\text{, on a bien obtenu un intervalle de confiance asymptotique } [U_n, V_n].}$$

Remarque
Les v.a.r. qui composent l'intervalle de confiance $[U_n, V_n]$ ne dépendent pas de θ. Si c'était le cas, U_n et V_n ne seraient pas des estimateurs ! On insiste sur le fait que, par définition, un estimateur ne peut dépendre de θ. □

5. Un second intervalle de confiance asymptotique pour θ

a) Montrer que la suite de variables aléatoires $\left(2n\left(1-\dfrac{M_n}{\theta}\right)\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en loi vers une variable aléatoire W telle que W suit la loi exponentielle $\mathcal{E}(1)$.

Démonstration.

- Notons $Q_n = 2n\ \left(1-\dfrac{M_n}{\theta}\right)$ et $h : x \mapsto 2n\ \left(1-\dfrac{x}{\theta}\right)$. Ainsi, $Q_n = h(M_n)$ et :

$$\begin{array}{rcll} Q_n(\Omega) & = & \big(h(M_n)\big)(\Omega) \ = \ h\big(M_n(\Omega)\big) & \\ & = & h([0,\theta]) & \\ & = & [h(\theta), h(0)] & \textit{(car h est continue et strictement décroissante sur $[0,\theta]$)} \\ & = & [0, 2n] & \end{array}$$

- Déterminons la fonction de répartition de Q_n.
  Soit $x \in \mathbb{R}$. Trois cas se présentent :

  × si $x < 0$: alors $[Q_n \leqslant x] = \varnothing$. Ainsi :

$$F_{Q_n}(x) \ = \ \mathbb{P}\big(\, [Q_n \leqslant x] \,\big) \ = \ \mathbb{P}(\varnothing) \ = \ 0$$

  × si $x \in [0, 2n]$:

$$\begin{array}{rcll} F_{Q_n}(x) & = & \mathbb{P}\left([Q_n \leqslant x]\right) & \\ & = & \mathbb{P}\left(\left[2n\ \left(1-\dfrac{M_n}{\theta}\right) \leqslant x\right]\right) & \\ & = & \mathbb{P}\left(\left[1-\dfrac{M_n}{\theta} \leqslant \dfrac{x}{2n}\right]\right) & \textit{(car $2n>0$)} \\ & = & \mathbb{P}\left(\left[\dfrac{M_n}{\theta} \geqslant 1-\dfrac{x}{2n}\right]\right) & \\ & = & \mathbb{P}\left(\left[M_n \geqslant \theta\left(1-\dfrac{x}{2n}\right)\right]\right) & \textit{(car $\theta>0$)} \\ & = & 1-\mathbb{P}\left(\left[M_n < \theta\left(1-\dfrac{x}{2n}\right)\right]\right) & \\ & = & 1-F_{M_n}\left(\theta\left(1-\dfrac{x}{2n}\right)\right) & \textit{(car M_n est une v.a.r. à densité)} \\ & = & 1-\left(\dfrac{\left(\theta\left(1-\frac{x}{2n}\right)\right)^2}{\theta^2}\right)^n \ = \ 1-\left(\dfrac{\cancel{\theta^2}\left(1-\frac{x}{2n}\right)^2}{\cancel{\theta^2}}\right)^n \ = \ 1-\left(1-\dfrac{x}{2n}\right)^{2n} & \end{array}$$

× si $x > 2n$: alors $[Q_n \leqslant x] = \Omega$. Ainsi :

$$F_{Q_n}(x) \ = \ \mathbb{P}\big([Q_n \leqslant x]\big) \ = \ \mathbb{P}(\Omega) \ = \ 1$$

$$\boxed{\text{En résumé : } F_{Q_n} : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - \left(1 - \dfrac{x}{2n}\right)^{2n} & \text{si } x \in [0, 2n] \\ 1 & \text{si } x > 2n \end{cases} .}$$

- Pour démontrer la convergence en loi de la suite $(Q_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$, on s'intéresse, pour tout $x \in \mathbb{R}$, à la limite de $F_{Q_n}(x)$. Soit $x \in \mathbb{R}$. Trois cas se présentent :
  × si $x \leqslant 0$:
  $$F_{Q_n}(x) = 0 \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$$
  × si $x > 0$: alors, pour n suffisamment grand, $x \leqslant 2n$.
  Plus précisément, cela est vrai à partir du rang $n_0 = \left\lceil \dfrac{x}{2} \right\rceil$. Ainsi, pour tout $n \geqslant n_0$:
  $$F_{Q_n}(x) \ = \ 1 - \left(1 - \frac{x}{2n}\right)^{2n}$$
  Remarquons alors :
  $$\left(1 - \frac{x}{2n}\right)^{2n} \ = \ \mathrm{e}^{2n \ \ln\left(1 - \frac{x}{2n}\right)}$$
  Enfin :
  $$2n \ \ln\left(1 - \frac{x}{2n}\right) \ \underset{n \to +\infty}{\sim} \ -\frac{x}{2n} \ 2n \ = \ -x$$
  Ainsi, par composition des limites :
  $$\lim_{n \to +\infty} F_{Q_n}(x) \ = \ \lim_{n \to +\infty} 1 - \left(1 - \frac{x}{2n}\right)^{2n} \ = \ 1 - \mathrm{e}^{-x}$$
  On en conclut que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{n \to +\infty} F(x)$ où F est la fonction :
  $$F : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant 0 \\ 1 - \mathrm{e}^{-x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$
  On reconnaît la fonction de répartition associée à la loi exponentielle de paramètre 1.

  $$\boxed{\text{En conclusion, la suite } (Q_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \text{ converge en loi vers une v.a.r. } W \text{ telle que } W \hookrightarrow \mathcal{E}(1).}$$

Remarque

- La fonction de répartition de Q_n est définie par cas (c'est généralement le cas). La difficulté de la question est que ces cas dépendent de n. Ainsi, lors de la recherche de la limite de $F_{Q_n}(x)$, on ne peut faire une disjonction de cas en utilisant directement les cas qui sont donnés par la fonction F_{Q_n} (à savoir $x < 0$, $x \in [0, 2n]$ et $x > 2n$). L'idée est alors de « passer à la limite » dans l'expression de ces cas. En agissant ainsi, on obtient : « $x \leqslant 0$, $x \in [0, +\infty]$, $x \geqslant +\infty$ ». Le troisième cas est écarté (il n'y a pas de réel $x \geqslant +\infty$). On considère alors les intervalles ouverts obtenus dans les deux premiers cas à savoir : $x < 0$ et $x \in \,]0, +\infty[$.
  Le cas $x = 0$ n'est pas traité séparément dans la rédaction de la question précédente uniquement car il coïncide avec le cas $x < 0$.
- Dans le cas où la fonction de répartition est définie par des cas **indépendants de n**, alors ces cas fournissent la disjonction à opérer. $\square$

b) Calculer $\mathbb{P}([-\ln(0,975) \leqslant W \leqslant -\ln(0,025)])$.

Démonstration.

- Tout d'abord : $1 \geqslant 0,975 \geqslant 0,025$.
  Ainsi, par croissance de la fonction ln sur $]0,+\infty[$:
  $$\ln(1) \geqslant \ln(0,975) \geqslant \ln(0,025) \quad \text{puis} \quad 0 \leqslant -\ln(0,975) \leqslant -\ln(0,025)$$
- On a alors :
  $$\begin{aligned} & \mathbb{P}([-\ln(0,975) \leqslant W \leqslant -\ln(0,025)]) \\ = \ & F_W(-\ln(0,025)) - F_W(-\ln(0,975)) \\ = \ & \left(\cancel{1} - \mathrm{e}^{-(-\ln(0,025))}\right) - \left(\cancel{1} - \mathrm{e}^{-(-\ln(0,975))}\right) && \textit{(car } -\ln(0,975) \geqslant 0 \textit{ et } -\ln(0,025) \geqslant 0\textit{)} \\ = \ & \mathrm{e}^{\ln(0,975)} - \mathrm{e}^{\ln(0,025)} \\ = \ & 0,975 - 0,025 \ = \ 0,95 \end{aligned}$$
  $$\boxed{\mathbb{P}([-\ln(0,975) \leqslant W \leqslant -\ln(0,025)]) = 0,95}$$

□

c) En déduire un nouvel intervalle de confiance asymptotique de θ au niveau de confiance 95%.

Démonstration.

- D'après les deux questions précédentes :
  $$\begin{aligned} \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left(\left[-\ln(0,975) \leqslant 2n\left(1-\frac{M_n}{\theta}\right) \leqslant -\ln(0,025)\right]\right) &= \mathbb{P}([-\ln(0,975) \leqslant W \leqslant -\ln(0,025)]) \\ &= 0,95 \end{aligned}$$
- Notons $u = -\ln(0,975)$ et $v = -\ln(0,025)$. Il reste alors à isoler θ dans l'inégalité précédente afin d'obtenir l'intervalle de confiance souhaité. Plus précisément :
  $$\begin{aligned} & \mathbb{P}\left(\left[u \leqslant 2n\left(1-\frac{M_n}{\theta}\right) \leqslant v\right]\right) \\ = \ & \mathbb{P}\left(\left[\frac{u}{2n} \leqslant 1-\frac{M_n}{\theta} \leqslant \frac{v}{2n}\right]\right) && \textit{(car } 2n > 0\textit{)} \\ = \ & \mathbb{P}\left(\left[\frac{u}{2n} - 1 \leqslant -\frac{M_n}{\theta} \leqslant \frac{v}{2n} - 1\right]\right) \\ = \ & \mathbb{P}\left(\left[-\frac{u}{2n} + 1 \geqslant \frac{M_n}{\theta} \geqslant -\frac{v}{2n} + 1\right]\right) \\ = \ & \mathbb{P}\left(\left[\frac{1}{1-\frac{u}{2n}} \leqslant \frac{\theta}{M_n} \leqslant \frac{1}{1-\frac{v}{2n}}\right]\right) && \textit{(par stricte croissance de la fonction inverse sur } \mathbb{R}_+^*\textit{)} \\ = \ & \mathbb{P}\left(\left[\frac{M_n}{1-\frac{u}{2n}} \leqslant \theta \leqslant \frac{M_n}{1-\frac{v}{2n}}\right]\right) && \textit{(car } M_n \textit{ est presque sûrement strictement positive)} \end{aligned}$$
  Notons $U_n = \dfrac{M_n}{1-\frac{u}{2n}}$ et $V_n = \dfrac{M_n}{1-\frac{v}{2n}}$. On a alors :
  $$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left([U_n \leqslant \theta \ \leqslant \ V_n]\right) = 0,95$$
  $$\boxed{\text{On a bien obtenu un intervalle de confiance asymptotique } [U_n, V_n].}$$

□

Exercice 5 (EDHEC 2013)

1. On considère la fonction f définie pour tout x réel par : $f(x) = \begin{cases} 1 - |x| & \text{si } x \in [-1, 1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

a) Calculer $\displaystyle\int_0^1 f(x)\ dx$. En déduire sans calcul $\displaystyle\int_{-1}^0 f(x)\ dx$.

Démonstration.

- La fonction $x \mapsto 1 - |x|$ est continue sur $]-1, 1[$ car la fonction valeur absolue l'est.
  De plus, la fonction f est aussi continue en 1 car :

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1} 1 - x \quad = \quad \underset{\displaystyle f(1)}{\overset{\displaystyle 0}{\shortparallel}} \quad = \quad \lim_{x\to 1} 0 = \lim_{x\to 1^+} f(x)$$

  On démontre de même que la fonction est continue en -1.

$$\boxed{\text{La fonction est continue sur } [-1, 1]. \text{ Elle l'est donc aussi sur } [0, 1].}$$

- De plus :

$$\int_0^1 f(t)\ dt = \int_0^1 (1 - t)\ dt = \left[t - \frac{t^2}{2} \right]_0^1 = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\boxed{\int_0^1 f(t)\ dt = \frac{1}{2}}$$

- Soit $x \in [-1, 1]$. Alors $-x \in [-1, 1]$ et :

$$f(-x) = 1 - |-x| = 1 - |x| = f(x)$$

$$\boxed{\text{Donc la fonction } f \text{ est paire.}}$$

$$\boxed{\text{Ainsi : } \int_{-1}^0 f(t)\ dt = \int_0^1 f(t)\ dt = \frac{1}{2}.}$$

Remarque
La démonstration du résultat précédent s'effectue grâce à un changement de variable.
On effectue le changement de variable $\boxed{u = -t}$.

$$\left|\begin{array}{l} u = -t \quad \text{(et donc } t = -u) \\ \hookrightarrow du = -dt \quad \text{et} \quad dt = -du \\ \bullet\ t = -1 \ \Rightarrow\ u = 1 \\ \bullet\ t = 0 \ \Rightarrow\ u = 0 \end{array}\right.$$

Ce changement de variable est valide car $\psi : u \mapsto -u$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, 1]$.
On a donc :

$$\int_{-1}^0 f(t)\ dt = \int_1^0 f(-u)(-\ du) = \int_0^1 f(-u)\ du$$

Or, la fonction f est paire (d'après la question ***1.***), donc :

$$\int_{-1}^0 f(t)\ dt = \int_0^1 f(u)\ du = \frac{1}{2}$$

□

b) Vérifier que f peut être considérée comme une densité.

Démonstration.

- La fonction f est continue sur $]-1,1[$ en tant que somme de fonctions continues sur $]-1,1[$. Elle est continue sur $]-\infty,-1[$ et sur $]1,+\infty[$ en tant que fonction constante.

$$\boxed{\text{La fonction } f \text{ est continue sauf éventuellement en } -1 \text{ et } 1.}$$

- Pour tout $x \in]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[$, $f(x) = 0$, donc $f(x) \geqslant 0$.
  D'autre part, si $x \in [-1,1]$:

$$-1 \leqslant x \leqslant 1 \;\Leftrightarrow\; 0 \leqslant |x| \leqslant 1 \;\Leftrightarrow\; -1 \leqslant -|x| \leqslant 0 \;\Leftrightarrow\; 0 \leqslant 1-|x| \leqslant 1 \;\Leftrightarrow\; 0 \leqslant f(x) \leqslant 1$$

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) \geqslant 0}$$

- Montrons que l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\ dt$ converge et vaut 1.
  La fonction f est nulle en dehors de $[-1,1]$. Donc :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\ dt = \int_{-1}^{1} f(t)\ dt$$

  De plus, f est continue sur $[-1,1]$, donc l'intégrale $\displaystyle\int_{-1}^{1} f(t)\ dt$ est bien définie.

$$\int_{-1}^{1} f(t)\ dt = \int_{-1}^{0} f(t)\ dt + \int_{0}^{1} f(t)\ dt = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

$$\boxed{\text{Donc } \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\ dt \text{ converge et vaut 1.}}$$

$$\boxed{\text{La fonction } f \text{ est une densité de probabilité.}}$$

□

On considère dorénavant une variable aléatoire X, définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, et admettant f comme densité.

2. a) Établir l'existence de l'espérance de X, puis donner sa valeur.

Démonstration.

- La v.a.r. X admet une espérance ssi l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t\,f(t)\ dt$ converge absolument, ce qui équivaut à démontrer la convergence pour des calculs de moments.
- La fonction f est nulle en dehors de $[-1,1]$, donc :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} t\,f(t)\ dt = \int_{-1}^{1} t\,f(t)\ dt$$

  De plus, la fonction $t \mapsto t\,f(t)$ est continue sur $[-1,1]$, donc l'intégrale $\displaystyle\int_{-1}^{1} t\,f(t)\ dt$ est bien définie.

$$\boxed{\text{On en déduit que } X \text{ admet une espérance.}}$$

- Par parité de la fonction $t \mapsto f(t)$, on déduit, à l'aide du changement de variable $\boxed{u = -t}$:

$$\int_0^1 t\, f(t)\, dt \;=\; \int_0^{-1} (-u)\, f(-u)(-du) \;=\; \int_0^{-1} u\, f(-u) du \;=\; \int_0^{-1} u\, f(u) du = -\int_{-1}^0 u\, f(u) du$$

- Ainsi, d'après la relation de Chasles :

$$\int_{-1}^1 t\ f(t)\ dt \;=\; \int_{-1}^0 t\ f(t)\ dt + \int_0^1 t\ f(t)\ dt \;=\; 0$$

$$\boxed{\text{En conclusion : } \mathbb{E}(X) = 0.}$$

Remarque

On peut aussi effectuer un calcul direct de $\displaystyle\int_{-1}^1 t\, f(t)\ dt$:

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^1 t\, f(t)\ dt &= \int_{-1}^0 t\, f(t)\ dt + \int_0^1 t\, f(t)\ dt \\
&= \int_{-1}^0 t(1+t)\ dt + \int_0^1 t(1-t)\ dt \\
&= \int_{-1}^0 (t+t^2)\ dt + \int_0^1 (t-t^2)\ dt \\
&= \left[\frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} \right]_{-1}^{0} + \left[\frac{t^2}{2} - \frac{t^3}{3} \right]_{0}^{1} \\
&= -\left(\frac{(-1)^2}{2} + \frac{(-1)^3}{3} \right) + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \\
&= -\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \;=\; 0
\end{aligned}$$

□

b) Établir l'existence de la variance de X, puis donner sa valeur.

Démonstration.

- La v.a.r. X admet une variance ssi l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t^2\, f(t)\ dt$ converge absolument, ce qui équivaut à démontrer la convergence pour des calculs de moments.
- La fonction f est nulle en dehors de $[-1, 1]$, donc :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} t^2\, f(t)\ dt = \int_{-1}^1 t^2\, f(t)\ dt$$

De plus, la fonction $t \mapsto t^2\, f(t)$ est continue sur $[-1, 1]$, donc l'intégrale $\displaystyle\int_{-1}^1 t^2\, f(t)\ dt$ est bien définie.

$$\boxed{\text{On en déduit que } X \text{ admet une variance.}}$$

- Par parité de la fonction $t \mapsto f(t)$, on déduit, à l'aide du changement de variable $\boxed{u = -t}$:

$$\int_0^1 t^2\ f(t)\ dt \;=\; \int_0^{-1} (-u)^2\ f(-u)(-du) \;=\; -\int_0^{-1} u^2\ f(u) du = \int_{-1}^0 u^2\ f(u) du$$

- Enfin :

$$\begin{aligned}\int_0^1 t^2\, f(t)\, dt &= \int_0^1 t^2\, f(t)\, dt = \int_0^1 t^2(1-t)\, dt \\ &= \int_0^1 (t^2-t^3)\, dt = \left[\frac{t^3}{3}-\frac{t^4}{4}\right]_0^1 \\ &= \frac{1}{3}-\frac{1}{4} = \frac{1}{12}\end{aligned}$$

- Ainsi, d'après la relation de Chasles :

$$\int_{-1}^1 t^2\ f(t)\ dt = \int_{-1}^0 t^2\ f(t)\ dt + \int_0^1 t^2\ f(t)\ dt = 2\int_0^1 t^2\ f(t)\ dt = 2\times\frac{1}{12} = \frac{1}{6}$$

$$\boxed{\text{On en déduit : } \mathbb{E}(X^2) = \frac{1}{6}.}$$

- D'après la formule de Koenig-Huygens :

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2 = \frac{1}{6} - 0 = \frac{1}{6}$$

$$\boxed{\mathbb{V}(X) = \frac{1}{6}}$$

□

3. Déterminer la fonction de répartition de X, notée F_X.

Démonstration.
Soit $x \in \mathbb{R}$. Plusieurs cas se présentent.

- Si $x < -1$. La fonction f est nulle sur $]-\infty, x]$, donc :

$$F_X(x) = \mathbb{P}([X \leqslant x]) = \int_{-\infty}^x f(t)\ dt = 0$$

- Si $x \in [-1, 0]$.

$$\begin{aligned}F_X(x) &= \mathbb{P}([X \leqslant x]) = \int_{-\infty}^x f(t)\ dt \\ &= \cancel{\int_{-\infty}^{-1} f(t)\ dt} + \int_{-1}^x f(t)\ dt \\ &= \int_{-1}^x (1+t)\ dt = \left[t+\frac{t^2}{2}\right]_{-1}^x \\ &= \left(x+\frac{x^2}{2}\right) - \left(-1+\frac{(-1)^2}{2}\right) \\ &= \frac{1}{2}+x+\frac{x^2}{2}\end{aligned}$$

- Si $x \in [0,1]$.

$$\begin{array}{rcl} F_X(x) & = & \mathbb{P}([X \leqslant x]) = \displaystyle\int_{-\infty}^{x} f(t)\, dt \\ & = & \cancel{\displaystyle\int_{-\infty}^{-1} f(t)\, dt} + \displaystyle\int_{-1}^{0} f(t)\, dt + \displaystyle\int_{0}^{x} f(t)\, dt \\ & = & \dfrac{1}{2} + \displaystyle\int_{0}^{x} (1-t)\, dt \\ & = & \dfrac{1}{2} + \left[\, t - \dfrac{t^2}{2} \, \right]_0^x \\ & = & \dfrac{1}{2} + x - \dfrac{x^2}{2} \end{array}$$

- Si $x > 1$. Comme f est une densité :

$$F_X(x) = \mathbb{P}([X \leqslant x]) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\, dt = \cancel{\int_{-\infty}^{-1} f(t)\, dt} + \int_{-1}^{1} f(t)\, dt + \cancel{\int_{1}^{x} f(t)\, dt} = 1$$

$$\boxed{\text{Finalement, on obtient : } F_X : x \mapsto \left\{ \begin{array}{cl} 0 & \text{si } x < -1 \\ \dfrac{1}{2} + x + \dfrac{x^2}{2} & \text{si } x \in [-1, 0[\\ \dfrac{1}{2} + x - \dfrac{x^2}{2} & \text{si } x \in [0, 1] \\ 1 & \text{si } x > 1 \end{array} \right.}$$

□