DS1 (version A)

Exercice 1

On désigne par I la matrice identité de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.
On note $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et on considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ est : $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -3 & 4 & 3 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$.

1. ***a)*** Calculer $(A - 2I)(A - I)^2$.

b) En déduire que A est inversible et déterminer A^{-1}.

2. On note $F = \{X \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid AX = 2X\}$.

a) Résoudre l'équation $AX = 2X$ d'inconnue $X \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

b) En déduire que F est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ et déterminer une base de F.

3. On note $G = \{X \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid AX = X\}$.

a) Résoudre l'équation $AX = X$ d'inconnue $X \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

b) En déduire que G est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ et déterminer une base de G.

4. On note $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

a) Démontrer que P est inversible et déterminer son inverse.

b) Montrer que $P^{-1}AP = T$ où T est la matrice triangulaire supérieure $T = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

c) Démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $P^{-1}A^nP = T^n$.

5. ***a)*** Exhiber une matrice $N \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ telle que T s'écrit $T = D + N$, où :

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

b) Calculer N^2 et en déduire N^k pour tout $k \in \mathbb{N}$.

c) Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer T^n en fonction des matrices D et N, à l'aide de la formule du binôme de Newton.

Exercice 2

On pourra utiliser sans justification que $2 < \mathrm{e}^1 < 3$.

On s'intéresse dans cet exercice à la série de terme général $u_n = (-1)^n \dfrac{\ln(n)}{n}$ pour $n \geqslant 1$.

1. On note, pour tout $n \geqslant 1$: $w_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k} - \ln(n)$.

a) On admet qu'il existe des fonctions $h_1 :]-1,1[\to \mathbb{R}$ et $h_2 :]-1,1[\to \mathbb{R}$ telles que $\lim\limits_{x \to 0} h_1(x) = 0$ et $\lim\limits_{x \to 0} h_2(x) = 0$ vérifiant, pour tout $x \in]-1,1[$:

$$\ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + x^2\, h_1(x) \qquad \text{et} \qquad \frac{x}{1+x} = x - x^2 + x^2\, h_2(x)$$

Montrer qu'il existe une fonction $h :]-1,1[\to \mathbb{R}$ telle que $\lim\limits_{x \to 0} h(x) = 0$ vérifiant :

$$\forall x \in]-1,1[, \ \frac{x}{1+x} - \ln(1+x) = -\frac{1}{2}x^2 + x^2\, h(x)$$

b) Montrer : $w_{n+1} - w_n \underset{n \to +\infty}{\sim} -\dfrac{1}{2n^2}$.

On pourra, avec une justification appropriée, utiliser le résultat de la question précédente pour $x = \dfrac{1}{n}$.

c) Montrer que la série de terme général $(w_{n+1} - w_n)$ converge, puis que la suite (w_n) converge vers un réel, appelé **constante d'Euler**. On notera ce réel γ.

2. Étudier les variations de la fonction $\varphi : t \mapsto \dfrac{\ln(t)}{t}$ sur $]0, +\infty[$. Dresser le tableau de variations de la fonction φ en précisant les limites aux bornes de son ensemble de définition.

3. On note, pour tout entier $n \geqslant 1$:

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$$

a) Montrer que les suites $(S_{2n})_{n \geqslant 1}$ et $(S_{2n+1})_{n \geqslant 1}$ sont adjacentes.

b) Montrer que la série de terme général u_n converge.

c) Cette série est-elle absolument convergente ?

4. On note pour tout entier $n \geqslant 1$: $v_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{\ln(k)}{k} - \dfrac{\big(\ln(n)\big)^2}{2}$.

a) Montrer, pour tout entier $n \geqslant 3$:

$$\frac{\ln(n+1)}{n+1} \ \leqslant \ \int_n^{n+1} \frac{\ln(t)}{t}\, dt \ \leqslant \ \frac{\ln(n)}{n}$$

b) Calculer, pour tout $n \geqslant 3$, $\displaystyle\int_n^{n+1} \frac{\ln(t)}{t}\, dt$.

c) En déduire que la suite $(v_n)_{n \geqslant 3}$ est décroissante.

d) Montrer que la suite (v_n) est convergente.

5. Montrer, pour tout entier $n \geqslant 1$,

$$S_{2n} = 2\sum_{k=1}^{n} \frac{\ln(2k)}{2k} - \sum_{k=1}^{2n} \frac{\ln(k)}{k}$$

puis :

$$S_{2n} = \ln(2)\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} + v_n - v_{2n} - \frac{\big(\ln(2)\big)^2}{2} - \ln(2)\ln(n)$$

6. Démontrer alors :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{\ln(n)}{n} = \gamma \ln(2) - \frac{\big(\ln(2)\big)^2}{2}$$

Exercice 3

La fonction logarithme népérien est notée ln .

1. Soit $x \in [-1;1[$.

a) Montrer, pour tout n de $\mathbb{N}$ et tout t de $[-1;1[$:

$$\frac{1}{1-t} - \sum_{k=0}^{n} t^k = \frac{t^{n+1}}{1-t}$$

b) En déduire, pour tout n de $\mathbb{N}$ et tout t de $[-1;x]$:

$$\left| \frac{1}{1-t} - \sum_{k=0}^{n} t^k \right| \leqslant \frac{|t|^{n+1}}{1-x}$$

c) Établir, pour tout n de $\mathbb{N}$:

$$\left| -\ln(1-x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{k+1}}{k+1} \right| \leqslant \frac{1}{(n+2)(1-x)}$$

d) En déduire que la série $\sum\limits_{n \geqslant 1} \dfrac{x^n}{n}$ converge et a pour somme $-\ln(1-x)$.

En particulier, montrer : $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} \dfrac{1}{k\,2^k} = \ln(2)$.

e) Écrire un programme **Scilab** qui calcule et affiche une valeur approchée de $\ln(2)$ à 10^{-3} près.

2. Un joueur lance une pièce équilibrée jusqu'à l'obtention du premier pile. S'il lui a fallu n lancers ($n \in \mathbb{N}^*$) pour obtenir ce premier pile, on lui fait alors tirer au hasard un billet de loterie parmi n billets dont un seul est gagnant.
Quelle est la probabilité que le joueur gagne ?

Exercice 4

Dans tout cet exercice, f désigne la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par :

$$\forall x \in\,]0,+\infty[,\ f(x) = x - \ln(x)$$

Partie I : Étude de la fonction f

1. Dresser le tableau de variations de f en précisant ses limites en 0 et en $+\infty$.

2. Montrer que l'équation $f(x) = 2$, d'inconnue $x \in\,]0,+\infty[$, admet exactement deux solutions, que l'on note a et b, telles que $0 < a < 1 < b$.

3. Montrer : $b \in [2,4]$. On donne : $\ln(2) \simeq 0,7$.

Partie II : Étude d'une suite

On pose : $u_0 = 4 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \ln(u_n) + 2$.

4. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie et que l'on a : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \in [b,+\infty[$.

5. Déterminer la monotonie de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. En déduire qu'elle converge et préciser sa limite.

6. ***a)*** Montrer : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} - b \leqslant \dfrac{1}{2}(u_n - b)$.

b) En déduire : $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant u_n - b \leqslant \dfrac{1}{2^{n-1}}$.

7. ***a)*** Écrire une fonction **Scilab** d'en-tête `function u = suite(n)` qui, prenant en argument un entier n de $\mathbb{N}$, renvoie la valeur de u_n.

b) Recopier et compléter la ligne 3 de la fonction **Scilab** suivante afin que, prenant en argument un réel `epsilon` strictement positif, elle renvoie une valeur approchée de b à `epsilon` près.

```
1 function b = valeur_approchee(epsilon)
2     n = 0
3     while ..........
4         n = n + 1
5     end
6     b = suite(n)
7 endfunction
```

Partie III : Étude d'une fonction définie par une intégrale

On note Φ la fonction donnée par :

$$\Phi(x) = \int_x^{2x} \frac{1}{f(t)}\, dt$$

8. Montrer que Φ est bien définie et dérivable sur $]0, +\infty[$, et que l'on a :

$$\forall x \in \,]0, +\infty[, \ \Phi'(x) = \frac{\ln(2) - \ln(x)}{(x - \ln(x))(2x - \ln(2x))}$$

9. En déduire les variations de Φ sur $]0, +\infty[$.

10. Montrer : $\forall x \in \,]0, +\infty[, \ 0 \leqslant \Phi(x) \leqslant x$.

11. ***a)*** Montrer que Φ est prolongeable par continuité en 0.
On note encore Φ la fonction ainsi prolongée. Préciser alors $\Phi(0)$.

b) Montrer : $\lim\limits_{x \to 0} \Phi'(x) = 0$.
On admet que la fonction Φ est alors dérivable en 0 et que $\Phi'(0) = 0$.

12. On donne $\Phi(2) \simeq 1,1$ et on admet que $\lim\limits_{x \to +\infty} \Phi(x) = \ln(2) \simeq 0,7$.
Tracer l'allure de la courbe représentative de la fonction Φ ainsi que la tangente à la courbe au point d'abscisse 0.