DS1 (version A) /158

Exercice 1 /33

On désigne par I la matrice identité de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.
On note $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et on considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ est : $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -3 & 4 & 3 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$.

1. a) Calculer $(A-2I)(A-I)^2$.

- 1 pt : $(A-I)^2 = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$

- 1 pt : $(A-2I)(A-I)^2 = 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})}$.

b) En déduire que A est inversible et déterminer A^{-1}.

- 1 pt : $(A-2I)(A-I)^2 \ = \ A^3 - 4A^2 + 5A - 2I$

- 1 pt : $A^{-1} \ = \ \dfrac{1}{2}(A^2 - 4A + 5I)$

2. On note $F = \{X \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid AX = 2X\}$.

a) Résoudre l'équation $AX = 2X$ d'inconnue $X \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

- 1 pt : écriture système

- 1 pt : résolution du système

- 1 pt : $F = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$

b) En déduire que F est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ et déterminer une base de F.

- 1 pt : F est une sev

- 1 pt : famille génératrice

- 1 pt : famille libre

3. On note $G = \{X \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid AX = X\}$.

a) Résoudre l'équation $AX = X$ d'inconnue $X \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

- 1 pt : écriture système

- 1 pt : résolution du système

- 1 pt : $G = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$

b) En déduire que G est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ et déterminer une base de G.

- 1 pt : G est un sev

- 1 pt : famille génératrice

- 1 pt : famille libre

4. On note $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

a) Démontrer que P est inversible et déterminer son inverse.

- 3 pts : $P^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

b) Montrer que $P^{-1}AP = T$ où T est la matrice triangulaire supérieure $T = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

- 1 pt : pour $P^{-1}A = \begin{pmatrix} 4 & -4 & -2 \\ -4 & 5 & 4 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ **ou pour** $AP = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

- 1 pt : pour $P^{-1}AP = T$**.**

c) Démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $P^{-1}A^nP = T^n$.

- 1 pt : initialisation

- 2 pts : hérédité

5. *a)* Exhiber une matrice $N \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ telle que T s'écrit $T = D + N$, où :

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- 1 pt : $N = T - D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

b) Calculer N^2 et en déduire N^k pour tout $k \in \mathbb{N}$.

- 1 pt : $N^2 = 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})}$

- 1 pt : récurrence immédiate

c) Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer T^n en fonction des matrices D et N, à l'aide de la formule du binôme de Newton.

- 1 pt : D **et** N **commutent**

- 1 pt : formule du binôme correcte

- 1 pt : découpage valable car $n \geqslant 1$

- 1 pt : $\forall k \geqslant 2$**,** $N^k = 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})}$

- 1 pt : $T^n \ = \ D^n + n\,D^{n-1}\,N$

- 1 pt : cas $n = 0$

Exercice 2 /46

On pourra utiliser sans justification que $2 < e^1 < 3$.

On s'intéresse dans cet exercice à la série de terme général $u_n = (-1)^n \dfrac{\ln(n)}{n}$ pour $n \geqslant 1$.

1. On note, pour tout $n \geqslant 1$: $w_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k} - \ln(n)$.

a) On admet qu'il existe des fonctions $h_1 :]-1,1[\to \mathbb{R}$ et $h_2 :]-1,1[\to \mathbb{R}$ telles que $\lim\limits_{x\to 0} h_1(x) = 0$ et $\lim\limits_{x\to 0} h_2(x) = 0$ vérifiant, pour tout $x \in]-1,1[$:

$$\ln(1+x) = x - \frac{1}{2}\,x^2 + x^2\,h_1(x) \qquad \text{et} \qquad \frac{x}{1+x} = x - x^2 + x^2\,h_2(x)$$

Montrer qu'il existe une fonction $h :]-1,1[\to \mathbb{R}$ telle que $\lim\limits_{x\to 0} h(x) = 0$ vérifiant :

$$\forall x \in]-1,1[,\ \frac{x}{1+x} - \ln(1+x) = -\frac{1}{2}\,x^2 + x^2\,h(x)$$

- **1 pt :** $h = h_2 - h_1$
- **1 pt : vérifier que** $h :]-1,1[\to \mathbb{R}$
- **1 pt : vérifier que** $\lim\limits_{x\to 0} h(x) = 0$

b) Montrer : $w_{n+1} - w_n \underset{n\to+\infty}{\sim} -\dfrac{1}{2n^2}$.

On pourra, avec une justification appropriée, utiliser le résultat de la question précédente pour $x = \dfrac{1}{n}$.

- **1 pt :** $w_{n+1} - w_n \ = \ \dfrac{1}{n+1} - \ln\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)$
- **1 pt :** $\dfrac{1}{n} \in]-1,1[$
- **1 pt :** $\dfrac{1}{n+1} - \ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right) = -\dfrac{1}{2n^2} + \dfrac{1}{n^2}\,h\!\left(\dfrac{1}{n}\right)$
- **1 pt :** $\dfrac{w_{n+1} - w_n}{-\frac{1}{2n^2}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$

c) Montrer que la série de terme général $(w_{n+1} - w_n)$ converge, puis que la suite (w_n) converge vers un réel, appelé **constante d'Euler**. On notera ce réel γ.

- **1 pt :** $\dfrac{1}{2n^2} \geqslant 0$
- **1 pt :** $w_n - w_{n+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{2n^2}$
- **1 pt :** $\sum \dfrac{1}{2n^2}$ **série de Riemann convergente**
- **1 pt : citation critère pour dire que** $\sum (w_{n+1} - w_n)$ **converge**
- **1 pt : télescopage**
- **1 pt : conclusion** (w_n) **converge**

2. Étudier les variations de la fonction $\varphi : t \mapsto \dfrac{\ln(t)}{t}$ sur $]0, +\infty[$. Dresser le tableau de variations de la fonction φ en précisant les limites aux bornes de son ensemble de définition.

- 1 pt : φ dérivable sur $]0, +\infty[$ et $\varphi'(x) = \dfrac{1 - \ln(t)}{t^2}$

- 1 pt : signe $\varphi'(x)$ et variations de φ

- 1 pt : $\lim\limits_{x \to 0} \varphi(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x \to +\infty} \varphi(x) = 0$

3. On note, pour tout entier $n \geqslant 1$:

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$$

a) Montrer que les suites $(S_{2n})_{n \geqslant 1}$ et $(S_{2n+1})_{n \geqslant 1}$ sont adjacentes.

- 1 pt : $S_{2n+2} - S_{2n} = -\varphi(2n+1) + \varphi(2n+2)$

- 1 pt : $2n + 1 \geqslant \mathrm{e}$ et $2n + 2 \geqslant \mathrm{e}$

- 1 pt : φ décroissante, donc (S_{2n}) décroissante

- 1 pt : (S_{2n+1}) croissante

- 1 pt : $\lim\limits_{n \to +\infty} S_{2n+1} - S_{2n} = 0$

b) Montrer que la série de terme général u_n converge.

- 1 pt : théorème des suites adjacentes

- 3 pts : propriété de recouvrement

c) Cette série est-elle absolument convergente ?

- 1 pt : $|u_n| = \dfrac{\ln(n)}{n}$

- 1 pt : $0 \leqslant \dfrac{1}{n} \leqslant \dfrac{\ln(n)}{n}$

- 1 pt : $\sum \dfrac{1}{n}$ diverge

4. On note pour tout entier $n \geqslant 1$: $v_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{\ln(k)}{k} - \frac{\big(\ln(n)\big)^2}{2}$.

a) Montrer, pour tout entier $n \geqslant 3$:

$$\frac{\ln(n+1)}{n+1} \leqslant \int_n^{n+1} \frac{\ln(t)}{t}\, dt \leqslant \frac{\ln(n)}{n}$$

- 1 pt : $\varphi(n) \geqslant \varphi(t) \geqslant \varphi(n+1)$ par décroissance de φ sur $[\mathrm{e}, +\infty[$

- 1 pt : croissance de l'intégrale et bornes dans l'ordre croissant

b) Calculer, pour tout $n \geqslant 3$, $\displaystyle\int_n^{n+1} \frac{\ln(t)}{t}\, dt$.

- 1 pt : $\displaystyle\int_n^{n+1} \frac{\ln(t)}{t}\, dt = \frac{\big(\ln(n+1)\big)^2}{2} - \frac{\big(\ln(n)\big)^2}{2}$

c) En déduire que la suite $(v_n)_{n\geqslant 3}$ est décroissante.

- 1 pt : $v_{n+1} - v_n = \dfrac{\ln(n+1)}{n+1} - \dfrac{\big(\ln(n+1)\big)^2}{2} + \dfrac{\big(\ln(n)\big)^2}{2}$

- 1 pt : utilisation *4.a)* et *4.b)*

d) Montrer que la suite (v_n) est convergente.

- 1 pt : $\displaystyle\int_3^n \frac{\ln(t)}{t}\,dt \leqslant \sum_{k=3}^{n-1} \frac{\ln(k)}{k}$ **(sommation de *4.a)* + relation de Chasles)**

- 1 pt : $\displaystyle\int_3^n \frac{\ln(t)}{t}\,dt = \frac{\big(\ln(n)\big)^2}{2} - \frac{\big(\ln(3)\big)^2}{2}$

- 1 pt : $v_n \geqslant 0$

- 1 pt : théorème de convergence monotone

5. Montrer, pour tout entier $n \geqslant 1$,

$$S_{2n} = 2\sum_{k=1}^{n} \frac{\ln(2k)}{2k} - \sum_{k=1}^{2n} \frac{\ln(k)}{k}$$

puis :

$$S_{2n} = \ln(2)\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} + v_n - v_{2n} - \frac{\big(\ln(2)\big)^2}{2} - \ln(2)\ln(n)$$

- 1 pt : découpage pair / impair de $\displaystyle\sum_{k=1}^{2n} (-1)^k \frac{\ln(k)}{k}$

- 1 pt : introduction $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{\ln(2k)}{2k}$

- 1 pt : découpage pair / impair de $\displaystyle\sum_{k=1}^{2n} \frac{\ln(k)}{k}$

- 3 pts : fin du calcul (1 pt pour la définition de v_{2n}, 1 pt pour la définition de v_n, 1 pt pour le reste)

6. Démontrer alors :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{\ln(n)}{n} = \gamma\ln(2) - \frac{\big(\ln(2)\big)^2}{2}$$

- 1 pt : $S_{2n} = \ln(2)\,w_n + v_n - v_{2n} - \dfrac{\big(\ln(2)\big)^2}{2}$

- 1 pt : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} v_{2n} = \ell$

- 1 pt : passage à la limite pour conclure

Exercice 3 /29

La fonction logarithme népérien est notée ln .

1. Soit $x \in [-1;1[$.

a) Montrer, pour tout n de $\mathbb{N}$ et tout t de $[-1;1[$:

$$\frac{1}{1-t} - \sum_{k=0}^{n} t^k = \frac{t^{n+1}}{1-t}$$

- **1 pt :** $t \neq 1$
- **1 pt : reste**

b) En déduire, pour tout n de $\mathbb{N}$ et tout t de $[-1;x]$:

$$\left| \frac{1}{1-t} - \sum_{k=0}^{n} t^k \right| \leqslant \frac{|t|^{n+1}}{1-x}$$

- **1 pt :** $\left| \frac{1}{1-t} - \sum_{k=0}^{n} t^k \right| = \frac{|t|^{n+1}}{1-t}$
- **1 pt :** $\frac{1}{1-t} \leqslant \frac{1}{1-x}$

c) Établir, pour tout n de $\mathbb{N}$:

$$\left| -\ln(1-x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{k+1}}{k+1} \right| \leqslant \frac{1}{(n+2)(1-x)}$$

- **1 pt :** $\int_0^x \frac{1}{1-t}\, dt = -\ln(1-x)$
- **1 pt :** $\int_0^x \left(\sum_{k=0}^{n} t^k \right) dt = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{k+1}}{k+1}$
- **1 pt : continuité des fonctions sur le segment** $[0,x]$
- **1 pt : inégalité triangulaire**
- **1 pt : croissance de l'intégration et bornes dans l'ordre croissante**
- **1 pt :** $\int_0^x |t|^{n+1}\, dt \leqslant \frac{1}{n+2}$
- **2 pts : cas** $x < 0$

d) En déduire que la série $\sum_{n \geqslant 1} \frac{x^n}{n}$ converge et a pour somme $-\ln(1-x)$.

En particulier, montrer : $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k\,2^k} = \ln(2)$.

- **1 pt : théorème d'encadrement**
- **1 pt : justification énoncée de** $\left(-\ln(1-x) - \sum_{k=1}^{n+1} \frac{x^k}{k} \right)_{n \geqslant 0}$ **conerge vers** 0 **donc** $\left(\sum_{k=1}^{n+1} \frac{x^k}{k} \right)_{n \geqslant 0}$ **converge vers** $-\ln(1-x)$**.**
- **1 pt : on applique le résultat à** $x = \frac{1}{2}$
- **1 pt :** $-\ln\left(1 - \frac{1}{2}\right) = \ln(2)$

e) Écrire un programme **Scilab** qui calcule et affiche une valeur approchée de $\ln(2)$ à 10^{-3} près.

- **1 pt :** $\left| \ln(2) - \sum\limits_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k\, 2^k} \right| \leqslant \frac{2}{n+2}$
- **1 pt :** $N = 2 \times 10^3 - 2$
- **4 pts : programme Scilab (1 pt initialisation, 1 pt `disp`, 2 pts boucle `for`)**

2. Un joueur lance une pièce équilibrée jusqu'à l'obtention du premier pile. S'il lui a fallu n lancers ($n \in \mathbb{N}^*$) pour obtenir ce premier pile, on lui fait alors tirer au hasard un billet de loterie parmi n billets dont un seul est gagnant.
Quelle est la probabilité que le joueur gagne ?

- **1 pt : expérience aléatoire**
- **1 pt :** $X \hookrightarrow \mathcal{G}\left(\frac{1}{2}\right)$
- **1 pt :** $([X = n])_{n \geqslant 1}$ **SCE**
- **1 pt : formule des probabilités totales**
- **1 pt :** $\mathbb{P}([X = n]) \neq 0$
- **1 pt :** $\mathbb{P}_{[X=n]}(A) = \frac{1}{n}$
- **1 pt :** $\mathbb{P}(A) = \ln(2)$

Exercice 4 /50

Dans tout cet exercice, f désigne la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par :

$$\forall x \in\ ]0,+\infty[,\ f(x) = x - \ln(x)$$

Partie I : Étude de la fonction f /10

1. Dresser le tableau de variations de f en précisant ses limites en 0 et en $+\infty$.

- **1 pt : f dérivable sur $]0,+\infty[$ et $f'(x) = \dfrac{x-1}{x}$**
- **1 pt : signe de $f'(x)$**
- **1 pt : $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = +\infty$**
- **1 pt : $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$**

2. Montrer que l'équation $f(x) = 2$, d'inconnue $x \in\ ]0,+\infty[$, admet exactement deux solutions, que l'on note a et b, telles que $0 < a < 1 < b$.

- **3 pts : théorème de la bijection sur $]0,1[$ (1 pt hypothèses, 1 pt $f(]0,1[) =]1,+\infty[$, 1 pt $2 \in\ ]1,+\infty[$)**
- **1 pt : théorème de la bijection sur $]1,+\infty[$**

3. Montrer : $b \in [2,4]$. On donne : $\ln(2) \simeq 0,7$.

- **1 pt : $f(2) \leqslant 2$**
- **1 pt : $f(4) \geqslant 2$**
- **1 pt : restriction de f à $]1,+\infty[$ strictement croissante sur $]1,+\infty[$**

Partie II : Étude d'une suite /24

On pose : $u_0 = 4$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \ln(u_n) + 2$.

4. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie et que l'on a : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \in [b,+\infty[$.

- **1 pt : initialisation**
- **2 pts : hérédité**

5. Déterminer la monotonie de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. En déduire qu'elle converge et préciser sa limite.

- **1 pt : $u_{n+1} - u_n = f(b) - f(u_n)$**
- **1 pt : $f(u_n) \geqslant f(b)$ par croissance de f sur $[b,+\infty[$**
- **1 pt : théorème de convergence monotone**
- **1 pt : passage à la limite pour obtenir $\ell = \ln(\ell) + 2$**
- **1 pt : $\ell = b$**

6. *a)* Montrer : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} - b \leqslant \dfrac{1}{2}(u_n - b)$.

- **4 pts : IAF (2 pts hypothèses, 1 pt IAF, 1 pt $(u_n, b) \in [b,+\infty[^2$)**

b) En déduire : $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant u_n - b \leqslant \dfrac{1}{2^{n-1}}$.

- **1 pt :** $u_n - b \geqslant 0$
- **1 pt : initialisation**
- **2 pts : hérédité**

7. a) Écrire une fonction **Scilab** d'en-tête `function u = suite(n)` qui, prenant en argument un entier n de $\mathbb{N}$, renvoie la valeur de u_n.

- **4 pts : 1 pt structure `function`, 1 pt initialisation, 2 pts boucle `for`**

b) Recopier et compléter la ligne 3 de la fonction **Scilab** suivante afin que, prenant en argument un réel `epsilon` strictement positif, elle renvoie une valeur approchée de b à `epsilon` près.

```
1  function b = valeur_approchee(epsilon)
2      n = 0
3      while ..........
4          n = n + 1
5      end
6      b = suite(n)
7  endfunction
```

- **5 pts : 2 pts `while` $1/2\hat{}\,(n-1) >$ `epsilon`, 3 pt explication**

Partie III : Étude d'une fonction définie par une intégrale /14

On note Φ la fonction donnée par :

$$\Phi(x) = \int_x^{2x} \frac{1}{f(t)}\, dt$$

8. Montrer que Φ est bien définie et dérivable sur $]0, +\infty[$, et que l'on a :

$$\forall x \in\,]0, +\infty[,\ \Phi'(x) = \frac{\ln(2) - \ln(x)}{(x - \ln(x))(2x - \ln(2x))}$$

- 1 pt : $\dfrac{1}{f}$ admet une primitive G de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$

- 1 pt : Φ de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$ (par composition)

- 1 pt : $\Phi'(x) = \dfrac{\ln(2) - \ln(x)}{(x - \ln(x))(2x - \ln(2x))}$

9. En déduire les variations de Φ sur $]0, +\infty[$.

- 2 pts : signe de $\Phi'(x)$ et variations de Φ

10. Montrer : $\forall x \in\,]0, +\infty[,\ 0 \leqslant \Phi(x) \leqslant x$.

- 1 pt : $0 \leqslant \dfrac{1}{f(t)} \leqslant 1$ par décroissance de la fonction inverse sur $]0, +\infty[$

- 1 pt : croissance de l'intégrale, les bornes étant dans l'ordre croissant

- 1 pt : $0 \leqslant \Phi(x) \leqslant x$

11. ***a)*** Montrer que Φ est prolongeable par continuité en 0.
On note encore Φ la fonction ainsi prolongée. Préciser alors $\Phi(0)$.

- 1 pt : théorème d'encadrement

b) Montrer : $\lim\limits_{x \to 0} \Phi'(x) = 0$.
On admet que la fonction Φ est alors dérivable en 0 et que $\Phi'(0) = 0$.

- 1 pt

12. On donne $\Phi(2) \simeq 1,1$ et on admet que $\lim\limits_{x \to +\infty} \Phi(x) = \ln(2) \simeq 0,7$.
Tracer l'allure de la courbe représentative de la fonction Φ ainsi que la tangente à la courbe au point d'abscisse 0.

- 4 pts : 1 pt tangente en 0, 1 pt tangente en 2, 1 pt cohérence courbe Φ, 1 pt propreté