DS1 (version A)

Exercice 1 (inspiré de EDHEC 2016)

On désigne par I la matrice identité de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.
On note $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et on considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ est : $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -3 & 4 & 3 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$.

1. a) Calculer $(A-2I)(A-I)^2$.

Démonstration.

- Tout d'abord : $A - 2\,I \;=\; \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -3 & 4 & 3 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ -3 & 2 & 3 \\ 2 & -2 & -2 \end{pmatrix}$.
- Ensuite : $A - I \;=\; \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -3 & 4 & 3 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ -3 & 3 & 3 \\ 2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$.

  Ainsi :
  $$(A-I)^2 \;=\; \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ -3 & 3 & 3 \\ 2 & -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ -3 & 3 & 3 \\ 2 & -2 & -1 \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$
- On en déduit : $(A - 2\,I)(A-I)^2 \;=\; \begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ -3 & 2 & 3 \\ 2 & -2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & -1 \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

$$\boxed{(A-2I)(A-I)^2 = 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})}}$$

□

b) En déduire que A est inversible et déterminer A^{-1}.

Démonstration.

- D'après la question précédente : $(A-2I)(A-I)^2 = 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})}$. Or :
  $$(A-2I)(A-I)^2 \;=\; (A-2I)(A^2-2A+I) \;=\; A^3 - 4A^2 + 5A - 2I$$
- On en déduit :
  $$\begin{array}{rc} & A^3 - 4A^2 + 5A - 2I = 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})} \\ \text{donc} & A^3 - 4A^2 + 5A = 2I \\ \text{et} & A(A^2 - 4A + 5I) = 2I \\ \text{ainsi} & A\left(\dfrac{1}{2}(A^2-4A+5I)\right) = I \end{array}$$

  On en déduit que la matrice A est inversible, d'inverse $\dfrac{1}{2}\,(A^2-4A+5I)$.

$$\boxed{A^{-1} = \frac{1}{2}(A^2-4A+5I)}$$

Commentaire

- L'écriture $\dfrac{A}{9}$ n'a pas de sens puisqu'il n'existe pas d'opérateur de division entre les matrices et les réels. Par contre, l'écriture $\dfrac{1}{9} \cdot A$ est bien autorisée : on multiplie une matrice par un scalaire à l'aide de l'opérateur de multiplication externe $\cdot : \mathbb{R} \times \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.
- On ne peut pas non plus diviser par une matrice. Rappelons que l'inverse d'une matrice A, si elle existe, est notée A^{-1} et pas $\dfrac{1}{A}$. L'écriture $\dfrac{A}{B}$ est elle aussi impropre car il n'y a pas d'opérateur de division entre deux matrices.

□

2. On note $F = \{X \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid AX = 2X\}$.

a) Résoudre l'équation $AX = 2X$ d'inconnue $X \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

Démonstration.
Notons $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$. On a alors :

$$\begin{array}{rcl}
AX = 2X & \iff & (A - 2I)X = 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})} \\[2mm]
& \iff & \begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ -3 & 2 & 3 \\ 2 & -2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\[2mm]
& \iff & \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} -2x & + & y & + & 2z & = & 0 \\ -3x & + & 2y & + & 3z & = & 0 \\ 2x & - & 2y & - & 2z & = & 0 \end{array} \right. \\[2mm]
& \underset{L_3 \leftarrow L_3 + L_1}{\overset{L_2 \leftarrow 2L_2 - 3L_1}{\iff}} & \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} -2x & + & y & + & 2z & = & 0 \\ & & y & & & = & 0 \\ & - & y & & & = & 0 \end{array} \right. \\[2mm]
& \iff & \left\{ \begin{array}{rcrcl} -2x & + & y & = & -2z \\ & & y & = & 0 \end{array} \right. \\[2mm]
& \iff & \left\{ \begin{array}{rrcl} -2x & & = & -2z \\ & y & = & 0 \end{array} \right. \\[2mm]
& \iff & \left\{ \begin{array}{rrcl} x & & = & z \\ & y & = & 0 \end{array} \right.
\end{array}$$

On obtient alors :

$$\begin{array}{rcl}
F & = & \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid x = z \ \texttt{ET} \ y = 0 \right\} \\[4mm]
& = & \left\{ \begin{pmatrix} z \\ 0 \\ z \end{pmatrix} \mid z \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ z \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mid z \in \mathbb{R} \right\} = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)
\end{array}$$

$$\boxed{F = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)}$$

□

b) En déduire que F est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ et déterminer une base de F.

Démonstration.

- D'après la question précédente : $F = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$.

$$\boxed{\text{L'ensemble } F \text{ est donc un sous-espace vectoriel de } \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}).}$$

- La famille $\mathcal{F} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$:

  × engendre F,

  × est libre car est constituée uniquement d'une matrice non nulle.

  C'est donc une base de F.

$$\boxed{\text{La famille } \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) \text{ est une base de l'espace vectoriel } F.}$$

□

3. On note $G = \{X \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid AX = X\}$.

a) Résoudre l'équation $AX = X$ d'inconnue $X \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

Démonstration.
Notons $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$. On a alors :

$$\begin{array}{rcl}
AX = X & \Longleftrightarrow & (A - I)X = 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})} \\[2mm]
& \Longleftrightarrow & \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ -3 & 3 & 3 \\ 2 & -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\[2mm]
& \Longleftrightarrow & \left\{ \begin{array}{rcrcrcr} -x & + & y & + & 2\,z & = & 0 \\ -3\,x & + & 3\,y & + & 3\,z & = & 0 \\ 2\,x & - & 2\,y & - & z & = & 0 \end{array} \right. \\[2mm]
& \underset{L_3 \leftarrow L_3 + 2\,L_1}{\overset{L_2 \leftarrow L_2 - 3\,L_1}{\Longleftrightarrow}} & \left\{ \begin{array}{rcrcrcr} -\,x & + & y & + & 2\,z & = & 0 \\ & & & - & 3\,z & = & 0 \\ & & & & 3\,z & = & 0 \end{array} \right. \\[2mm]
& \Longleftrightarrow & \left\{ \begin{array}{rcrcrcr} -\,x & + & y & & & = & 0 \\ & & & & z & = & 0 \end{array} \right. \\[2mm]
& \Longleftrightarrow & \left\{ \begin{array}{rcl} x & = & y \\ z & = & 0 \end{array} \right.
\end{array}$$

On obtient alors :

$$\begin{aligned} G &= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid x = y \ \texttt{ET} \ z = 0 \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} y \\ y \\ 0 \end{pmatrix} \mid y \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ y \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \mid y \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \end{aligned}$$

$$\boxed{G = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)}$$

□

b) En déduire que G est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ et déterminer une base de G.

Démonstration.

- D'après la question précédente : $G = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$.

$$\boxed{\text{L'ensemble } G \text{ est donc un sous-espace vectoriel de } \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}).}$$

- La famille $\mathcal{G} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$:
  × engendre G,
  × est libre car est constituée d'une unique matrice non nulle.

  C'est donc une base de G.

$$\boxed{\text{La famille } \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \text{ est une base de l'espace vectoriel } G.}$$

□

4. On note $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

a) Démontrer que P est inversible et déterminer son inverse.

Démonstration.
On applique l'algorithme du pivot de Gauss.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \left| \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right.$$

On effectue l'opération $\{ L_3 \leftarrow L_3 - L_1$. On obtient :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \left| \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right.$$

On effectue l'opération $\{\ L_3 \leftarrow L_3 + L_2$. On obtient :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \left| \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \right.$$

La réduite obtenue est triangulaire et ses coefficients diagonaux sont tous non nuls.

$\boxed{\text{Ainsi } P \text{ est inversible.}}$

On effectue l'opération $\{\ L_2 \leftarrow L_2 + L_3$. On obtient :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \left| \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \right.$$

On effectue l'opération $\{\ L_1 \leftarrow L_1 - L_2$. On obtient :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \left| \begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \right.$$

$$\boxed{\text{Finalement : } P^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.}$$

Commentaire

On remarque que la matrice P est constituée des vecteurs des famille $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$. C'est ce choix qui va permettre d'exprimer par la suite la matrice A sous une forme plus simple.
On en reparlera dans le chapitre « Réduction ».

□

b) Montrer que $P^{-1}AP = T$ où T est la matrice triangulaire supérieure $T = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Démonstration.

- Remarquons tout d'abord :

$$AP = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -3 & 4 & 3 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

- Enfin :

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = T$$

$\boxed{\text{Ainsi : } P^{-1}AP = T.}$

□

c) Démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $P^{-1}A^nP = T^n$.

Démonstration.
Démontrons par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$ où $\mathcal{P}(n)$: $P^{-1}A^nP = T^n$.

▸ **Initialisation**
- D'une part : $P^{-1}A^0P = P^{-1}IP = P^{-1}P = I$.
- D'autre part : $T^0 = I$.

D'où $\mathcal{P}(0)$.

▸ **Hérédité** : soit $n \in \mathbb{N}$.
Supposons $\mathcal{P}(n)$ et démontrons $\mathcal{P}(n+1)$ (*i.e.* $P^{-1}A^{n+1}P = T^{n+1}$).

$$\begin{aligned} T^{n+1} &= T \times T^n \\ &= P^{-1}AP \times P^{-1}A^nP && \textit{(d'après la question précédente et par hypothèse de récurrence)} \\ &= P^{-1}A(PP^{-1})A^nP \\ &= P^{-1}AIA^nP \ = \ P^{-1}A^{n+1}P \end{aligned}$$

D'où $\mathcal{P}(n+1)$.

$$\boxed{\text{Ainsi, par principe de récurrence : } \forall n \in \mathbb{N},\ P^{-1}A^nP = T^n.}$$

□

5. a) Exhiber une matrice $N \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ telle que T s'écrit $T = D + N$, où :

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Démonstration.

$$\boxed{\text{D'après l'énoncé, } N \ = \ T - D \ = \ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.}$$

□

b) Calculer N^2 et en déduire N^k pour tout $k \in \mathbb{N}$.

Démonstration.
- Tout d'abord : $N^2 \ = \ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \ = \ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
- On en déduit, par une récurrence immédiate, que pour tout $k \geqslant 2$, $N^k = 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})}$.

$$\boxed{\text{En conclusion : } N^0 = I,\ N^1 = N \text{ et pour tout } k \geqslant 2,\ N^k = 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})}.}$$

Commentaire

- Au lieu de faire une récurrence, on peut aussi écrire, pour tout $k \geqslant 2$:

$$N^k \ = \ N^{k-2} \times N^2 \ = \ N^{k-2} \times 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})} \ = \ 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})}$$

- On insiste sur le fait que cette démonstration n'est valable que si $k \geqslant 2$ (si ce n'est pas le cas, alors $k - 2 < 0$).

□

c) Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer T^n en fonction des matrices D et N, à l'aide de la formule du binôme de Newton.

Démonstration.

- Soit $n \geqslant 1$.
  Les matrices D et N commutent. En effet :

$$DN = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = ND$$

  On peut donc appliquer la formule du binôme de Newton :

$$\begin{aligned} T^n &= (D+N)^n \\ &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} D^{n-k} N^k \\ &= \sum_{k=0}^{1} \binom{n}{k} D^{n-k} N^k + \sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} D^{n-k} N^k && \textit{(ce découpage est valable car } n \geqslant 1\textit{)} \\ &= \sum_{k=0}^{1} \binom{n}{k} D^{n-k} N^k && \textit{(car on a montré : } \forall k \geqslant 2,\ N^k = 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})}\textit{)} \\ &= \binom{n}{0} D^n N^0 + \binom{n}{1} D^{n-1} N^1 \\ &= D^n + n\, D^{n-1} N \end{aligned}$$

- Enfin : $D^0 + 0 \cdot D^{-1} N = I$ et $T^0 = I$.
  (la matrice D est bien inversible car c'est une matrice diagonale dont tous les coefficients diagonaux sont non nuls)
  La formule précédente reste valable pour $n = 0$.

$$\boxed{\text{Ainsi, pour tout } n \in \mathbb{N},\ T^n = D^n + n\, D^{n-1} N.}$$

Commentaire

- La relation de Chasles stipule que pour tout $(m, p, n) \in \mathbb{N}^3$ tel que $m \leqslant p \leqslant n$:

$$\sum_{k=m}^{n} u_k = \sum_{k=m}^{p} u_k + \sum_{k=p+1}^{n} u_k$$

  (la seconde somme est nulle si $p = n$)
  où (u_n) est une suite quelconque de réels ou de matrices de même taille.
- Dans cette question, on est dans le cas où $m = 0$ et $p = 1$.
  L'argument $n \geqslant 1$ est donc nécessaire pour découper la somme.
  Le cas $n = 0$ doit alors être traité à part.
- Ici, la matrice N vérifie : $\forall k \geqslant 2$, $N^k = 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})}$. Elle est dite nilpotente d'indice 2 (ce terme n'est pas au programme et il est préférable de ne pas l'utiliser dans une copie). Si elle avait été nilpotente d'ordre 3, il aurait fallu traiter à part les cas $n = 0$ mais aussi le cas $n = 1$.
- Cette question sur le binôme de Newton matriciel est extrêmement classique aux concours et il faut donc savoir parfaitement la traiter.

$\square$

Exercice 2 (Ecricome 2016 voie S)

On pourra utiliser sans justification que $2 < \mathrm{e}^1 < 3$.

On s'intéresse dans cet exercice à la série de terme général $u_n = (-1)^n \dfrac{\ln(n)}{n}$ pour $n \geqslant 1$.

1. On note pour tout $n \geqslant 1$: $w_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k} - \ln(n)$.

a) On admet qu'il existe des fonctions $h_1 :]-1,1[\to \mathbb{R}$ et $h_2 :]-1,1[\to \mathbb{R}$ telles que $\lim\limits_{x\to 0} h_1(x) = 0$ et $\lim\limits_{x\to 0} h_2(x) = 0$ vérifiant, pour tout $x \in]-1,1[$:

$$\ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + x^2 h_1(x) \qquad \text{et} \qquad \frac{x}{1+x} = x - x^2 + x^2 h_2(x)$$

Montrer qu'il existe une fonction $h :]-1,1[\to \mathbb{R}$ telle que $\lim\limits_{x\to 0} h(x) = 0$ vérifiant :

$$\forall x \in]-1,1[, \ \frac{x}{1+x} - \ln(1+x) = -\frac{1}{2}x^2 + x^2 h(x)$$

Démonstration.
Soit $x \in]-1,1[$. D'après l'énoncé :

$$\begin{aligned} \frac{x}{1+x} - \ln(1+x) &= \cancel{x} - x^2 + x^2 h_2(x) - \Big(\cancel{x} - \frac{1}{2}x^2 + x^2 h_1(x)\Big) \\ &= -\frac{1}{2}x^2 + x^2\big(h_2(x) - h_1(x)\big) \end{aligned}$$

On définit alors la fonction $h = h_2 - h_1$. On obtient :
- $\times$ $h :]-1,1[\to \mathbb{R}$ car $h_1 :]-1,1[\to \mathbb{R}$ et $h_2 :]-1,1[\to \mathbb{R}$,
- $\times$ la fonction h admet une limite en 0 car h_1 et h_2 en admettent une. De plus :

$$\lim_{x\to 0} h(x) \ = \ \lim_{x\to 0} \big(h_2(x) - h_1(x)\big) \ = \ \lim_{x\to 0} h_2(x) - \lim_{x\to 0} h_1(x) \ = \ 0$$

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{On en déduit qu'il existe une fonction } h :]-1,1[\to \mathbb{R} \text{ telle que } \lim\limits_{x\to 0} h(x) = 0 \text{ vérifiant :} \\ \forall x \in]-1,1[, \ \dfrac{x}{1+x} - \ln(1+x) = -\dfrac{1}{2}x^2 + x^2 h(x).\end{array}}$$

□

b) Montrer : $w_{n+1} - w_n \underset{n\to+\infty}{\sim} -\dfrac{1}{2n^2}$.

On pourra, avec une justification appropriée, utiliser le résultat de la question précédente pour $x = \dfrac{1}{n}$.

Démonstration.
Soit $n \geqslant 2$.
- Tout d'abord :

$$\begin{aligned} w_{n+1} - w_n &= \left(\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k} - \ln(n+1)\right) - \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n)\right) \\ &= \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \big(\ln(n+1) - \ln(n)\big) \\ &= \frac{1}{n+1} - \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) \\ &= \frac{1}{n+1} - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \end{aligned}$$

- Ensuite, comme $\dfrac{1}{n} \in \,]-1,1[$ (car $n \geqslant 2$), on peut appliquer la formule obtenue en question précédente. On en déduit :

$$\begin{array}{ccc} \dfrac{\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n}} - \ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right) & = & -\dfrac{1}{2}\,\dfrac{1}{n^2} + \dfrac{1}{n^2}\,h\left(\dfrac{1}{n}\right) \\ \shortparallel & & \\ \dfrac{\frac{1}{\cancel{n}}}{\frac{n+1}{\cancel{n}}} - \ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right) & & \end{array}$$

Commentaire

On notera ici l'importance de l'introduction « Soit $n \geqslant 2$ » plutôt que « Soit $n \geqslant 1$ ».
En effet, pour appliquer la question précédente avec $x = \frac{1}{n}$, il faut vérifier que $\frac{1}{n} \in \,]-1,1[$ et ceci n'est vrai que pour $n \geqslant 2$.

- On en déduit : $w_{n+1} - w_n \; = \; -\dfrac{1}{2\,n^2} + \dfrac{1}{n^2}\,h\left(\dfrac{1}{n}\right)$.
  Ainsi :

$$\dfrac{w_{n+1} - w_n}{-\frac{1}{2n^2}} \; = \; 1 + \dfrac{\frac{1}{\cancel{n^2}}\,h\left(\frac{1}{n}\right)}{-\frac{1}{2\cancel{n^2}}} \; = \; 1 - 2\,h\left(\dfrac{1}{n}\right)$$

  Or, par composition de limites : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} h\left(\dfrac{1}{n}\right) = 0$.

  D'où : $\dfrac{w_{n+1} - w_n}{-\frac{1}{2n^2}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$.

$$\boxed{\text{Finalement : } w_{n+1} - w_n \underset{n\to+\infty}{\sim} -\dfrac{1}{2n^2}.}$$

□

c) Montrer que la série de terme général $(w_{n+1} - w_n)$ converge, puis que la suite (w_n) converge vers un réel, appelé **constante d'Euler**. On notera ce réel γ.

Démonstration.
On souhaite démontrer que la série $\sum (w_{n+1} - w_n)$ est convergente.
Pour ce faire, on démontre que la série $\sum -(w_{n+1} - w_n)$ est convergente.
(on ne change pas la nature d'une série en multipliant son terme général par $-1 \neq 0$)

- On a :
  × $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{1}{2n^2} \geqslant 0$.
  × $w_n - w_{n+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{2n^2}$, d'après la question précédente.
  × La série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{1}{2n^2}$ est une série de Riemann d'exposant 2 ($2 > 1$).
    Elle est donc convergente.

  Par critère d'équivalence des séries à termes positifs, la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} (w_n - w_{n+1})$ converge.

$$\boxed{\text{On en conclut que la série } \sum_{n\geqslant 1} (w_{n+1} - w_n) \text{ est convergente.}}$$

Commentaire

- On rappelle que les critères de comparaison / équivalence / négligeabilité sur les séries à termes positifs peuvent également s'exprimer pour les séries à termes négatifs. Ce qui importe pour ces critères est que les termes généraux des séries considérés soient de signes constants.
- En terme de rédaction, si on rencontre une série $\sum\limits_{n \geqslant 0} u_n$ à termes négatifs, il est conseillé d'étudier la nature de la série $\sum\limits_{n \geqslant 0} -u_n$ qui, elle, est à termes positifs.
  On rappelle alors qu'on ne change pas la nature d'une série en multipliant son terme général par un réel (-1 en l'occurrence) non nul.

- Pour tout $n \geqslant 1$:
$$\sum_{k=1}^{n} (w_{k+1} - w_k) \;=\; w_{n+1} - w_1$$
Ainsi : $w_{n+1} \;=\; w_1 + \sum\limits_{k=1}^{n} (w_{k+1} - w_k)$.
La série $\sum\limits_{n \geqslant 1} (w_{n+1} - w_n)$ est convergente, ce qui signifie que la suite de ses sommes partielles $\left(\sum\limits_{k=1}^{n} (w_{k+1} - w_k)\right)_{n \geqslant 1}$ converge vers $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} (w_{k+1} - w_k)$.
Ainsi, la suite (w_{n+1}) (et donc (w_n)) converge en tant que somme de suites convergentes et, par passage à la limite :
$$\begin{array}{ccc} \lim\limits_{n \to +\infty} w_{n+1} & = & w_1 + \sum\limits_{k=1}^{+\infty} (w_{k+1} - w_k) \\ \shortparallel & & \\ \lim\limits_{n \to +\infty} w_n & & \end{array}$$

$$\boxed{\text{La suite } (w_n) \text{ est convergente, de limite } \gamma = w_1 + \sum_{k=1}^{+\infty} (w_{k+1} - w_k).}$$

Commentaire

- On rappelle que les suites $(w_{n+1})_{n \geqslant 1}$ et $(w_n)_{n \geqslant 1}$ sont identiques à un décalage près. Plus précisément :
  × le 1^{er} terme de la suite $(w_n)_{n \geqslant 1}$ est w_1, celui de la suite $(w_{n+1})_{n \geqslant 1}$ est $w_{1+1} = w_2$.
  × le $2^{\text{ème}}$ terme de la suite $(w_n)_{n \geqslant 1}$ est w_2, celui de la suite $(w_{n+1})_{n \geqslant 1}$ est w_3.
  × et ainsi de suite !
- On en déduit la propriété suivante :
$$(w_{n+1}) \text{ converge } \Leftrightarrow (w_n) \text{ converge}$$
  En cas de convergence, ces deux suites ont évidemment la même limite.
  Cela permet de déduire la convergence de (w_n) à partir de celle de (w_{n+1}).

□

2. Étudier les variations de la fonction $\varphi : t \mapsto \dfrac{\ln(t)}{t}$ sur $]0, +\infty[$. Dresser le tableau de variations de la fonction φ en précisant les limites aux bornes de son ensemble de définition.

Démonstration.

- La fonction φ est dérivable sur $]0, +\infty[$ en tant que quotient de fonctions dérivables sur $]0, +\infty[$ dont le dénominateur ne s'annule pas (car pour tout $t \in]0, +\infty[$, $t \neq 0$).
- Soit $t \in]0, +\infty[$.

$$\varphi'(t) = \frac{\frac{1}{\cancel{t}} \times \cancel{t} - \ln(t) \times 1}{t^2} = \frac{1 - \ln(t)}{t^2}$$

Comme $t^2 > 0$, alors $\varphi'(t)$ est du signe de $1 - \ln(t)$. Ainsi :

$$\varphi'(t) > 0 \Leftrightarrow 1 - \ln(t) > 0 \Leftrightarrow 1 > \ln(t)$$

$$\Leftrightarrow e^1 > t$$ *(par stricte croissance de la fonction $x \mapsto e^x$ sur $\mathbb{R}$)*

- On obtient le tableau de variations suivant :

t	0		e		$+\infty$
Signe de $\varphi'(t)$		$+$	0	$-$	
Variations de φ	$-\infty$	$\nearrow$	e^{-1}	$\searrow$	0

- Détaillons les éléments de ce tableau.
  × $\varphi(e) = \dfrac{\ln(e)}{e} = \dfrac{1}{e} = e^{-1}$,
  × $\lim\limits_{t \to +\infty} \varphi(t) = \lim\limits_{t \to +\infty} \dfrac{\ln(t)}{t} = 0$ par croissances comparées,
  × comme $\lim\limits_{t \to 0^+} \ln(t) = -\infty$ et $\lim\limits_{t \to 0^+} \dfrac{1}{t} = +\infty$, on a : $\lim\limits_{t \to 0^+} \varphi(t) = -\infty$.

□

3. On note, pour tout entier $n \geqslant 1$:

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$$

a) Montrer que les suites $(S_{2n})_{n \geqslant 1}$ et $(S_{2n+1})_{n \geqslant 1}$ sont adjacentes.

Démonstration.
Soit $n \geqslant 1$.

- Étudions la monotonie de (S_{2n}).

$$\begin{aligned} S_{2(n+1)} - S_{2n} &= S_{2n+2} - S_{2n} = \sum_{k=1}^{2n+2} u_k - \sum_{k=1}^{2n} u_k \\ &= \left(\cancel{\sum_{k=1}^{2n}} u_k + u_{2n+1} + u_{2n+2} \right) - \cancel{\sum_{k=1}^{2n}} u_k \\ &= (-1)^{2n+1} \frac{\ln(2n+1)}{2n+1} + (-1)^{2n+2} \frac{\ln(2n+2)}{2n+2} \\ &= -\varphi(2n+1) + \varphi(2n+2) \end{aligned}$$

(par définition de φ et car $(-1)^{2n+2} = 1$ et $(-1)^{2n+1} = -1$)

Pour déterminer le signe de $\varphi(2n+2) - \varphi(2n+1)$, on souhaite utiliser le sens de variations de φ. Pour cela, on doit déterminer :

× si $2n+1 \in \,]0, \mathrm{e}]$ et $2n+2 \in \,]0, \mathrm{e}]$.
Dans ce cas, on utilisera la croissance de la fonction φ sur $]0, \mathrm{e}]$.

× ou si $2n+1 \in [\mathrm{e}, +\infty[$ et $2n+2 \in [\mathrm{e}, +\infty[$.
Dans ce cas, on utilisera la décroissance de la fonction φ sur $[\mathrm{e}, +\infty[$.

Or :

$$2n+1 \geqslant \mathrm{e} \;\Leftrightarrow\; 2n \geqslant \mathrm{e} - 1 \;\Leftrightarrow\; n \geqslant \frac{\mathrm{e}-1}{2}$$

De plus : $n \geqslant 1 > \dfrac{\mathrm{e}-1}{2}$ (car $\mathrm{e} < 3$). Donc : $2n+1 \geqslant \mathrm{e}$ (et $2n+2 \geqslant \mathrm{e}$).
Or la fonction φ est décroissante sur $[\mathrm{e}, +\infty[$. Comme $2n+2 \geqslant 2n+1$, on a alors :

$$\varphi(2n+2) \leqslant \varphi(2n+1)$$

Ainsi : $S_{2(n+1)} - S_{2n} \leqslant 0$.

$$\boxed{\text{La suite } (S_{2n}) \text{ est décroissante.}}$$

- Montrons alors que la suite (S_{2n+1}) est croissante.

$$\begin{aligned} S_{2(n+1)+1} - S_{2n+1} &= S_{2n+3} - S_{2n+1} = \sum_{k=1}^{2n+3} u_k - \sum_{k=1}^{2n+1} u_k \\ &= u_{2n+3} + u_{2n+2} = (-1)^{2n+3} \frac{\ln(2n+3)}{2n+3} + (-1)^{2n+2} \frac{\ln(2n+2)}{2n+2} \\ &= -\varphi(2n+3) + \varphi(2n+2) \end{aligned}$$

Or :

× $2n+3 \in [\mathrm{e}, +\infty[$, $2n+2 \in [\mathrm{e}, +\infty[$,

× la fonction φ est décroissante sur $[\mathrm{e}, +\infty[$.

Donc : $S_{2(n+1)+1} - S_{2n+1} = -\varphi(2n+3) + \varphi(2n+2) \geqslant 0$.

$$\boxed{\text{La suite } (S_{2n+1}) \text{ est croissante.}}$$

Commentaire

On note l'importance de la vérification :

$$2n+1 \in [\mathrm{e}, +\infty[, \quad 2n+2 \in [\mathrm{e}, +\infty[\quad \text{et} \quad 2n+3 \in [\mathrm{e}, +\infty[$$

En effet, d'après le tableau de variations de la question ***2.*** la fonction φ est :

× croissante sur $]0, \mathrm{e}]$,

× décroissante sur $[\mathrm{e}, +\infty[$.

Il faut donc savoir sur quel intervalle on se place (ici $[\mathrm{e}, +\infty[$) avant d'utiliser la monotonie de φ sur cet intervalle.

- Déterminons, si elle existe, $\lim\limits_{n\to+\infty} (S_{2n+1} - S_{2n})$.

$$\begin{aligned} S_{2n+1} - S_{2n} &= \sum_{k=1}^{2n+1} u_k - \sum_{k=1}^{2n} u_k = u_{2n+1} \\ &= (-1)^{2n+1} \frac{\ln(2n+1)}{2n+1} = -\varphi(2n+1) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \end{aligned}$$

En effet : $\lim\limits_{n\to+\infty} 2n+1 = +\infty$ et $\lim\limits_{t\to+\infty} \varphi(t) = 0$.

Ainsi, la suite $(S_{2n+1} - S_{2n})$ admet une limite et : $\lim\limits_{n\to+\infty} (S_{2n+1} - S_{2n}) = 0$.

On en déduit que les suites (S_{2n+1}) et (S_{2n}) sont adjacentes.

□

b) Montrer que la série de terme général u_n converge.

Démonstration.

- Les suites (S_{2n+1}) et (S_{2n}) sont adjacentes, donc elles convergent vers la même limite. Notons celle-ci ℓ.
- Démontrons alors que la suite (S_n) converge vers ℓ. On revient à la définition de convergence. Soit I un intervalle ouvert contenant ℓ.
  - × Comme $S_{2n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$, l'intervalle I contient tous les termes de la suite (S_{2n}) (*i.e.* tous les termes d'indices pairs de la suite (S_{2n})) sauf un nombre fini d'entre eux.
  - × Comme $S_{2n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$, l'intervalle I contient tous les termes de la suite (S_{2n+1}) (*i.e.* tous les termes d'indices impairs de la suite (S_{2n+1})) sauf un nombre fini d'entre eux.

  On en déduit que l'intervalle I contient tous les termes de la suite (S_n) sauf un nombre fini d'entre eux.
  Ainsi, la suite (S_n) converge vers ℓ.
- Or (S_n) est la suite des sommes partielles de la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n$.

La série $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n$ est donc convergente.

Commentaire

Cette propriété, parfois appelée « propriété de recouvrement » n'apparaît pas dans le programme officiel de la voie ECE. Il faut donc la redémontrer à chaque utilisation.

□

c) Cette série est-elle absolument convergente ?

Démonstration.

- Montrer que la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n$ est absolument convergente revient à montrer que la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} |u_n|$ est convergente.
  Soit $n \geqslant 1$.

$$|u_n| = \left| (-1)^n \frac{\ln(n)}{n} \right| = |(-1)^n| \frac{|\ln(n)|}{|n|} = 1 \times \frac{\ln(n)}{n} = \frac{\ln(n)}{n}$$

En effet : $\forall n \geqslant 1$, $\ln(n) \geqslant 0$.

- Soit $n \geqslant 3$. Alors $n \geqslant \mathrm{e}$.
  Par croissance de la fonction ln sur $]0, +\infty[$, on obtient : $\ln(n) \geqslant \ln(\mathrm{e}) = 1$.
  Ainsi, comme $n > 0$: $\dfrac{\ln(n)}{n} \geqslant \dfrac{1}{n}$.
  On obtient :
  × $\forall n \geqslant 3,\ \ 0 \leqslant \dfrac{1}{n} \leqslant \dfrac{\ln(n)}{n}$.
  × La série $\sum\limits_{n \geqslant 1} \dfrac{1}{n}$ est une série de Riemann d'exposant 1 ($\not> 1$).
  Cette série est donc divergente.

  Par critère de comparaison de séries à termes positifs, la série $\sum\limits_{n \geqslant 1} \dfrac{\ln(n)}{n}$ diverge.

  Autrement dit la série $\sum\limits_{n \geqslant 1} |u_n|$ diverge.

$$\boxed{\text{La série } \sum_{n \geqslant 1} u_n \text{ n'est pas absolument convergente.}}$$

Commentaire

- On prêtera toujours attention à la formulation des questions de l'énoncé. Une question du type « cette série est-elle absolument convergente ? » suggère que la série en question ne l'est sans doute pas. On orientera donc ses recherches en ce sens dans un premier temps.
- Si le concepteur voulait faire démontrer que la série est absolument convergente, l'énoncé serait plutôt du type « montrer que cette série est absolument convergente ».

4. On note pour tout entier $n \geqslant 1$: $v_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{\ln(k)}{k} - \dfrac{\big(\ln(n)\big)^2}{2}$.

a) Montrer, pour tout entier $n \geqslant 3$:

$$\frac{\ln(n+1)}{n+1} \leqslant \int_n^{n+1} \frac{\ln(t)}{t}\, dt \leqslant \frac{\ln(n)}{n}$$

Démonstration.
Soit $n \geqslant 3$.

- Soit $t \in [n, n+1]$.

$$\begin{array}{lccccc} \text{Comme} & n & \leqslant & t & \leqslant & n+1 \\ \text{alors} & \varphi(n) & \geqslant & \varphi(t) & \geqslant & \varphi(n+1) \end{array}$$
(car φ est décroissante sur $[e, +\infty[$)

(rappelons : $[n, n+1] \subset [e, +\infty[$ car $n \geqslant 3$.)

- La fonction φ est continue sur le segment $[n, n+1]$ (car dérivable sur $[n, n+1]$).
  Par croissance de l'intégrale, les bornes étant dans l'ordre croissante ($n \leqslant n+1$) :

$$\begin{array}{ccccc} \displaystyle\int_n^{n+1} \varphi(n)\, dt & \geqslant & \displaystyle\int_n^{n+1} \varphi(t)\, dt & \geqslant & \displaystyle\int_n^{n+1} \varphi(n+1)\, dt \\ \shortparallel & & & & \shortparallel \\ \big((n+1)-n\big)\ \varphi(n) & & & & \big((n+1)-n\big)\ \varphi(n+1) \end{array}$$

$$\boxed{\text{Ainsi, par définition de } \varphi : \forall n \geqslant 3,\ \frac{\ln(n+1)}{n+1} \ \leqslant\ \int_n^{n+1} \frac{\ln(t)}{t}\, dt \ \leqslant\ \frac{\ln(n)}{n}.}$$

☐

b) Calculer, pour tout $n \geqslant 3$, $\displaystyle\int_n^{n+1} \frac{\ln(t)}{t}\, dt$.

Démonstration.
Soit $n \geqslant 3$.

$$\int_n^{n+1} \frac{\ln(t)}{t}\, dt \ = \ \left[\ \frac{(\ln(t))^2}{2}\ \right]_n^{n+1} \ = \ \frac{1}{2}\ \Big[\ \big(\ln(t)\big)^2\ \Big]_n^{n+1} \ = \ \frac{1}{2}\ \Big(\big(\ln(n+1)\big)^2 - \big(\ln(n)\big)^2\Big)$$

$$\boxed{\forall n \geqslant 3,\ \int_n^{n+1} \frac{\ln(t)}{t}\, dt \ = \ \frac{(\ln(n+1))^2}{2} - \frac{\big(\ln(n)\big)^2}{2}}$$

☐

c) En déduire que la suite $(v_n)_{n \geqslant 3}$ est décroissante.

Démonstration.
Soit $n \geqslant 3$.

- D'une part :

$$\begin{array}{rcl} v_{n+1} - v_n & = & \left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n+1} \frac{\ln(k)}{k} - \frac{(\ln(n+1))^2}{2}\right) - \left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{\ln(k)}{k} - \frac{\big(\ln(n)\big)^2}{2}\right) \\ & = & \dfrac{\ln(n+1)}{n+1} - \dfrac{(\ln(n+1))^2}{2} + \dfrac{\big(\ln(n)\big)^2}{2} \end{array}$$

- D'autre part, d'après les questions ***4.a)*** :

$$\frac{\ln(n+1)}{n+1} \ \leqslant\ \int_n^{n+1} \frac{\ln(t)}{t}\, dt$$

  Donc, d'après la question ***4.b)*** :

$$\frac{\ln(n+1)}{n+1} \ \leqslant\ \frac{(\ln(n+1))^2}{2} - \frac{\big(\ln(n)\big)^2}{2}$$

  On obtient en réordonnant :

$$\frac{\ln(n+1)}{n+1} - \frac{(\ln(n+1))^2}{2} + \frac{\big(\ln(n)\big)^2}{2} \ \leqslant\ 0$$

  Ainsi : $v_{n+1} - v_n \leqslant 0$.

$$\boxed{\text{On en déduit que la suite } (v_n) \text{ est décroissante.}}$$

☐

d) Montrer que la suite (v_n) est convergente.

Démonstration.

- On sait déjà, d'après la question précédente, que la suite (v_n) est décroissante.
  On cherche donc maintenant à montrer qu'elle est également minorée.
- D'après la question ***4.a)***, pour tout $k \geqslant 3$:

$$\int_k^{k+1} \frac{\ln(t)}{t}\, dt \ \leqslant\ \frac{\ln(k)}{k}$$

- Soit $n \geqslant 4$. On obtient, par sommation :

$$\begin{array}{ccc} \displaystyle\sum_{k=3}^{n-1} \int_k^{k+1} \frac{\ln(t)}{t}\, dt & \leqslant & \displaystyle\sum_{k=3}^{n-1} \frac{\ln(k)}{k} \\ \shortparallel & & \\ \displaystyle\int_3^{n} \frac{\ln(t)}{t}\, dt & & \textit{(par relation de Chasles)} \end{array}$$

- Or : $\displaystyle\int_3^{n} \frac{\ln(t)}{t}\, dt \ = \ \left[\frac{\big(\ln(t)\big)^2}{2} \right]_3^n \ = \ \frac{\big(\ln(n)\big)^2}{2} - \frac{\big(\ln(3)\big)^2}{2}$.

  Ainsi :

$$\begin{array}{rcll} \dfrac{\big(\ln(n)\big)^2}{2} - \dfrac{\big(\ln(3)\big)^2}{2} & \leqslant & \displaystyle\sum_{k=3}^{n-1} \frac{\ln(k)}{k} & \\ & \leqslant & \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{\ln(k)}{k} - \cancel{\frac{\ln(1)}{1}} - \frac{\ln(2)}{2} - \frac{\ln(n)}{n} & \\ & \leqslant & \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{\ln(k)}{k} - \frac{\ln(2)}{2} & \textit{(comme } n \geqslant 4 \geqslant 1, \\ & & & \textit{on a : } \ln(n) \geqslant 0\textit{)} \end{array}$$

  On en déduit :

$$\frac{\ln(2)}{2} - \frac{\big(\ln(3)\big)^2}{2} \ \leqslant\ \sum_{k=1}^{n} \frac{\ln(k)}{k} - \frac{\big(\ln(n)\big)^2}{2} \ = \ v_n$$

- La suite $(v_n)_{n\geqslant 3}$ est donc :
  × décroissante, d'après la question précédente,
  × minorée par $\dfrac{\ln(2)}{2} - \dfrac{(\ln(3))^2}{2}$.

$$\boxed{\text{On en déduit que la suite } (v_n)_{n\geqslant 3} \text{ converge vers un réel } \ell \text{ vérifiant } \ell \geqslant \frac{\ln(2)}{2} - \frac{\big(\ln(3)\big)^2}{2}.}$$

□

5. Montrer, pour tout entier $n \geqslant 1$:

$$S_{2n} = 2 \sum_{k=1}^{n} \frac{\ln(2k)}{2k} - \sum_{k=1}^{2n} \frac{\ln(k)}{k}$$

puis :

$$S_{2n} = \ln(2) \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} + v_n - v_{2n} - \frac{\big(\ln(2)\big)^2}{2} - \ln(2)\ \ln(n)$$

Démonstration.

- Soit $n \geqslant 1$.

$$\begin{array}{rcl}
S_{2n} & = & \displaystyle\sum_{k=1}^{2n} u_k \\
& = & \displaystyle\sum_{k=1}^{2n} (-1)^k \frac{\ln(k)}{k} \\
& = & \displaystyle\sum_{\substack{k \in [\![1,2n]\!] \\ k \text{ pair}}} (-1)^k \frac{\ln(k)}{k} + \sum_{\substack{k \in [\![1,2n]\!] \\ k \text{ impair}}} (-1)^k \frac{\ln(k)}{k} \\
& = & \displaystyle\sum_{k=1}^{n} (-1)^{2k} \frac{\ln(2k)}{2k} + \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^{2k+1} \frac{\ln(2k+1)}{2k+1} \\
& = & \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{\ln(2k)}{2k} - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\ln(2k+1)}{2k+1} \\
& = & \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{\ln(2k)}{2k} + \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{\ln(2k)}{2k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{\ln(2k)}{2k}\right) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\ln(2k+1)}{2k+1} \\
& = & \displaystyle\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{\ln(2k)}{2k} + \sum_{k=1}^{n} \frac{\ln(2k)}{2k}\right) - \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{\ln(2k)}{2k} + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\ln(2k+1)}{2k+1}\right) \\
& = & \displaystyle 2\sum_{k=1}^{n} \frac{\ln(2k)}{2k} - \left(\sum_{\substack{k \in [\![1,2n]\!] \\ k \text{ pair}}} \frac{\ln(k)}{k} + \sum_{\substack{k \in [\![1,2n]\!] \\ k \text{ impair}}} \frac{\ln(k)}{k}\right) \\
& = & \displaystyle 2\sum_{k=1}^{n} \frac{\ln(2k)}{2k} - \sum_{k=1}^{2n} \frac{\ln(k)}{k}
\end{array}$$

$$\boxed{\forall n \geqslant 1,\ S_{2n} = 2 \sum_{k=1}^{n} \frac{\ln(2k)}{2k} - \sum_{k=1}^{2n} \frac{\ln(k)}{k}}$$

- Soit $n \geqslant 1$. D'après ce qui précède :

$$\begin{aligned}
& S_{2n} \\
= \ & 2 \sum_{k=1}^{n} \frac{\ln(2k)}{2k} - \sum_{k=1}^{2n} \frac{\ln(k)}{k} \\
= \ & 2 \sum_{k=1}^{n} \frac{\ln(2k)}{2k} - \left(v_{2n} + \frac{\big(\ln(2n)\big)^2}{2} \right) && \textit{(par définition de } v_{2n}\textit{)} \\
= \ & \cancel{2} \sum_{k=1}^{n} \frac{\ln(2) + \ln(k)}{\cancel{2}\, k} - v_{2n} - \frac{\big(\ln(2n)\big)^2}{2} && \textit{(par propriété de } \ln\textit{)} \\
= \ & \sum_{k=1}^{n} \frac{\ln(2)}{k} + \sum_{k=1}^{n} \frac{\ln(k)}{k} - v_{2n} - \frac{\big(\ln(2) + \ln(n)\big)^2}{2} && \textit{(par propriété de } \ln\textit{)} \\
= \ & \ln(2) \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} + \left(v_n + \frac{\big(\ln(n)\big)^2}{2} \right) - v_{2n} - \frac{\big(\ln(2) + \ln(n)\big)^2}{2} && \textit{(par définition de } v_n\textit{)} \\
= \ & \ln(2) \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} + v_n + \frac{\big(\ln(n)\big)^2}{2} - v_{2n} - \frac{(\ln(2))^2 + 2\ln(2)\,\ln(n) + \big(\ln(n)\big)^2}{2} \\
= \ & \ln(2) \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} + v_n + \cancel{\frac{\big(\ln(n)\big)^2}{2}} - v_{2n} - \frac{(\ln(2))^2}{2} - \ln(2)\ \ln(n) - \cancel{\frac{\big(\ln(n)\big)^2}{2}}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{On en déduit : } \forall n \geqslant 1,\ S_{2n} = \ln(2) \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} + v_n - v_{2n} - \frac{\big(\ln(2)\big)^2}{2} - \ln(2)\ln(n).}$$

□

6. Démontrer alors :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{\ln(n)}{n} = \gamma \ln(2) - \frac{\big(\ln(2)\big)^2}{2}$$

Démonstration.

- Soit $n \geqslant 1$. D'après la question précédente :

$$\begin{aligned}
S_{2n} &= \ln(2) \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} + v_n - v_{2n} - \frac{\big(\ln(2)\big)^2}{2} - \ln(2)\ln(n) \\
&= \ln(2) \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n) \right) + v_n - v_{2n} - \frac{(\ln(2))^2}{2} \\
&= \ln(2)\, w_n + v_n - v_{2n} - \frac{(\ln(2))^2}{2} && \textit{(par définition de } w_n\textit{)}
\end{aligned}$$

- De plus :
  × la suite (v_n) converge vers ℓ d'après la question ***4.d)***,
  × la suite (v_{2n}) est une suite extraite de la suite (v_n).

$$\boxed{\text{On en déduit que la suite } (v_{2n}) \text{ converge également vers } \ell.}$$

- Par ailleurs, d'après la question ***3.b)***, la suite (S_{2n}) converge vers $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} (-1)^k \dfrac{\ln(k)}{k}$.
- Enfin, d'après la question ***1c)*** : $\lim\limits_{n \to +\infty} w_n = \gamma$.

- Passons maintenant à la limite quand n tend vers $+\infty$:

$$\begin{array}{ccccccccc} S_{2n} & = & \ln(2)\, w_n & + & v_n & - & v_{2n} & - & \dfrac{(\ln(2))^2}{2} \\ {\scriptstyle n\to+\infty}\downarrow & & {\scriptstyle n\to+\infty}\downarrow & & {\scriptstyle n\to+\infty}\downarrow & & {\scriptstyle n\to+\infty}\downarrow & & {\scriptstyle n\to+\infty}\downarrow \\ \sum\limits_{k=1}^{+\infty} (-1)^k \dfrac{\ln(k)}{k} & = & \ln(2)\,\gamma & + & \ell & - & \ell & - & \dfrac{(\ln(2))^2}{2} \end{array}$$

$$\boxed{\text{Finalement : } \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{\ln(n)}{n} = \gamma \ln(2) - \frac{\big(\ln(2)\big)^2}{2}.}$$

Commentaire

- Soit (u_n) une suite réelle.
  On rappelle qu'une **suite extraite** (on parle aussi de **sous-suite**) de (u_n) est une suite $\big(u_{\varphi(n)}\big)$, où $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ est une application strictement croissante.
- Dans cette question, on utilise la propriété stipulant que pour toute application $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante :

$$(u_n) \text{ admet la limite } \ell \in \overline{\mathbb{R}} \ \Rightarrow\ (u_{\varphi(n)}) \text{ admet la limite } \ell \in \overline{\mathbb{R}}$$

En particulier :

Toute suite extraite d'une suite convergente est convergente de même limite.

□

Exercice 3 (EML 1998)

La fonction logarithme népérien est notée ln .

1. Soit $x \in [-1;1[$.

a) Montrer, pour tout n de $\mathbb{N}$ et tout t de $[-1;1[$:

$$\frac{1}{1-t} - \sum_{k=0}^{n} t^k = \frac{t^{n+1}}{1-t}$$

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit $t \in [-1,1[$.

- Comme $t \neq 1$, la somme des termes de la suite géométrique de raison t vaut :

$$\sum_{k=0}^{n} t^k = \frac{1-t^{n+1}}{1-t}$$

- Ainsi :

$$\frac{1}{1-t} - \sum_{k=0}^{n} t^k = \frac{1}{1-t} - \frac{1-t^{n+1}}{1-t} = \frac{\cancel{1} - (\cancel{1} - t^{n+1})}{1-t} = \frac{t^{n+1}}{1-t}$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \forall t \in [-1,1[, \ \frac{1}{1-t} - \sum_{k=0}^{n} t^k = \frac{t^{n+1}}{1-t}.}$$

□

b) En déduire, pour tout n de $\mathbb{N}$ et tout t de $[-1;x]$:

$$\left| \frac{1}{1-t} - \sum_{k=0}^{n} t^k \right| \leqslant \frac{|t|^{n+1}}{1-x}$$

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit $t \in [-1,x]$.

- D'après la question précédente :

$$\left| \frac{1}{1-t} - \sum_{k=0}^{n} t^k \right| = \left| \frac{t^{n+1}}{1-t} \right| = \frac{|t^{n+1}|}{|1-t|} = \frac{|t|^{n+1}}{|1-t|}$$

(par propriété de la valeur absolue)

- Comme $t \in [-1,x]$ et $x \in [-1,1[$:

$$\begin{array}{lccccc} & t & \leqslant & x & < & 1 \\ \text{donc} & -t & \geqslant & -x & > & -1 \\ \text{et} & 1-t & \geqslant & 1-x & > & 0 \\ \text{enfin} & \dfrac{1}{1-t} & \leqslant & \dfrac{1}{1-x} & & \end{array}$$

(cela démontre au passage : $|1-t| = 1-t$)

$$\boxed{\text{On en conclut : } \left| \frac{1}{1-t} - \sum_{k=0}^{n} t^k \right| \leqslant \frac{|t|^{n+1}}{1-x}.}$$

□

c) Établir, pour tout n de $\mathbb{N}$:

$$\left| -\ln(1-x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{k+1}}{k+1} \right| \leqslant \frac{1}{(n+2)(1-x)}$$

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}$.

- Remarquons tout d'abord :

$$\begin{aligned} \int_0^x \frac{1}{1-t}\, dt &= -\int_0^x \frac{-1}{1-t}\, dt = -\left[\ \ln\left(|1-t|\right)\ \right]_0^x \\ &= -\left[\ \ln(1-t)\ \right]_0^x && \textit{(car } |1-t| = 1-t\textit{)} \\ &= -\left(\ln(1-x) - \cancel{\ln(1)}\right) = -\ln(1-x) \end{aligned}$$

Par ailleurs :

$$\begin{aligned} \int_0^x \left(\sum_{k=0}^{n} t^k \right) dt &= \sum_{k=0}^{n} \left(\int_0^x t^k\ dt \right) \\ &= \sum_{k=0}^{n} \left[\ \frac{t^{k+1}}{k+1}\ \right]_0^x \\ &= \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{x^{k+1}}{k+1} - 0 \right) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{k+1}}{k+1} \end{aligned}$$

Par linéarité de l'intégration, les fonctions en présence étant continues sur le **segment** $[0, x]$ (ou $[x, 0]$ si $x \leqslant 0$) :

$$\int_0^x \left(\frac{1}{1-t} - \sum_{k=0}^{n} t^k \right) dt = -\ln(1-x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{k+1}}{k+1}$$

$$\boxed{\text{Ainsi : } \left| -\ln(1-x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{k+1}}{k+1} \right| = \left| \int_0^x \left(\frac{1}{1-t} - \sum_{k=0}^{n} t^k \right) dt \right|.}$$

- Traitons alors le cas $x \geqslant 0$. On a alors :

$$\left| \int_0^x \left(\frac{1}{1-t} - \sum_{k=0}^{n} t^k \right) dt \right| \leqslant \int_0^x \left| \frac{1}{1-t} - \sum_{k=0}^{n} t^k \right| dt$$

(par inégalité triangulaire, les bornes d'intégration étant dans l'ordre croissant ($0 \leqslant x$))

$$\leqslant \int_0^x \frac{|t|^{n+1}}{1-x}\, dt$$

(par croissance de l'intégration, les bornes d'intégration étant dans l'ordre croissant ($0 \leqslant x$) et d'après la question précédente)

$$\begin{gathered} \| \\ \frac{1}{1-x} \int_0^x |t|^{n+1}\, dt \end{gathered}$$

Enfin :

$$\begin{aligned}
\int_0^x |t|^{n+1}\, dt &= \int_0^x t^{n+1}\, dt && \textit{(car } |t| = t \textit{ pour } t \in [0,x]\textit{)}\\
&= \left[\frac{t^{n+2}}{n+2} \right]_0^x = \left(\frac{x^{n+2}}{n+2} - 0 \right)\\
&= \frac{x^{n+2}}{n+2} \leqslant \frac{1}{n+2} && \textit{(car } x \leqslant 1 \textit{ et par croissance de la fonction } t \mapsto t^{n+2} \textit{ sur } [0,+\infty[\textit{)}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Dans le cas où } x \geqslant 0, \text{ on a bien : } \left| -\ln(1-x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{k+1}}{k+1} \right| \leqslant \frac{1}{(n+2)(1-x)}.}$$

- Il reste à traiter le cas où $x < 0$.
  Remarquons tout d'abord :

$$\begin{aligned}
\left| \int_0^x \left(\frac{1}{1-t} - \sum_{k=0}^{n} t^k \right) dt \right| &= \left| - \int_x^0 \left(\frac{1}{1-t} - \sum_{k=0}^{n} t^k \right) dt \right|\\
&= |-1| \times \left| \int_x^0 \left(\frac{1}{1-t} - \sum_{k=0}^{n} t^k \right) dt \right| = \left| \int_x^0 \left(\frac{1}{1-t} - \sum_{k=0}^{n} t^k \right) dt \right|
\end{aligned}$$

L'étude est alors analogue à la précédente, en considérant maintenant les intégrales sur le **segment** $[x,0]$:

$$\left| \int_x^0 \left(\frac{1}{1-t} - \sum_{k=0}^{n} t^k \right) dt \right| \leqslant \int_x^0 \left| \frac{1}{1-t} - \sum_{k=0}^{n} t^k \right| dt \leqslant \int_x^0 \frac{|t|^{n+1}}{1-x}\, dt$$

Enfin :

$$\begin{aligned}
\int_x^0 \frac{|t|^{n+1}}{1-x}\, dt &= \int_x^0 \frac{(-t)^{n+1}}{1-x}\, dt = \frac{(-1)^{n+1}}{1-x} \int_x^0 t^{n+1}\, dt\\
&= \frac{(-1)^{n+1}}{1-x} \left[\frac{t^{n+2}}{n+2} \right]_x^0 = \frac{(-1)^{n+1}}{1-x} \left(0 - \frac{x^{n+2}}{n+2} \right)\\
&= \frac{(-1)^{n+2}\, x^{n+2}}{1-x} = \frac{(-x)^{n+2}}{1-x}
\end{aligned}$$

Comme $x \in [-1,1[$ et qu'on a supposé de plus $x < 0$ alors :

$$\begin{aligned}
& 0 < -x \leqslant 1\\
\text{donc } & 0 < (-x)^{n+2} \leqslant 1^{n+2} = 1 && \textit{(par croissance de la fonction } t \mapsto t^{n+2}\textit{)}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Pour tout } x \in [-1,1[: \left| -\ln(1-x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{k+1}}{k+1} \right| \leqslant \frac{1}{(n+2)(1-x)}.}$$

Commentaire

- On prendra bien garde ici à l'ordre des bornes ! En effet, l'intégration n'est croissante **que si les bornes d'intégration sont dans l'ordre croissant**.
  Par conséquent, on vérifiera `TOUJOURS` l'ordre des bornes avant d'utiliser l'argument de croissance de l'intégration.
- Ce point est aussi décisif dans l'inégalité triangulaire.
  Si on considère une fonction f continue sur le **segment** $[a, b]$:

$$\begin{array}{lccccc} \text{comme : } \forall t \in [a,b], & -|f(t)| & \leqslant & f(t) & \leqslant & |f(t)| \\ \text{alors : } & -\displaystyle\int_a^b |f(t)|\,dt & \leqslant & \displaystyle\int_a^b f(t)\,dt & \leqslant & \displaystyle\int_a^b |f(t)|\,dt \end{array}$$

  La croissance de l'intégration (car les bornes sont dans le bon sens : $a \leqslant b$) est un argument essentiel pour obtenir cette inégalité.

$\square$

d) En déduire que la série $\sum\limits_{n \geqslant 1} \dfrac{x^n}{n}$ converge et a pour somme $-\ln(1-x)$.

En particulier, montrer : $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} \dfrac{1}{k\, 2^k} = \ln(2)$.

Démonstration.
Soit $n \geqslant 0$.

- Tout d'abord, par décalage d'indice : $\sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{x^{k+1}}{k+1} \ = \ \sum\limits_{k=1}^{n+1} \dfrac{x^k}{k}$.

  Donc, d'après la question précédente :

$$0 \ \leqslant \ \left| -\ln(1-x) - \sum_{k=1}^{n+1} \frac{x^k}{k} \right| \ \leqslant \ \frac{1}{(n+2)(1-x)}$$

- Or :
  × $\lim\limits_{n \to +\infty} 0 \ = \ 0$
  × $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{(n+2)(1-x)} = 0$

  Ainsi, par théorème d'encadrement, la suite $\left(\left| -\ln(1-x) - \sum\limits_{k=1}^{n+1} \dfrac{x^k}{k} \right| \right)_{n \geqslant 0}$ est convergente, de limite nulle. Il en est donc de même de la suite $\left(-\ln(1-x) - \sum\limits_{k=1}^{n+1} \dfrac{x^k}{k} \right)_{n \geqslant 0}$.

  Notons $\alpha_n = -\ln(1-x) - \sum\limits_{k=1}^{n+1} \dfrac{x^k}{k}$, le terme général de cette dernière suite.

- On en déduit alors :

$$\sum_{k=1}^{n+1} \frac{x^k}{k} \ = \ -\ln(1-x) - \alpha_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} -\ln(1-x)$$

> Cela démontre que la série $\sum\limits_{n \geqslant 1} \dfrac{x^n}{n}$ est convergente, de somme $-\ln(1-x)$.

Commentaire

- Il faut bien comprendre les objets étudiés dans la question.
Étudier la nature de la série $\sum\limits_{n \geqslant 1} \dfrac{x^n}{n}$ c'est étudier la nature de la suite de ses sommes partielles, notée $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$. On démontre ici que $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n$ existe et est finie. La variable $\boldsymbol{n}$ vers $+\infty$ tandis que la variable x (est donc le réel $-\ln(1-x)$) est une constante par rapport à n.
- On utilise dans cette question le fait que pour toute suite $(u_n)_{n \geqslant 0}$ et tout réel $\ell \in \mathbb{R}$, on a :
$$(u_n + \ell)_{n \geqslant 0} \text{ converge vers } \ell \ \Leftrightarrow \ (u_n)_{n \geqslant 0} \text{ converge vers } 0$$
On a en réalité redémontré cette propriété (c'est l'intérêt de l'introduction de la notation α_n).

- Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Il s'agit maintenant de mettre la fraction $\dfrac{1}{n\, 2^n}$ sous la forme $\dfrac{x^n}{n}$ pour une certaine valeur de x. Or :
$$\frac{1}{n\, 2^n} = \frac{1}{n}\, \frac{1}{2^n} = \frac{1}{n} \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^n}{n}$$
On applique donc le résultat précédent à $x = \dfrac{1}{2}$. On obtient :
1) la série $\sum\limits_{n \geqslant 1} \dfrac{1}{n\, 2^n}$ converge,
2) sa somme vaut $-\ln\left(1 - \dfrac{1}{2}\right) = -\ln\left(\dfrac{1}{2}\right) = -(-\ln(2)) = \ln(2)$.
$$\boxed{\text{On en déduit : } \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k\, 2^k} = \ln(2).}$$
□

e) Écrire un programme **Scilab** qui calcule et affiche une valeur approchée de $\ln(2)$ à 10^{-3} près.

Démonstration.

- On cherche ici à trouver un entier N tel que $\sum\limits_{k=1}^{N+1} \dfrac{1}{k\, 2^k}$ est une valeur approchée de $\ln(2)$ à 10^{-3} près. Autrement dit, on souhaite exhiber $N \in \mathbb{N}$ tel que :
$$\left| \ln(2) - \sum_{k=1}^{N+1} \frac{1}{k\, 2^k} \right| \leqslant 10^{-3}$$
- Or, d'après la question ***1.c)***, pour tout $n \geqslant 0$:
$$\left| \ln\left(1 - \frac{1}{2}\right) - \sum_{k=0}^{n} \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{k+1}}{k+1} \right| \leqslant \frac{1}{(n+2)\left(1 - \frac{1}{2}\right)}$$
c'est-à-dire :
$$\left| \ln(2) - \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k\, 2^k} \right| \leqslant \frac{2}{n+2}$$
- Il suffit alors de trouver $N \in \mathbb{N}$ tel que : $\dfrac{2}{N+2} \leqslant 10^{-3}$.
En effet, par transitivité, on aura alors :
$$\left| \ln(2) - \sum_{k=1}^{N+1} \frac{1}{k\, 2^k} \right| \leqslant \frac{2}{N+2} \leqslant 10^{-3}$$

- Or on a :
$$\frac{2}{n+2} \leqslant 10^{-3} \quad \Leftrightarrow \quad 2 \times 10^3 \leqslant n+2 \quad \Leftrightarrow \quad n \geqslant 2 \times 10^3 - 2$$

$$\boxed{\text{L'entier : } N = 2 \times 10^3 - 2 \text{ convient.}}$$

- Il suffit maintenant de calculer la somme $\sum\limits_{k=1}^{n_0+1} \frac{1}{k\, 2^k}$ pour $n_0 = 2 \times 10^3 - 2$.

```
N = 2 * 10 ^3 - 2
S = 0
for k = 1:(N+1)
  S = S + 1 / (k * (2^k))
end
disp(S)
```

□

2. Un joueur lance une pièce équilibrée jusqu'à l'obtention du premier pile. S'il lui a fallu n lancers ($n \in \mathbb{N}^*$) pour obtenir ce premier pile, on lui fait alors tirer au hasard un billet de loterie parmi n billets dont un seul est gagnant.
Quelle est la probabilité que le joueur gagne ?

Démonstration.

- On note X la v.a.r. associée au rang du 1er pile.
La première partie de l'expérience consiste en la succession d'une infinité d'épreuves de Bernoulli dont le succès (pile) est obtenu avec probabilité $\frac{1}{2}$ car la pièce est équilibrée.
La v.a.r. X est la v.a.r. associée au rang du premier succès de cette première partie d'expérience.

$$\boxed{\text{On en déduit : } X \hookrightarrow \mathcal{G}\left(\frac{1}{2}\right).}$$

Par la suite, on définit l'événement $A =$ « le joueur gagne ».

- La famille $\big([X=n]\big)_{n\geqslant 1}$ est un système complet d'événements.
Ainsi, par la formule des probabilités totales, on a :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(A) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}([X=n] \cap A) \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}([X=n]) \times \mathbb{P}_{[X=n]}(A) \qquad \textit{(car } \mathbb{P}([X=n]) \neq 0\textit{)} \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \frac{1}{2} \times \mathbb{P}_{[X=n]}(A) \qquad \textit{(car } X \hookrightarrow \mathcal{G}\left(\frac{1}{2}\right)\textit{)} \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n} \times \mathbb{P}_{[X=n]}(A)
\end{aligned}$$

- Si l'événement $[X=n]$ est réalisé, c'est-à-dire si le premier pile est obtenu au $n^{\text{ème}}$ lancer, alors le joueur tire de manière équiprobable parmi n billets de loterie.
Un seul d'entre eux est gagnant, donc : $\mathbb{P}_{[X=n]}(A) = \frac{1}{n}$.
- On en déduit :
$$\mathbb{P}(A) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n} \times \frac{1}{n} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n\, 2^n}$$

Or, d'après la question ***1.d)*** : $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n\, 2^n} = \ln(2)$.

$\boxed{\text{La probabilité que le joueur gagne vaut donc } \ln(2).}$

Commentaire

- La difficulté de cet exercice réside dans le fait que la modélisation mathématique est absente. On insiste ici sur le raisonnement à mener qui est assez naturel et très fréquent dans les exercices.
- La probabilité que le billet tiré soit gagnant dépend du nombre de lancers nécessaire pour obtenir pile :
  - × soit pile est obtenu lors du 1^{er} lancer et dans ce cas le joueur a le choix d'un seul billet, qui est gagnant.
  - × soit pile est obtenu lors du $2^{\text{ème}}$ lancer et dans ce cas le joueur a le choix entre 2 billets dont 1 est gagnant.
  - × soit pile est obtenu lors du $3^{\text{ème}}$ lancer et dans ce cas le joueur a le choix entre 3 billets dont 1 est gagnant.
  - × ...
  - × soit pile est obtenu lors du $n^{\text{ème}}$ lancer et dans ce cas le joueur a le choix entre n billets dont 1 est gagnant.
  - × ...
- On voit clairement apparaître un raisonnement par disjonction de cas. Il faut repérer ce type de construction qui signifie qu'il y a un système complet d'événements sous-jacent au problème.
- L'idée ici est de **tester** l'événement $A =$ « le joueur gagne » suivant chacun des cas listés précédemment.

La démonstration consiste à utiliser le résultat permettant de formaliser ces idées : la formule des probabilités totales. Il faut s'habituer à repérer ce cadre classique d'utilisation de la formule des probabilités totales : l'expérience aléatoire débute par une première « sous-expérience » dont le résultat influence le reste de l'expérience complète.

□

Exercice 4 (EML 2018)

Dans tout cet exercice, f désigne la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par :

$$\forall x \in]0,+\infty[, \ f(x) = x - \ln(x)$$

Partie I : Étude de la fonction f

1. Dresser le tableau de variations de f en précisant ses limites en 0 et en $+\infty$.

Démonstration.

- La fonction f est dérivable sur $]0,+\infty[$ en tant que somme de fonctions dérivables sur $]0,+\infty[$.
- Soit $x \in]0,+\infty[$.

$$f'(x) \ = \ 1 - \frac{1}{x} \ = \ \frac{x-1}{x}$$

Alors, comme $x > 0$, la quantité $f'(x)$ **est** du signe de $x - 1$. Ainsi :

$$f'(x) > 0 \ \Leftrightarrow \ x - 1 > 0 \ \Leftrightarrow \ x > 1$$

On obtient le tableau de variations suivant :

x	0		1		$+\infty$
Signe de $f'(x)$	||	$-$	0	$+$	
Variations de f	|| $+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

- Détaillons les éléments de ce tableau.
  - Tout d'abord : $f(1) = 1 - \ln(1) = 1$.
  - Ensuite : $\lim\limits_{x \to 0} \ln(x) = -\infty$.

$$\boxed{\text{Donc : } \lim\limits_{x \to 0} f(x) = +\infty.}$$

  - Enfin, soit $x \in]0,+\infty[$:

$$f(x) \ = \ x - \ln(x) \ = \ x\left(1 - \frac{\ln(x)}{x}\right)$$

De plus, par croissances comparées : $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln(x)}{x} = 0$.

$$\boxed{\text{On en déduit : } \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty.}$$

□

2. Montrer que l'équation $f(x) = 2$, d'inconnue $x \in]0,+\infty[$, admet exactement deux solutions, que l'on note a et b, telles que $0 < a < 1 < b$.

Démonstration.

- La fonction f est :
  - × continue sur $]0,1[$ (car dérivable sur $]0,1[$),
  - × strictement décroissante sur $]0,1[$.

  Ainsi f réalise une bijection de $]0,1[$ dans $f(]0,1[)$. Or :

$$f(]0,1[) \ = \left] \lim\limits_{x \to 1^-} f(x), \ \lim\limits_{x \to 0} f(x) \right[=]1,+\infty[$$

  Or $2 \in]1,+\infty[$.
  Donc l'équation $f(x) = 2$ admet une unique solution sur $]0,1[$, notée a.

- La fonction f est :
  $\times$ continue sur $]1,+\infty[$ (car dérivable sur $]1,+\infty[$),
  $\times$ strictement croissante sur $]1,+\infty[$.
  Ainsi f réalise une bijection de $]1,+\infty[$ dans $f(]1,+\infty[)$. Or :
  $$f(]1,+\infty[) \ = \left]\lim_{x\to 1^-} f(x), \lim_{x\to+\infty} f(x)\right[=]1,+\infty[$$
  Or $2 \in]1,+\infty[$.
  Donc l'équation $f(x) = 2$ admet une unique solution sur $]1,+\infty[$, notée b.
- Enfin, $f(1) = 1$ et donc 1 n'est pas solution de $f(x) = 2$.

Finalement, l'équation $f(x) = 2$ admet exactement 2 solutions sur $]0,+\infty[$ notées a et b telles que $0 < a < 1 < b$.

Commentaire

- Il est important dans cette question d'avoir parfaitement en tête toutes les hypothèses du théorème de la bijection. En particulier, la fonction f doit être **strictement monotone** sur l'intervalle considéré.
- On ne pouvait donc pas appliquer le théorème de la bijection directement sur l'intervalle $]0,+\infty[$, mais il fallait découper cet intervalle en plusieurs sous-intervalles sur lesquels f est strictement monotone (ici $]0,1[$ et $]1,+\infty[$).

□

3. Montrer : $b \in [2,4]$. On donne $\ln(2) \simeq 0,\ 7$.

Démonstration.
Remarquons :
$\times$ $f(2) = 2 - \ln(2) \leqslant 2$.
$\times$ $f(b) = 2$.
$\times$ $f(4) = 4 - \ln(4) = 4 - \ln(2^2) = 4 - 2\ln(2) = 2(2 - \ln(2))$.
De plus, $\ln(2) \simeq 0,7$, donc : $2 - \ln(2) \simeq 1,3$ et $2(2 - \ln(2)) \simeq 2,6$.
D'où : $f(4) \geqslant 2$.
Ainsi :
$$f(2) \leqslant \underset{\displaystyle f(b)}{\underset{\shortparallel}{2}} \leqslant f(4)$$
Or, d'après le théorème de la bijection, la fonction $f^{-1} :]1,+\infty[\to]1,+\infty[$ est strictement croissante (*(de même monotonie que* f). En appliquant f^{-1} de part et d'autre, on obtient :
$$f^{-1}\big(f(2)\big) \leqslant f^{-1}\big(f(b)\big) \leqslant f^{-1}\big(f(4)\big)$$

On en déduit : $2 \leqslant b \leqslant 4$.

Commentaire

L'indication de l'énoncé $\ln(2) \simeq 0,7$ ne permet pas de savoir si $0,7$ est une sur ou sous-approximation de $\ln(2)$. Il n'est d'ailleurs pas indiqué l'erreur de précision commise par une telle approximation. Il s'agit d'une valeur approchée à 10^{-1} près et on a l'encadrement : $0,6 \leqslant \ln(2) \leqslant 0,8$. Cette information serait certainement préférable pour résoudre plus rigoureusement cette question.

□

Partie II : Étude d'une suite

On pose : $u_0 = 4$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \ln(u_n) + 2$.

4. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie et que l'on a : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [b, +\infty[$.

Démonstration.

Démontrons par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$ où $\mathcal{P}(n)$: $\left\{\begin{array}{l} u_n \text{ est bien défini} \\ u_n \in [b, +\infty[\end{array}\right.$

- **Initialisation** :
  Tout d'abord $u_0 = 4$. Or, d'après la question *3.*, $b \leqslant 4$. Donc : $u_0 \in [b, +\infty[$.
  D'où $\mathcal{P}(0)$.
- **Hérédité** : soit $n \in \mathbb{N}$.
  Supposons $\mathcal{P}(n)$ et démontrons $\mathcal{P}(n+1)$ $\left(\textit{i.e.} \left\{\begin{array}{l} u_{n+1} \text{ est bien défini} \\ u_{n+1} \in [b, +\infty[\end{array}\right. \right)$.

  Par hypothèse de récurrence, u_n est bien défini et $u_n \in [b, +\infty[$.
  - Comme $u_n \geqslant b \geqslant 2$, on a en particulier $u_n > 0$.
    Donc $\ln(u_n)$ est bien définie. D'où u_{n+1} est bien défini.
  - Comme $u_n \geqslant b$, on obtient, par stricte croissance de $\ln$ sur $]0, +\infty[$: $\ln(u_n) \geqslant \ln(b)$.
    On en déduit :
    $$u_{n+1} = \ln(u_n) + 2 \ \geqslant\ \ln(b) + 2$$
    Or, par définition de b : $f(b) = 2$, c'est-à-dire $b - \ln(b) = 2$.
    Donc : $\ln(b) = b - 2$.
    On en déduit : $u_{n+1} \geqslant b - \cancel{2} + \cancel{2} = b$. Ainsi : $u_{n+1} \in [b, +\infty[$.

  D'où $\mathcal{P}(n+1)$.

$$\boxed{\text{Par principe de récurrence, on obtient que } (u_n) \text{ est bien définie et : } \forall n \in \mathbb{N},\ u_n \in [b, +\infty[.}$$

Commentaire

Cette question est un classique de l'étude des suites récurrentes. Il faut savoir rédiger proprement la récurrence associée en commençant par bien énoncer l'hypothèse de récurrence. Il s'agit de démontrer :

« **la suite** (u_n) est bien définie »

Pour ce faire, on démontre :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \mathcal{P}(n) \quad \text{où} \quad \mathcal{P}(n) : \textbf{le réel } u_n \text{ est bien défini}$$

De plus, pour s'assurer de pouvoir effectivement calculer $\ln(u_n)$, il faut être sûr que u_n soit dans l'ensemble de définition de $\ln$. Ici, il s'agit donc de vérifier qu'à tout rang $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$. On démontre en réalité une propriété plus forte, à savoir :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \mathcal{P}(n) \quad \text{où} \quad \mathcal{P}(n) : \left\{\begin{array}{l} u_n \text{ est bien défini} \\ u_n \geqslant b \end{array}\right.$$

Démontrer une propriété plus forte que celle assurant la bonne définition de la suite (u_n) ne rend pas la démonstration plus difficile. Au contraire ! Tout se joue lors de l'étape d'hérédité : on aura plus de matériel mathématique si l'on suppose $u_n \geqslant b$ que si l'on suppose $u_n > 0$ ce qui facilite la suite de la démonstration.

$\square$

5. Déterminer la monotonie de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. En déduire qu'elle converge et préciser sa limite.

Démonstration.

- Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$u_{n+1} - u_n \; = \; \ln(u_n) + 2 - u_n \; = \; 2 - (u_n - \ln(u_n)) \; = \; f(b) - f(u_n)$$

Or, d'après la question précédente : $u_n \geqslant b$.
De plus, par croissance de la fonction f sur $[b, +\infty[$: $f(u_n) \geqslant f(b)$.
D'où : $u_{n+1} - u_n = f(b) - f(u_n) \leqslant 0$.

$\boxed{\text{Ainsi, la suite } (u_n) \text{ est décroissante.}}$

Commentaire

On pouvait aussi démontrer la décroissance de la suite (u_n) par récurrence.
Démontrons par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$ où $\mathcal{P}(n)$: $u_{n+1} \leqslant u_n$.

- **Initialisation** :
  $u_1 = \ln(u_0) + 2 = \ln(4) + 2 = 2\,\ln(2) + 2 \simeq 2 \times 0,7 + 2 \simeq 3,4$.
  Donc $u_1 \leqslant u_0$.
  D'où $\mathcal{P}(0)$.
- **Hérédité** : Soit $n \in \mathbb{N}$.
  Supposons $\mathcal{P}(n)$ et démontrons $\mathcal{P}(n+1)$ (*i.e.* $u_{n+2} \geqslant u_{n+1}$).
  Par hypothèse de récurrence : $u_{n+1} \leqslant u_n$.
  On obtient donc, par croissance de ln sur $]0, +\infty[$: $\ln(u_{n+1}) \geqslant \ln(u_n)$. Ainsi :

$$u_{n+2} = \ln(u_{n+1}) + 2 \; \leqslant \; \ln(u_n) + 2 = u_{n+1}$$

  D'où $\mathcal{P}(n+1)$.

Par principe de récurrence, on en déduit : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} \leqslant u_n$.

- La suite (u_n) est donc :
  × décroissante,
  × minorée par b (car : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [b, +\infty[$).

$\boxed{\text{On en déduit que la suite } (u_n) \text{ est converge de limite } \ell \geqslant b.}$

- Déterminons précisément la valeur de ℓ.
  - Tout d'abord : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant b$.
    Par passage à limite, on en déduit : $\ell \geqslant b$.
  - Ensuite : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \ln(u_n) + 2$.
    La fonction ln étant continue sur $]0, +\infty[$, elle l'est en particulier en ℓ et ainsi :

$$\ell = \ln(\ell) + 2$$

Or :

$$\begin{array}{rcl} \ell = \ln(\ell) + 2 & \Leftrightarrow & \ell - \ln(\ell) = 2 \\ & \Leftrightarrow & f(\ell) = 2 \\ & \Leftrightarrow & \ell = b \end{array}$$

*(car d'après la question **2.**, b est l'unique solution de l'équation $f(x) = 2$ sur $]1, +\infty[$)*

$\boxed{\text{Ainsi : } \ell = b.}$

□

6. a) Montrer : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} - b \leqslant \dfrac{1}{2}\,(u_n - b)$.

Démonstration.
On note g la fonction définie par $g : x \mapsto \ln(x) + 2$.

- La fonction g est dérivable sur $[b, +\infty[$ en tant que somme de fonctions dérivables sur $[b, +\infty[$.
  Soit $x \in [b, +\infty[$. On a : $g'(x) = \dfrac{1}{x} \geqslant 0$.
  Or, d'après la question ***3.***, $b \geqslant 2$. Donc, pour tout $x \in [b, +\infty[$: $x \geqslant b \geqslant 2$.
  Par décroissance de la fonction inverse sur $]0, +\infty[$, on en déduit : $\dfrac{1}{x} \leqslant \dfrac{1}{2}$.

  $$\boxed{\text{On en conclut : } \forall x \in [b, +\infty[,\ g'(x) \leqslant \frac{1}{2}.}$$

- D'après ce qui précède :
  × g est dérivable sur $[b, +\infty[$,
  × $\forall x \in [b, +\infty[,\ |g'(x)| \leqslant \dfrac{1}{2}$.
  On en déduit, par l'inégalité des accroissements finis :
  $$\forall (x, y) \in [b, +\infty[^2,\ |g(y) - g(x)| \ \leqslant\ \frac{1}{2}\ |y - x|$$
  Soit $n \in \mathbb{N}$. En appliquant cette inégalité à $y = u_n \in [b, +\infty[$ et $x = b \in [b, +\infty[$, on obtient :
  $$|g(u_n) - g(b)| \ \leqslant\ \frac{1}{2}\ |u_n - b|$$
  Or :
  × $g(u_n) = \ln(u_n) + 2 = u_{n+1}$
  × $g(b) = \ln(b) + 2 = (b - \cancel{2}) + \cancel{2} = b$, car b est solution de l'équation $f(x) = 2$.
  Enfin, d'après la question ***4.*** : $u_n \geqslant b$ et $u_{n+1} \geqslant b$.

  $$\boxed{\text{On en déduit : } \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} - b \leqslant \frac{1}{2}(u_n - b).}$$

□

b) En déduire : $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant u_n - b \leqslant \dfrac{1}{2^{n-1}}$.

Démonstration.

- Soit $n \in \mathbb{N}$. D'après la question ***4.*** : $u_n \geqslant b$.

  $$\boxed{\text{Donc : } u_n - b \geqslant 0.}$$

- Démontrons par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N},\ \mathcal{P}(n)$ où $\mathcal{P}(n)$: $u_n - b \leqslant \dfrac{1}{2^{n-1}}$.
  ▸ **Initialisation** :
  D'une part : $u_0 - b = 4 - b$.
  D'autre part : $\dfrac{1}{2^{0-1}} = \dfrac{1}{2^{-1}} = 2$.
  Or :
  $$u_0 - b \leqslant \frac{1}{2^{0-1}} \ \Leftrightarrow\ 4 - b \leqslant 2 \ \Leftrightarrow\ 2 \leqslant b$$
  La dernière assertion est vraie d'après la question ***3***.
  Donc, par équivalence, la première assertion l'est aussi.
  D'où $\mathcal{P}(0)$.

- **Hérédité** : soit $n \in \mathbb{N}$.
  Supposons $\mathcal{P}(n)$ et démontrons $\mathcal{P}(n+1)$ $\left(i.e.\ u_{n+1} - b \leqslant \dfrac{1}{2^n} \right)$.
  D'après la question précédente : $0 \leqslant u_{n+1} - b \leqslant \dfrac{1}{2}\ (u_n - b)$.
  Or, par hypothèse de récurrence : $0 \leqslant u_n - b \leqslant \dfrac{1}{2^{n-1}}$.
  En combinant ces deux résultats, on obtient :
  $$u_{n+1} - b \ \leqslant\ \frac{1}{2}(u_n - b) \ \leqslant\ \frac{1}{2}\,\frac{1}{2^{n-1}} = \frac{1}{2^n}$$
  D'où $\mathcal{P}(n+1)$.

$$\boxed{\text{Par principe de récurrence : } \forall n \in \mathbb{N},\ u_n - b \leqslant \frac{1}{2^{n-1}}.}$$ □

7. a) Écrire une fonction **Scilab** d'en-tête `function u = suite(n)` qui, prenant en argument un entier n de $\mathbb{N}$, renvoie la valeur de u_n.

Démonstration.

```
1 function u = suite(n)
2     u = 4
3     for k = 1:n
4         u = log(u) + 2
5     end
6 endfunction
```

Détaillons les différents éléments de ce programme.
La variable `u` est créée pour contenir successivement les valeurs u_0, u_1, ..., u_n.

- On initialise donc cette variable à 4 (valeur de u_0) en ligne 2 :

```
2     u = 4
```

- On met ensuite à jour `u` de manière itérative en ligne 4

```
4         u = log(u) + 2
```

Commentaire

- On décrit ici les instructions afin de permettre une bonne compréhension des mécanismes en jeu. Cependant, l'écriture de la fonction démontre la compréhension de toutes les commandes en question et permet sans doute d'obtenir la totalité des points alloués à cette question.
- Si on souhaite calculer les n premiers termes de la suite (u_n), il faut introduire un tableau `tab` (contenant n cases) permettant de stocker chacun de ces éléments :

```
function tab = suite(n)
    tab = zeros(1, n)
    tab(1) = 4
    for k = 1:n-1
        tab(k+1) = log(tab(k)) + 2
    end
endfunction
```

□

b) Recopier et compléter la ligne 3 de la fonction **Scilab** suivante afin que, prenant en argument un réel `epsilon` strictement positif, elle renvoie une valeur approchée de b à `epsilon` près.

```
1 function b = valeur _approchee(epsilon)
2     n = 0
3     while ..........
4         n = n + 1
5     end
6     b = suite(n)
7 endfunction
```

Démonstration.

- On cherche ici à trouver un entier N tel que u_N est une valeur approchée de b à une précision ε près (fournie par l'utilisateur). Autrement dit, on souhaite exhiber $N \in \mathbb{N}$ tel que :

$$|u_N - b| \ \leqslant \ 10^{-3}$$

- Or, d'après la question ***6.b)*** : $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant u_n - b \leqslant \dfrac{1}{2^{n-1}}$.
- Il suffit alors de trouver $N \in \mathbb{N}$ tel que : $\dfrac{1}{2^{N-1}} \leqslant \varepsilon$.
  Si c'est le cas, on obtient alors, par transitivité :

$$0 \leqslant u_N - b \leqslant \frac{1}{2^{N-1}} \leqslant \varepsilon$$

- On complète alors le programme **Scilab** de la façon suivante :

```
3     while 1 / 2^(n-1) > epsilon
```

  À la fin de la boucle, on est assuré que : $\dfrac{1}{2^{n-1}} \leqslant \varepsilon$ (on itère tant que ce n'est pas le cas).
  Il reste alors à calculer la valeur approchée de b : on l'obtient par le caclul de u_n où n est la valeur obtenue à l'issue de cette boucle.

```
6     b = suite(n)
```

Commentaire

- Lorsqu'on écrit une boucle `while` il est préférable de s'assurer en amont de sa terminaison. C'est bien le cas ici. En effet, la suite $(\frac{1}{2^{n-1}})_{n \geqslant 1}$ est convergente de limite 0. Ce qui signifie :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant n_0,\ \left| \frac{1}{2^{n-1}} - 0 \right| < \varepsilon$$

  Ainsi, quelle que soit la précision $\varepsilon > 0$ choisie au départ, on est toujours en mesure de trouver un rang n_0 à partir duquel on aura : $\dfrac{1}{2^{n-1}} < \varepsilon$.
- On pouvait déterminer, sans utiliser de boucle, un entier N tel que u_N est une valeur approchée à ε près de b. Pour ce faire, on remarque :

$$\frac{1}{2^{n-1}} \leqslant \varepsilon \quad \Leftrightarrow \quad 2^{n-1} \geqslant \frac{1}{\varepsilon} \quad \Leftrightarrow \quad (n-1)\ \ln(2) \geqslant \ln\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) \quad \Leftrightarrow \quad (n-1)\ \geqslant \frac{-\ln(\varepsilon)}{\ln(2)}$$

  L'entier $N = \left\lceil \dfrac{-\ln(\varepsilon)}{\ln(2)} + 1 \right\rceil$ convient.

□

Partie III : Étude d'une fonction définie par une intégrale

On note Φ la fonction donnée par : $\Phi(x) = \displaystyle\int_x^{2x} \frac{1}{f(t)}\, dt$.

8. Montrer que Φ est bien définie et dérivable sur $]0,+\infty[$, et que l'on a :

$$\forall x \in \,]0,+\infty[,\ \ \Phi'(x) = \frac{\ln(2) - \ln(x)}{(x - \ln(x))(2x - \ln(2x))}$$

Démonstration.

- La fonction $\dfrac{1}{f}$ est continue sur $]0,+\infty[$ en tant qu'inverse d'une fonction continue sur $]0,+\infty[$ qui ne s'annule pas sur cet intervalle (en effet, d'après le tableau de variations de f en question ***1.*** : $\forall x \in \,]0,+\infty[,\ f(x) \geqslant 1$).

$$\boxed{\text{La fonction } \frac{1}{f} \text{ admet donc une primitive } G \text{ de classe } \mathcal{C}^1 \text{ sur }]0,+\infty[.}$$

- On obtient alors :
$$\forall x \in \,]0,+\infty[,\ \ \Phi(x) = G(2x) - G(x)$$
Or la fonction $x \mapsto G(2x)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,+\infty[$ car elle est la composée $G \circ h$ où :
  × $h : x \mapsto 2x$ est :
    - de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,+\infty[$,
    - telle que $h(]0,+\infty[) \subset \,]0,+\infty[$.

  × G est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,+\infty[$.

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{Ainsi, } \Phi \text{ est de classe } \mathcal{C}^1 \text{ sur }]0,+\infty[\text{ (donc dérivable sur }]0,+\infty[)\\ \text{en tant que différence de fonctions de classe } \mathcal{C}^1 \text{ sur }]0,+\infty[.\end{array}}$$

- Soit $x \in \,]0,+\infty[$.

$$\begin{aligned}\Phi'(x) &= 2\,G'(2x) - G'(x) \ = \ 2\,\frac{1}{f(2x)} - \frac{1}{f(x)}\\ &= \frac{2}{2x - \ln(2x)} - \frac{1}{x - \ln(x)} \ = \ \frac{2(\cancel{x} - \ln(x)) - (\cancel{2x} - \ln(2x))}{(2x - \ln(2x))(x - \ln(x))}\\ &= \frac{-2\ln(x) + \ln(2) + \ln(x)}{(x - \ln(x))(2x - \ln(2x))} \ = \ \frac{\ln(2) - \ln(x)}{(x - \ln(x))(2x - \ln(2x))}\end{aligned}$$

$$\boxed{\forall x \in \,]0,+\infty[,\ \Phi'(x) = \frac{\ln(2) - \ln(x)}{(x - \ln(x))(2x - \ln(2x))}}$$

□

9. En déduire les variations de Φ sur $]0,+\infty[$.

Démonstration.

- Soit $x \in \,]0,+\infty[$. D'après la question précédente, on a :
$$\Phi'(x) \ = \ \frac{\ln(2) - \ln(x)}{(x - \ln(x))(2x - \ln(2x))} \ = \ \frac{\ln(2) - \ln(x)}{f(x)\, f(2x)}$$
Or, d'après la question ***1.*** : $f(x) > 0$ et $f(2x) > 0$.
La quantité $\Phi'(x)$ est donc du signe de $\ln(2) - \ln(x)$. Or :
$$\begin{aligned}\Phi'(x) > 0 \ &\Leftrightarrow \ \ln(2) - \ln(x) > 0 \ \Leftrightarrow \ \ln(2) > \ln(x)\\ &\Leftrightarrow \ 2 > x\end{aligned}$$
(car la fonction ln *est strictement croissante sur* $]0,+\infty[$*)*

On obtient le tableau de variations suivant :

x	0		2		$+\infty$
Signe de $\Phi'(x)$		$+$	0	$-$	
Variations de Φ		$\nearrow$	$\Phi(2)$	$\searrow$	

□

10. Montrer : $\forall x \in \,]0, +\infty[, \ 0 \leqslant \Phi(x) \leqslant x$.

Démonstration.
Soit $x \in \,]0, +\infty[$.

- D'après la question ***1.***, pour tout $t \in \,]0, x]$: $f(t) \geqslant 1$.
  On en déduit, par décroissance de la fonction inverse sur $]0, +\infty[$:
  $$\forall t \in \,]0, x], \ 0 \ \leqslant \ \frac{1}{f(t)} \ \leqslant \ 1$$
- Par croissance de l'intégration, les bornes étant dans l'ordre croissant ($x \leqslant 2x$ car $x \geqslant 0$) :
  $$\begin{array}{ccccc} \displaystyle\int_x^{2x} 0 \ dt & \leqslant & \displaystyle\int_x^{2x} \frac{1}{f(t)} \ dt & \leqslant & \displaystyle\int_x^{2x} 1 \ dt \\ \shortparallel & & \shortparallel & & \shortparallel \\ 0 & & \Phi(x) & & (2x - x) \times 1 \end{array}$$

$$\boxed{\text{On a bien : } \forall x \in \,]0, +\infty[, \ 0 \leqslant \Phi(x) \leqslant x.}$$

Commentaire

- Le schéma de résolution de cette question est plutôt classique.
  Afin d'encadrer une intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t) \ dt$:
  1) on cherche d'abord à encadrer l'intégrande, c'est-à- dire montrer :
  $$\forall t \in [a, b], \ m \leqslant f(t) \leqslant M$$
  où m et M sont deux réels à déterminer grâce à l'étude de la fonction f,
  2) on utilise ensuite la croissance de l'intégration (si les bornes a et b sont dans l'ordre croissant, c'est-à-dire $a \leqslant b$) pour conclure :
  $$m(b - a) = \int_a^b m \ dt \ \leqslant \ \int_a^b f(t) \ dt \ \leqslant \ \int_a^b M \ dt = M(b - a)$$
- La difficulté de la question vient du fait que l'on compare une quantité $\Phi(x)$ qui s'écrit comme une intégrale à la quantité x qui n'est pas naturellement donnée sous la forme d'une intégrale. Dès qu'il s'agit de démontrer une inégalité dans laquelle l'un des membres est une intégrale, il y a fort à parier qu'on puisse écrire l'autre membre sous forme intégrale (avec les mêmes bornes). On peut alors utiliser l'idée exposée dans le point précédent.
- L'idée à retenir est que pour comparer deux intégrales, on commence systématiquement par comparer les deux intégrandes.

□

11. ***a)*** Montrer que Φ est prolongeable par continuité en 0.
On note encore Φ la fonction ainsi prolongée. Préciser alors $\Phi(0)$.

Démonstration.
D'après la question précédente : $\forall x \in \,]0, +\infty[, \; 0 \leqslant \Phi(x) \leqslant x$.
Or :

× $\lim\limits_{x \to 0} 0 = 0$.

× $\lim\limits_{x \to 0} x = 0$.

Donc, par théorème d'encadrement : $\lim\limits_{x \to 0} \Phi(x) = 0$.

$$\boxed{\text{On en déduit que la fonction } \Phi \text{ est prolongeable par continuité et que ce prolongement, toujours noté } \Phi\text{, vérifie } \Phi(0) = 0.}$$

□

b) Montrer : $\lim\limits_{x \to 0} \Phi'(x) = 0$.
On admet que la fonction Φ est alors dérivable en 0 et que $\Phi'(0) = 0$.

Démonstration.
D'après la question ***8.*** :

$$\forall x \in \,]0, +\infty[, \;\; \Phi'(x) = \frac{2}{f(2x)} - \frac{1}{f(x)}$$

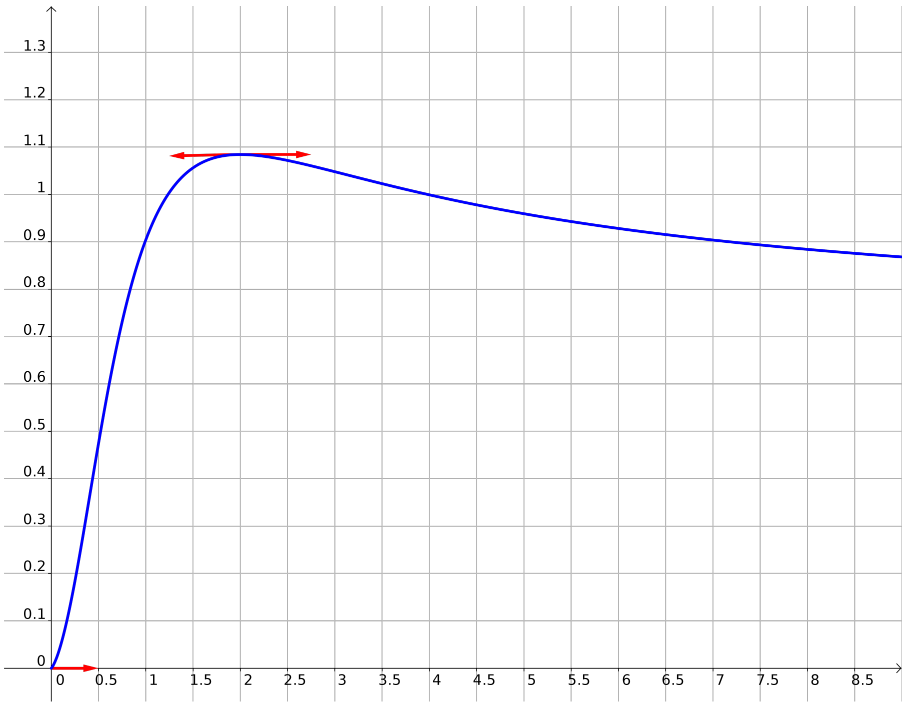
Or, d'après la question ***1.*** : $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = +\infty$.
Comme $\lim\limits_{x \to 0} 2x = 0$, par composition, on a aussi : $\lim\limits_{x \to 0} f(2x) = +\infty$.

$$\boxed{\text{Ainsi : } \lim_{x \to 0} \Phi'(x) = 0.}$$

□

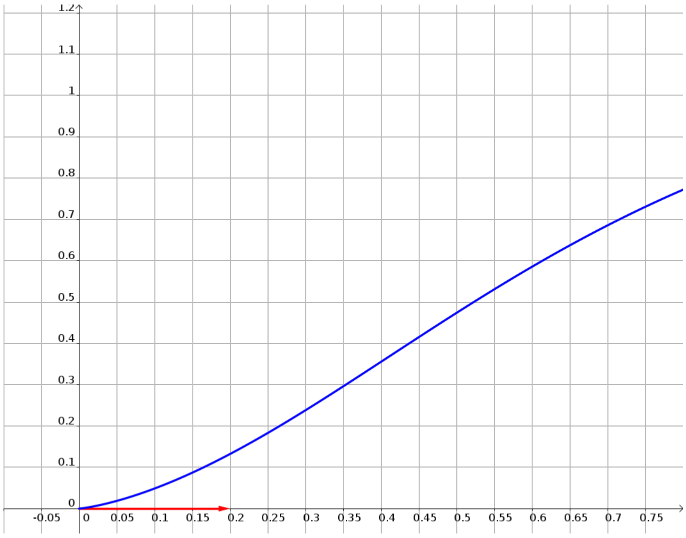
12. On donne $\Phi(2) \simeq 1,1$ et on admet que $\lim\limits_{x \to +\infty} \Phi(x) = \ln(2) \simeq 0,7$.
Tracer l'allure de la courbe représentative de la fonction Φ ainsi que la tangente à la courbe au point d'abscisse 0.

Démonstration.



Commentaire

Sur le graphe précédent, la tangente à l'origine ne semble pas être correcte.
En effet, comme son étymologie (le verbe latin « tangere ») l'indique, une tangente doit **toucher** la courbe, ce qui ne paraît pas être le cas ici. Cela est simplement dû à l'échelle de la figure : si on zoome sur l'origine du repère, on obtient le graphe suivant :



Sur une copie, il faut bien évidemment accentuer les tangentes à la courbe. □