DS1 (version B)

Exercice 1

1. On considère $\mathbb{R}^3$ muni de sa base canonique (e_1, e_2, e_3) ; soit t l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$, dont la matrice associée T relativement à cette base s'écrit :

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Calculer les valeurs propres de t.
Déterminer les sous-espaces propres de t associés, et donner une base de chacun d'entre eux.
L'endomorphisme t est-il diagonalisable ? Est-il bijectif ?

L'objet des questions suivantes est une généralisation des résultats précédents.

2. Soit n un entier de $\mathbb{N}^*$. On considère l'espace vectoriel $\mathbb{R}^{2n+1}$ muni de sa base canonique $(e_1, e_2, \cdots, e_{2n+1})$.
Soit t l'endomorphisme de $\mathbb{R}^{2n+1}$ défini par :

- pour tout entier i de $[\![1, 2n+1]\!]$, avec $i \neq n+1$: $t(e_i) = e_1$;
- $t(e_{n+1}) = e_1 + e_2 + \cdots + e_{2n+1}$.

a) Déterminer la matrice T associée à l'endomorphisme t relativement à la base $(e_1, e_2, \cdots, e_{2n+1})$.

b) Déterminer le rang de t, ainsi que la dimension du noyau de t.

c) Justifier que 0 est valeur propre de t. Déterminer la dimension du sous-espace propre associé à la valeur propre 0, ainsi qu'une base de ce sous-espace.

3. Montrer que $\mathrm{Im}(t \circ t) \subset \mathrm{Im}(t)$, où $\mathrm{Im}(u)$ désigne l'image d'un endomorphisme u de $\mathbb{R}^{2n+1}$.

4. Soit $\tilde{t}$ l'endomorphisme défini sur $\mathrm{Im}(t)$ par : pour tout x de $\mathrm{Im}(t)$, $\tilde{t}(x) = t(x)$
Établir que $\mathscr{B} = \left(e_1, \sum_{i=1}^{2n+1} e_i\right)$ constitue une base de $\mathrm{Im}(t)$. Écrire la matrice associée à $\tilde{t}$ relativement à la base $\mathscr{B}$.

5. ***a)*** Soit λ une valeur propre non nulle de t, et x un vecteur propre associé à λ. Montrer que x appartient à $\mathrm{Im}(t)$.

b) En déduire toutes les valeurs propres de t. L'endomorphisme t est-il diagonalisable ?

Exercice 2

Partie I : Étude d'une fonction définie par la somme d'une série

On s'intéresse dans cette partie, pour tout $x \in \mathbb{R}$, à la série $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} \dfrac{(-1)^{n+1}}{n^x}$.

1. Justifier que, pour tout $x \in \mathbb{R}^-$, la série $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} \dfrac{(-1)^{n+1}}{n^x}$ diverge.

2. Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. On note, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{(-1)^{k+1}}{k^x}$.

a) Montrer que les suites $(u_{2p})_{p\in\mathbb{N}^*}$ et $(u_{2p-1})_{p\in\mathbb{N}^*}$ sont adjacentes, puis en déduire qu'elles convergent vers une même limite notée $S(x)$.

b) En déduire que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que pour tout $n \geqslant n_0$, on a : $|u_n - S(x)| \leqslant \varepsilon$.

c) Justifier alors que la série $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} \dfrac{(-1)^{n+1}}{n^x}$ converge et que l'on a : $S(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^{n+1}}{n^x}$.

d) Justifier : $\forall p \in \mathbb{N}^*$, $u_{2p} \leqslant S(x) \leqslant u_{2p+1} \leqslant u_{2p-1}$.

e) En déduire : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $|S(x) - u_n| \leqslant \dfrac{1}{(n+1)^x}$.
On pourra séparer les cas n pair et n impair.

f) En déduire une fonction **Scilab** qui, étant donnés deux réels $x > 0$ et $\varepsilon > 0$, renvoie une valeur approchée de $S(x)$ à ε près.

3. Soient $x \in \mathbb{R}_+^*$ et $p \in \mathbb{N}^*$. Montrer :

$$\sum_{k=1}^{2p} \frac{(-1)^{k+1}}{k^x} = \sum_{k=1}^{p} \frac{1}{(2k-1)^x} - \frac{1}{2^x} \sum_{k=1}^{p} \frac{1}{k^x}$$

puis :

$$\sum_{k=1}^{2p} \frac{(-1)^{k+1}}{k^x} = \sum_{k=1}^{2p} \frac{1}{k^x} - \frac{1}{2^{x-1}} \sum_{k=1}^{p} \frac{1}{k^x}$$

4. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = \sum\limits_{k=1}^{2n} \dfrac{(-1)^{k+1}}{k}$.

a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer, en utilisant la question ***3.*** : $v_n = \sum\limits_{k=n+1}^{2n} \dfrac{1}{k} = \dfrac{1}{n} \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{1+\frac{k}{n}}$.

b) En déduire la convergence et la limite de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, puis la valeur de $S(1)$.

5. On admet que $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n^2} = \dfrac{\pi^2}{6}$. Déterminer la valeur de $S(2)$.

Partie II : Étude d'une fonction définie par une intégrale

On rappelle que la fonction Γ est définie sur $]0;+\infty[$ par : $\forall x \in]0;+\infty[$, $\Gamma(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\,dt$.
On rappelle également l'égalité suivante : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\Gamma(n) = (n-1)!$

6. Soit $x \in \mathbb{R}$. Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t^x}{1+\mathrm{e}^t}\,dt$ converge si et seulement si $x > -1$.

On pose, pour tout réel x de $]-1;+\infty[$, $I(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t^x}{1+\mathrm{e}^t}\,dt$.

7. Soit $x \in]-1;+\infty[$. On définit la fonction $g_x :]0;+\infty[$, $t \mapsto \dfrac{t^x}{1+\mathrm{e}^t}$.

a) Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall t \in \mathbb{R}_+^*$, $g_x(t) = (-1)^n\, g_x(t)\,\mathrm{e}^{-nt} + \displaystyle\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1}\, t^x\,\mathrm{e}^{-kt}$.

b) Justifier, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^x\,\mathrm{e}^{-kt}\,dt$ converge et que l'on a :

$$\int_0^{+\infty} t^x\,\mathrm{e}^{-kt}\,dt = \frac{1}{k^{x+1}}\,\Gamma(x+1)$$

c) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} g_x(t)\,\mathrm{e}^{-nt}\,dt$ converge, puis que la limite de $\displaystyle\int_0^{+\infty} g_x(t)\,\mathrm{e}^{-nt}\,dt$, lorsque l'entier n tend vers $+\infty$, est égale à 0.

d) En déduire la relation : $I(x) = S(x+1)\,\Gamma(x+1)$, où la fonction S a été définie dans la Partie **I**.

8. En utilisant la Partie **I.**, déterminer la valeur de $I(1)$.

Exercice 3

Dans tout cet exercice, f désigne la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par :

$$\forall x \in]0,+\infty[,\ f(x) = x - \ln(x)$$

Partie I : Étude de la fonction f

1. Dresser le tableau de variations de f en précisant ses limites en 0 et en $+\infty$.

2. Montrer que l'équation $f(x) = 2$, d'inconnue $x \in]0,+\infty[$, admet exactement deux solutions, que l'on note a et b, telles que $0 < a < 1 < b$.

3. Montrer : $b \in [2,4]$. On donne : $\ln(2) \simeq 0,7$.

Partie II : Étude d'une suite

On pose : $u_0 = 4$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \ln(u_n) + 2$.

4. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie et que l'on a : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \in [b,+\infty[$.

5. Déterminer la monotonie de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. En déduire qu'elle converge et préciser sa limite.

6. ***a)*** Montrer : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} - b \leqslant \dfrac{1}{2}(u_n - b)$.

b) En déduire : $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant u_n - b \leqslant \dfrac{1}{2^{n-1}}$.

7. ***a)*** Écrire une fonction **Scilab** d'en-tête `function u = suite(n)` qui, prenant en argument un entier n de $\mathbb{N}$, renvoie la valeur de u_n.

b) Recopier et compléter la ligne 3 de la fonction **Scilab** suivante afin que, prenant en argument un réel `epsilon` strictement positif, elle renvoie une valeur approchée de b à `epsilon` près.

```
1 function b = valeur_approchee(epsilon)
2     n = 0
3     while ...........
4         n = n + 1
5     end
6     b = suite(n)
7 endfunction
```

Partie III : Étude d'une fonction définie par une intégrale

On note Φ la fonction donnée par :

$$\Phi(x) = \int_{x}^{2x} \frac{1}{f(t)} \, dt$$

8. Montrer que Φ est bien définie et dérivable sur $]0, +\infty[$, et que l'on a :

$$\forall x \in \,]0, +\infty[, \; \Phi'(x) = \frac{\ln(2) - \ln(x)}{(x - \ln(x))(2x - \ln(2x))}$$

9. En déduire les variations de Φ sur $]0, +\infty[$.

10. Montrer : $\forall x \in \,]0, +\infty[, \; 0 \leqslant \Phi(x) \leqslant x$.

11. ***a)*** Montrer que Φ est prolongeable par continuité en 0.
On note encore Φ la fonction ainsi prolongée. Préciser alors $\Phi(0)$.

b) Montrer : $\lim\limits_{x \to 0} \Phi'(x) = 0$.
On admet que la fonction Φ est alors dérivable en 0 et que $\Phi'(0) = 0$.

12. On donne $\Phi(2) \simeq 1,\,1$ et on admet que $\lim\limits_{x \to +\infty} \Phi(x) = \ln(2) \simeq 0,\,7$.
Tracer l'allure de la courbe représentative de la fonction Φ ainsi que la tangente à la courbe au point d'abscisse 0.