
DS1 (version B) / 156

Exercice 1 /36

1. On considère \mathbb{R}^3 muni de sa base canonique (e_1, e_2, e_3) ; soit t l'endomorphisme de \mathbb{R}^3 , dont la matrice associée T relativement à cette base s'écrit :

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Calculer les valeurs propres de t .

Déterminer les sous-espaces propres de t associés, et donner une base de chacun d'entre eux.

L'endomorphisme t est-il diagonalisable? Est-il bijectif?

L'objet des questions suivantes est une généralisation des résultats précédents.

- **2 pts** : calcul du rang de T
- **1 pt** : en déduire $\text{Sp}(t)$
- **3 pts** : $E_0(t)$ (**1 pt pour l'écriture du système / 1 pt pour la résolution / 1 pt pour $\text{Ker}(t)$**)
- **1 pt** : $\dim(E_0(t)) = 1$
- **2 pts** : $E_1(t)$ et $\dim(E_0(t)) = 1$ (**on accepte « comme précédemment »**)
- **1 pt** : t non diagonalisable
- **1 pt** : t non bijectif

2. Soit n un entier de \mathbb{N}^* . On considère l'espace vectoriel \mathbb{R}^{2n+1} muni de sa base canonique $(e_1, e_2, \dots, e_{2n+1})$. Soit t l'endomorphisme de \mathbb{R}^{2n+1} défini par :

- pour tout entier i de $[[1, 2n + 1]]$, avec $i \neq n + 1$: $t(e_i) = e_1$;
- $t(e_{n+1}) = e_1 + e_2 + \dots + e_{2n+1}$.

a) Déterminer la matrice T associée à l'endomorphisme t relativement à la base $(e_1, e_2, \dots, e_{2n+1})$.

- **2 pts**

b) Déterminer le rang de t , ainsi que la dimension du noyau de t .

- **2 pts** : $\text{rg}(t) = 2$

- **1 pt** : expression théorème du rang

- **1 pt** : $\dim(\text{Ker}(t)) = 2n - 1$

c) Justifier que 0 est valeur propre de t . Déterminer la dimension du sous-espace propre associé à la valeur propre 0, ainsi qu'une base de ce sous-espace.

- **1 pt** : 0 est valeur propre de t et $\dim(\text{Ker}(t)) = 2n - 1$

- **1 pt** : introduction d'une famille \mathcal{E}

- **2 pts** : \mathcal{E} est libre

- **1 pt** : \mathcal{E} est une base de $\text{Ker}(t)$ ($\text{Card}(\mathcal{E}) = 2n - 1 = \dim(\text{Ker}(t))$)

3. Montrer que $\text{Im}(t \circ t) \subset \text{Im}(t)$, où $\text{Im}(u)$ désigne l'image d'un endomorphisme u de \mathbb{R}^{2n+1} .

- 2 pts

4. Soit \tilde{t} l'endomorphisme défini sur $\text{Im}(t)$ par : pour tout x de $\text{Im}(t)$, $\tilde{t}(x) = t(x)$

Établir que $\mathcal{B} = \left(e_1, \sum_{i=1}^{2n+1} e_i \right)$ constitue une base de $\text{Im}(t)$. Écrire la matrice associée à \tilde{t} relativement à la base \mathcal{B} .

- 1 pt : e_1 et $\sum_{i=1}^{2n+1} e_i$ sont des éléments de $\text{Im}(t)$

- 1 pt : \mathcal{B} est libre

- 1 pt : \mathcal{B} est une base de $\text{Im}(t)$ ($\text{Card}(\mathcal{B}) = 2 = \dim(\text{Im}(t))$)

- 2 pts : $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(\tilde{t}) = \begin{pmatrix} 1 & 2n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ (1 pt pour chaque colonne)

5. a) Soit λ une valeur propre non nulle de t , et x un vecteur propre associé à λ . Montrer que x appartient à $\text{Im}(t)$.

- 2 pts

b) En déduire toutes les valeurs propres de t . L'endomorphisme t est-il diagonalisable ?

- 0 pt : 0 est valeur propre de t

- 1 pt : toute valeur propre non nulle de t est valeur propre de \tilde{t}

- 1 pt : 1 est la seule valeur propre non nulle possible de t (car seule valeur propre de \tilde{t})

- 1 pt : $E_1(\tilde{t}) = E_1(t)$

- 1 pt : $\dim(E_1(\tilde{t})) = 1$ (car sinon N serait scalaire)

- 1 pt : t n'est pas diagonalisable

Exercice 2 /70

Partie I : Étude d'une fonction définie par la somme d'une série /43

On s'intéresse dans cette partie, pour tout $x \in \mathbb{R}$, à la série $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{(-1)^{n+1}}{n^x}$.

1. Justifier que, pour tout $x \in \mathbb{R}^-$, la série $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{(-1)^{n+1}}{n^x}$ diverge.

- 1 pt : pour penser à la disjonction de cas (bonus)
- 1 pt : cas $x = 0$
- 1 pt : cas $x < 0$ ($\sum u_n$ (grossièrement) divergente)

2. Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. On note, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k+1}}{k^x}$.

a) Montrer que les suites $(u_{2p})_{p \in \mathbb{N}^*}$ et $(u_{2p-1})_{p \in \mathbb{N}^*}$ sont adjacentes, puis en déduire qu'elles convergent vers une même limite notée $S(x)$.

- 1 pt : $u_{2(p+1)} - u_{2p} = \frac{1}{(2p+1)^x} - \frac{1}{(2p+2)^x}$

- 1 pt : $u_{2(p+1)} - u_{2p} \geq 0$

- 1 pt : $u_{2(p+1)-1} - u_{2p-1} = -\frac{1}{(2p)^x} + \frac{1}{(2p+1)^x}$

- 1 pt : $u_{2(p+1)-1} - u_{2p-1} \leq 0$

- 1 pt : $u_{2p} - u_{2p-1} = -\frac{1}{(2p)^x} \xrightarrow{p \rightarrow +\infty} 0$

- 1 pt : conclusion

b) En déduire que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que pour tout $n \geq n_0$, on a : $|u_n - S(x)| \leq \varepsilon$.

- 3 pts : théorème de recouvrement

c) Justifier alors que la série $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{(-1)^{n+1}}{n^x}$ converge et que l'on a : $S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^x}$.

- 1 pt : la suite (u_n) est la suite des sommes partielles de la série $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{1+n}}{n^x}$.

d) Justifier : $\forall p \in \mathbb{N}^*, u_{2p} \leq S(x) \leq u_{2p+1} \leq u_{2p-1}$.

- 1 pt : $\forall p \in \mathbb{N}^*, \forall n \in \mathbb{N}, u_{2p} \leq u_{2(p+n)}$ car (u_{2p}) est croissante

- 1 pt : par passage à la limite $\forall p \in \mathbb{N}^*, u_{2p} \leq S(x)$

- 1 pt : de même $\forall p \in \mathbb{N}^*, S(x) \leq u_{2p+1}$

- 1 pt : $u_{2p+1} = u_{2(p+1)-1} \leq u_{2p-1}$ car (u_{2p-1}) est décroissante

e) En déduire : $\forall n \in \mathbb{N}^*, |S(x) - u_n| \leq \frac{1}{(n+1)^x}$.

On pourra séparer les cas n pair et n impair.

- 1 pt : écriture $n = 2p$

- 1 pt : $0 \leq S(x) - u_{2p} \leq u_{2p+1} - u_{2p}$

- 1 pt : $u_{2p+1} - u_{2p} = \frac{(-1)^{(2p+1)+1}}{(2p+1)^x} = \frac{1}{(2p+1)^x} = \frac{1}{(n+1)^x}$

- 0 pt : écriture $n = 2p - 1$

- 1 pt : $u_{2p} - u_{2p-1} \leq S(x) - u_{2p-1} \leq 0$

- 1 pt : $u_{2p} - u_{2p-1} = \frac{(-1)^{(2p)+1}}{(2p)^x} = -\frac{1}{(2p)^x} = -\frac{1}{(n+1)^x}$

f) En déduire une fonction **Scilab** qui, étant donnés deux réels $x > 0$ et $\varepsilon > 0$, renvoie une valeur approchée de $S(x)$ à ε près.

- 1 pt : u_{n_0} valeur approchée de $S(x)$ à ε signifie : $|S(x) - u_{n_0}| \leq \varepsilon$

- 1 pt : $|S(x) - u_{n_0}| \leq \frac{1}{(n_0 + 1)^x} \leq \varepsilon$

- 1 pt : raisonnement par équivalence $n_0 = \left\lceil \left[\left(\frac{1}{\varepsilon} \right)^{\frac{1}{x}} - 1 \right] \right\rceil$

- 4 pts : 1 pt structure fonction, 1 pt $n = \text{ceil}((1 / \text{epsilon}) ^ (1 / x) - 1)$, 2 pts boucle for

3. Soient $x \in \mathbb{R}_+^*$ et $p \in \mathbb{N}^*$. Montrer : $\sum_{k=1}^{2p} \frac{(-1)^{k+1}}{k^x} = \sum_{k=1}^p \frac{1}{(2k-1)^x} - \frac{1}{2^x} \sum_{k=1}^p \frac{1}{k^x}$ puis :

$$\sum_{k=1}^{2p} \frac{(-1)^{k+1}}{k^x} = \sum_{k=1}^{2p} \frac{1}{k^x} - \frac{1}{2^{x-1}} \sum_{k=1}^p \frac{1}{k^x}$$

- 1 pt : $\sum_{k=1}^{2p} \frac{(-1)^{k+1}}{k^x} = \sum_{\substack{k \in \llbracket 1, 2p \rrbracket \\ k \text{ pair}}} \frac{(-1)^{k+1}}{k^x} + \sum_{\substack{k \in \llbracket 1, 2p \rrbracket \\ k \text{ impair}}} \frac{(-1)^{k+1}}{k^x}$

- 1 pt : $\sum_{k=1}^{2p} \frac{(-1)^{k+1}}{k^x} = -\frac{1}{2^x} \sum_{k=1}^p \frac{1}{k^x} + \sum_{k=1}^p \frac{1}{(2k-1)^x}$

- 1 pt : $\sum_{k=1}^{2p} \frac{(-1)^{k+1} - 1}{k^x} = \sum_{\substack{k \in \llbracket 1, 2p \rrbracket \\ k \text{ pair}}} \frac{(-1)^{k+1} - 1}{k^x} + \sum_{\substack{k \in \llbracket 1, 2p \rrbracket \\ k \text{ impair}}} \frac{(-1)^{k+1} - 1}{k^x}$

- 1 pt : $\sum_{k=1}^{2p} \frac{(-1)^{k+1} - 1}{k^x} = -\frac{1}{2^{x-1}} \sum_{k=1}^p \frac{1}{k^x}$

- 1 pt : pour toute tentative de séparation pair / impair même infructueuse (bonus pour ceux qui ont réussi)

4. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$.

a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer, en utilisant la question 3. : $v_n = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{1 + \frac{k}{n}}$.

- 1 pt : en appliquant l'égalité de la question précédente pour $x = 1$ et $p = n$,

$$v_n = \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k}$$

- 1 pt : $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{1 + \frac{k}{n}} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{n+k}$

- 1 pt : $\sum_{k=1}^n \frac{1}{n+k} = \sum_{j=n+1}^{2n} \frac{1}{j}$

b) En déduire la convergence et la limite de la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$, puis la valeur de $S(1)$.

- 1 pt : reconnaître une somme de Riemann $v_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right)$

- 1 pt : convergence de la somme $v_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 f(x) dx$

- 1 pt : calcul $\int_0^1 f(x) dx = \ln(2)$

- 1 pt : $S(1) = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \ln(2)$

5. On admet que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$. Déterminer la valeur de $S(2)$.

- 1 pt : on applique l'égalité de la question 3. avec les paramètres $x = 2$ et $p = n$

$$\sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k+1}}{k^2} = \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k^2} - \frac{1}{2^{2-1}} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}$$

- 1 pt : passage à la limite

Partie II : Étude d'une fonction définie par une intégrale /27

On rappelle que la fonction Γ est définie sur $]0; +\infty[$ par : $\forall x \in]0; +\infty[, \Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$.

On rappelle également l'égalité suivante : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \Gamma(n) = (n-1)!$.

6. Soit $x \in \mathbb{R}$. Montrer que l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{t^x}{1+e^t} dt$ converge si et seulement si $x > -1$.

On pose, pour tout réel x de $] -1; +\infty[, I(x) = \int_0^{+\infty} \frac{t^x}{1+e^t} dt$.

- 1 pt : $f : t \mapsto \frac{t^x}{1+e^t}$ est continue sur $]0, +\infty[$

- 1 pt : découpage en deux intégrales (convergence si et seulement si il y a convergence des deux intégrales)

- 3 pts : convergence sur $]0, 1]$ (≥ 0 , \sim , intégrale de Riemann d'exposant -1)

- 3 pts : convergence sur $[1, +\infty[$ (≥ 0 , o , intégrale de Riemann d'exposant 2)

7. Soit $x \in] -1; +\infty[$. On définit la fonction $g_x :]0; +\infty[, t \mapsto \frac{t^x}{1+e^t}$.

a) Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall t \in \mathbb{R}_+, g_x(t) = (-1)^n g_x(t) e^{-nt} + \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} t^x e^{-kt}$.

- 1 pt : somme géométrique

- 1 pt : formule valable car $-e^{-t} \neq 1$

- 1 pt : calcul

b) Justifier, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, que l'intégrale $\int_0^{+\infty} t^x e^{-kt} dt$ converge et que l'on a :

$$\int_0^{+\infty} t^x e^{-kt} dt = \frac{1}{k^{x+1}} \Gamma(x+1)$$

- 3 pts : changement de variable (poser $u = kt$ / changement de variable valide car φ de classe \mathcal{C}^1 / calcul)

- 1 pt : conclusion

c) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'intégrale $\int_0^{+\infty} g_x(t) e^{-nt} dt$ converge, puis que la limite de

$\int_0^{+\infty} g_x(t) e^{-nt} dt$, lorsque l'entier n tend vers $+\infty$, est égale à 0.

- 3 pts : critère de comparaison (inégalité)

- 2 pts : encadrement / croissance de l'intégration

- 1 pt : conclusion (limite nulle)

d) En déduire la relation : $I(x) = S(x+1)\Gamma(x+1)$, où la fonction S a été définie dans la Partie I.

- 1 pt : intégration de part et d'autre de l'égalité

- 1 pt : $(-1)^n \int_0^{+\infty} g_x(t) e^{-nt} dt \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$

- 1 pt : série $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{(-1)^{n+1}}{n^{x+1}}$ converge car $x+1 > 0$

- 1 pt : passage à la limite

8. En utilisant la Partie I., déterminer la valeur de $I(1)$.

- 1 pt : utilisation possible du résultat précédent car $x = 1 \in]-1, +\infty[$

- 1 pt : conclusion $I(1) = \frac{\pi^2}{12}$

Exercice 3 /50

Dans tout cet exercice, f désigne la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par :

$$\forall x \in]0, +\infty[, f(x) = x - \ln(x)$$

Partie I : Étude de la fonction f /11

1. Dresser le tableau de variations de f en précisant ses limites en 0 et en $+\infty$.

- 1 pt : f dérivable sur $]0, +\infty[$ et $f'(x) = \frac{x-1}{x}$

- 1 pt : signe de $f'(x)$

- 1 pt : $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty$

- 1 pt : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

2. Montrer que l'équation $f(x) = 2$, d'inconnue $x \in]0, +\infty[$, admet exactement deux solutions, que l'on note a et b , telles que $0 < a < 1 < b$.

- 3 pts : théorème de la bijection sur $]0, 1[$ (1 pt hypothèses, 1 pt $f(]0, 1[) =]1, +\infty[$, 1 pt $2 \in]1, +\infty[$)

- 1 pt : théorème de la bijection sur $]1, +\infty[$

3. Montrer : $b \in [2, 4]$. On donne : $\ln(2) \simeq 0,7$.

- 1 pt : $f(2) \leq 2$

- 1 pt : $f(4) \geq 2$

- 1 pt : restriction de f à $]1, +\infty[$ strictement croissante sur $]1, +\infty[$

Partie II : Étude d'une suite /25

On pose : $u_0 = 4$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \ln(u_n) + 2$.

4. Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bien définie et que l'on a : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in [b, +\infty[$.

- 1 pt : initialisation
- 2 pts : hérédité

5. Déterminer la monotonie de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$. En déduire qu'elle converge et préciser sa limite.

- 1 pt : $u_{n+1} - u_n = f(b) - f(u_n)$
- 1 pt : $f(u_n) \geq f(b)$ par croissance de f sur $[b, +\infty[$
- 1 pt : théorème de convergence monotone
- 1 pt : passage à la limite pour obtenir $\ell = \ln(\ell) + 2$
- 1 pt : $\ell = b$

6. a) Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - b \leq \frac{1}{2}(u_n - b)$.

- 4 pts : IAF (2 pts hypothèses, 1 pt IAF, 1 pt $(u_n, b) \in [b, +\infty[^2$)

b) En déduire : $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq u_n - b \leq \frac{1}{2^{n-1}}$.

- 1 pt : $u_n - b \geq 0$
- 1 pt : initialisation
- 2 pts : hérédité

7. a) Écrire une fonction **Scilab** d'en-tête `function u = suite(n)` qui, prenant en argument un entier n de \mathbb{N} , renvoie la valeur de u_n .

- 4 pts : 1 pt structure function, 1 pt initialisation, 2 pts boucle for

b) Recopier et compléter la ligne 3 de la fonction **Scilab** suivante afin que, prenant en argument un réel `epsilon` strictement positif, elle renvoie une valeur approchée de b à `epsilon` près.

```
1  function b = valeur_approchee(epsilon)
2      n = 0
3      while .....
4          n = n + 1
5      end
6      b = suite(n)
7  endfunction
```

- 5 pts : 2 pts while $1/2^{(n-1)} > \text{epsilon}$, 3 pt explication

Partie III : Étude d'une fonction définie par une intégrale /14

On note Φ la fonction donnée par :

$$\Phi(x) = \int_x^{2x} \frac{1}{f(t)} dt$$

8. Montrer que Φ est bien définie et dérivable sur $]0, +\infty[$, et que l'on a :

$$\forall x \in]0, +\infty[, \Phi'(x) = \frac{\ln(2) - \ln(x)}{(x - \ln(x))(2x - \ln(2x))}$$

- 1 pt : $\frac{1}{f}$ admet une primitive G de classe \mathcal{C}^1 sur $]0, +\infty[$

- 1 pt : Φ de classe \mathcal{C}^1 sur $]0, +\infty[$ (par composition)

- 1 pt : $\Phi'(x) = \frac{\ln(2) - \ln(x)}{(x - \ln(x))(2x - \ln(2x))}$

9. En déduire les variations de Φ sur $]0, +\infty[$.

- 2 pts : signe de $\Phi'(x)$ et variations de Φ

10. Montrer : $\forall x \in]0, +\infty[, 0 \leq \Phi(x) \leq x$.

- 1 pt : $0 \leq \frac{1}{f(t)} \leq 1$ par décroissance de la fonction inverse sur $]0, +\infty[$

- 1 pt : croissance de l'intégrale, les bornes étant dans l'ordre croissant

- 1 pt : $0 \leq \Phi(x) \leq x$

11. a) Montrer que Φ est prolongeable par continuité en 0.

On note encore Φ la fonction ainsi prolongée. Préciser alors $\Phi(0)$.

- 1 pt : théorème d'encadrement

b) Montrer : $\lim_{x \rightarrow 0} \Phi'(x) = 0$.

On admet que la fonction Φ est alors dérivable en 0 et que $\Phi'(0) = 0$.

- 1 pt

12. On donne $\Phi(2) \simeq 1,1$ et on admet que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \Phi(x) = \ln(2) \simeq 0,7$.

Tracer l'allure de la courbe représentative de la fonction Φ ainsi que la tangente à la courbe au point d'abscisse 0.

- 4 pts : 1 pt tangente en 0, 1 pt tangente en 2, 1 pt cohérence courbe Φ , 1 pt propriété