DS1 (version B)

Exercice 1 (HEC 2007)

1. On considère $\mathbb{R}^3$ muni de sa base canonique (e_1, e_2, e_3) ; soit t l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$, dont la matrice associée T relativement à cette base s'écrit :

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Calculer les valeurs propres de t.
Déterminer les sous-espaces propres de t associés, et donner une base de chacun d'entre eux.
L'endomorphisme t est-il diagonalisable ? Est-il bijectif ?

L'objet des questions suivantes est une généralisation des résultats précédents.

Démonstration.

- Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Rappelons :

$$\begin{array}{rcl} \lambda \text{ est valeur propre de } T & \Leftrightarrow & T - \lambda I_3 \text{ n'est pas inversible} \\ & \Leftrightarrow & \text{l'un (au moins) des coefficients diagonaux de la réduite} \\ & & (\textbf{triangulaire supérieure}) \text{ de } T - \lambda I_3 \text{ est nul} \end{array}$$

- Or :

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{rg}(T - \lambda I) & = & \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 & 1 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda \end{pmatrix}\right) \\ & \overset{L_3 \leftrightarrow L_2}{=} & \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -\lambda \\ 0 & 1-\lambda & 0 \end{pmatrix}\right) \\ & \overset{L_3 \leftarrow L_3 - (1-\lambda)\, L_2}{=} & \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -\lambda \\ 0 & 0 & \lambda\,(1-\lambda) \end{pmatrix}\right) \end{array}$$

- On en déduit :

$$\begin{array}{rcl} \lambda \text{ valeur propre de } T & \Leftrightarrow & 1-\lambda = 0 \ \texttt{OU} \ 1 = 0 \ \texttt{OU} \ \lambda\,(1-\lambda) = 0 \\ & \Leftrightarrow & \lambda = 0 \ \texttt{OU} \ \lambda = 1 \end{array}$$

$$\boxed{\text{Ainsi : } \mathrm{Sp}(t) = \mathrm{Sp}(T) = \{0, 1\}.}$$

Commentaire

La matrice T est non inversible (puisque $C_1 = C_3$).
On pouvait donc conclure de suite que 0 est une valeur propre de T.

- Déterminons alors $E_0(t) = \text{Ker}(t)$.

  Soit $u = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. On note $\mathscr{B} = (e_1,e_2,e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et $U = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \text{Mat}_{\mathscr{B}}(u)$.

$$\begin{array}{rcl}
u \in \text{Ker}(t) & \Longleftrightarrow & t(u) = 0_{\mathbb{R}^3} \\
& \Longleftrightarrow & TU = 0_{\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})} \\
& \Longleftrightarrow & \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & + & z & = & 0 \\ & & y & & & = & 0 \\ & & y & & & = & 0 \end{array} \right. \\
& \overset{L_3 \leftarrow L_3 - L_2}{\Longleftrightarrow} & \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & + & z & = & 0 \\ & & y & & & = & 0 \\ & & & & 0 & = & 0 \end{array} \right. \\
& \Longleftrightarrow & \left\{ \begin{array}{rcrcr} x & + & y & = & -z \\ & & y & = & 0 \end{array} \right. \\
& \overset{L_1 \leftarrow L_1 - L_2}{\Longleftrightarrow} & \left\{ \begin{array}{rcrcr} x & & & = & -z \\ & & y & = & 0 \end{array} \right.
\end{array}$$

  On en déduit :

$$\begin{array}{rcl}
\text{Ker}(t) & = & \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid t(u) = 0_{\mathbb{R}^3}\} \\
& = & \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = -z \ \texttt{ ET } \ y = 0\} \\
& = & \{(-z,0,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = -z \ \texttt{ ET } \ y = 0\} \\
& = & \{z \cdot (-1,0,1) \in \mathbb{R}^3 \mid x = -z \ \texttt{ ET } \ y = 0\} \ = \ \text{Vect}\left((-1,0,1)\right)
\end{array}$$

$$\boxed{E_0(t) = \text{Ker}(t) = \text{Vect}\left((-1,0,1)\right)}$$

  La famille $\big((-1,0,1)\big)$ est :
  $\times$ génératrice de $E_0(t)$ d'après ce qui précède,
  $\times$ libre car constituée d'un vecteur non nul.
  C'est donc une base de $E_0(t)$.

$$\boxed{\dim\big(E_0(t)\big) = 1}$$

- Déterminons enfin $E_1(t) = \text{Ker}(t - \text{id}_{\mathbb{R}^3})$.

  Soit $u = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. On note $\mathscr{B} = (e_1,e_2,e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et $U = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \text{Mat}_{\mathscr{B}}(u)$.

$$\begin{array}{rcl}
u \in \text{Ker}(t - \text{id}) & \Longleftrightarrow & (t - \text{id})(u) = 0_{\mathbb{R}^3} \\
& \Longleftrightarrow & (T - I_3)\ U = 0_{\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})} \\
& \Longleftrightarrow & \left\{ \begin{array}{rcrcl} y & + & z & = & 0 \\ & & 0 & = & 0 \\ y & - & z & = & 0 \end{array} \right. \\
& \overset{L_3 \leftarrow L_3 - L_1}{\Longleftrightarrow} & \left\{ \begin{array}{rcrcl} y & + & z & = & 0 \\ & - & 2z & = & 0 \end{array} \right. \\
& \Longleftrightarrow & \left\{ \ y = z = 0 \right. \\
& & \textit{(par remontées successives)}
\end{array}$$

On en déduit :

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{Ker}(t-\mathrm{id}) & = & \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid (t-\mathrm{id})(u)=0_{\mathbb{R}^3}\} \\ & = & \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid y=z=0\} \\ & = & \{(x,0,0)\in\mathbb{R}^3 \mid y=z=0\} \\ & = & \{x\cdot(1,0,0) \mid x\in\mathbb{R}\} \ = \ \mathrm{Vect}\left((1,0,0)\right) \end{array}$$

$$\boxed{\mathrm{Ker}(t-\mathrm{id}) = \mathrm{Vect}\left((1,0,0)\right)}$$

La famille $\big((1,0,0)\big)$ est :

× génératrice de $E_1(t)$ d'après ce qui précède,

× libre car constituée d'un vecteur non nul.

C'est donc une base de $E_1(t)$.

$$\boxed{\dim\big(E_1(t)\big)=1}$$

Commentaire

- Il faut s'habituer à déterminer les espaces propres par lecture de la matrice $T-\lambda\, I$.
- Illustrons la méthode avec la matrice de l'exercice et $\lambda=0$.
  On cherche les vecteurs $U=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in E_0(T)$ c'est-à-dire les vecteurs tels que : $TU=0$. Or :

$$\begin{array}{rcl} \begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&0\\0&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} & = & x\cdot C_1+y\cdot C_2+z\cdot C_3 \\ & = & x\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+y\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}+z\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \end{array}$$

  Pour obtenir le vecteur $\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$ l'aide de cette combinaison linéaire, on doit forcément choisir $y=0$ (sinon on ne peut annuler les coefficients en $2^{\text{ème}}$ et $3^{\text{ème}}$ position).
  Il reste alors une contrainte : $x=-y$. En prenant par exemple $y=1$, on obtient :

$$E_0(T) \ = \ \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}\right)$$

- On peut procéder de même pour $E_1(T)$.
  On cherche les vecteurs $U=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ tels que : $(T-I_3)\,U=0$. Or :

$$\begin{pmatrix}0&1&1\\0&0&0\\0&1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \ = \ x\cdot C_1+y\cdot C_2+z\cdot C_3$$

  Pour obtenir le vecteur nul à l'aide de cette combinaison linéaire, on doit forcément choisir $y=z$ (sinon on ne peut annuler le coefficient en $3^{\text{ème}}$ position) puis $y=z=0$ (sinon on obtient un coefficient non nul en $1^{\text{ère}}$ position.
  Il reste alors une variable libre x. En prenant $x=1$, on obtient :

$$E_1(T) \ = \ \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right)$$

- L'endomorphisme t opère sur $\mathbb{R}^3$, espace de dimension 3.
  Or d'après ce qui précède :
$$\dim\big(E_0(t)\big) + \dim\big(E_1(t)\big) = 1 + 1 = 2 \neq 3$$
$$\boxed{\text{On en déduit que l'endomorphisme } t \text{ n'est pas diagonalisable.}}$$
- D'autre part, on a démontré que 0 est valeur propre de t *(et ainsi* $\mathrm{Ker}(t) \neq \{0_{\mathbb{R}^3}\}$*)*.
$$\boxed{\text{On en déduit que l'endomorphisme n'est pas bijectif.}}$$
□

2. Soit n un entier de $\mathbb{N}^*$. On considère l'espace vectoriel $\mathbb{R}^{2n+1}$ muni de sa base canonique $(e_1, e_2, \cdots, e_{2n+1})$.
Soit t l'endomorphisme de $\mathbb{R}^{2n+1}$ défini par :
× pour tout entier i de $[\![1, 2n+1]\!]$, avec $i \neq n+1$: $t(e_i) = e_1$;
× $t(e_{n+1}) = e_1 + e_2 + \cdots + e_{2n+1}$.

a) Déterminer la matrice T associée à l'endomorphisme t relativement à la base $(e_1, e_2, \cdots, e_{2n+1})$.

Démonstration.
Notons $\mathscr{B}_c = (e_1, e_2, \cdots, e_{2n+1})$ la base canonique de $\mathbb{R}^{2n+1}$.
Par définition :

× pour tout $i \in [\![1, 2n+1]\!]$, avec $i \neq n+1$: $t(e_i) = e_1$. Ainsi : $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_c}\big(t(e_i)\big) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$.

× $t(e_{n+1}) = e_1 + e_2 + \cdots + e_{2n+1}$. Ainsi : $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_c}\big(t(e_{n+1})\big) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$.

On en déduit que la matrice T associée à t relativement à $\mathscr{B}_c$ est :
$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_c}\big(t\big) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
$$\boxed{\text{La matrice } T \text{ associée à } t \text{ relativement à } \mathscr{B}_c \text{ est en forme de } T.}$$
□

b) Déterminer le rang de t, ainsi que la dimension du noyau de t.

Démonstration.
- Tout d'abord :
$$\begin{array}{rcl} \mathrm{rg}(T) & = & \dim\Big(\mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}\right)\Big) \\ & = & \dim\Big(\mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}\right)\Big) \ = \ 2 \end{array}$$

En effet, la famille $\mathcal{F} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ est :

× génératrice de $\mathrm{Vect}(\mathcal{F})$,

× libre car constituée de deux vecteurs non colinéaires.

Ainsi, $\mathcal{F}$ est une base de $\mathrm{Vect}(\mathcal{F})$ et : $\dim\big(\mathrm{Vect}(\mathcal{F})\big) = 2$.

$$\boxed{\mathrm{rg}(t) = \mathrm{rg}(T) = 2}$$

- D'après le théorème du rang :

$$\begin{array}{ccccc} \dim\big(\mathrm{Ker}(t)\big) & + & \dim\big(\mathrm{Im}(t)\big) & = & \dim\big(\mathbb{R}^{2n+1}\big) \\ & & \shortparallel & & \shortparallel \\ & & 2 & & 2n+1 \end{array}$$

$$\boxed{\text{On en déduit : } \dim\big(\mathrm{Ker}(t)\big) = (2n+1) - 2 = 2n-1.}$$ □

c) Justifier que 0 est valeur propre de t. Déterminer la dimension du sous-espace propre associé à la valeur propre 0, ainsi qu'une base de ce sous-espace.

Démonstration.

- D'après la question précédente, $\mathrm{Ker}(t) \neq \{0_{\mathbb{R}^{2n+1}}\}$.
  On en déduit que 0 est valeur propre de t d'espace propre associé $E_0(t) = \mathrm{Ker}(t)$.

$$\boxed{\text{D'après la question précédente : } \dim\big(E_0(t)\big) = \dim\big(\mathrm{Ker}(t)\big) = 2n-1.}$$

- Par définition de l'endomorphisme t :

  × pour tout $i \in [\![2, n]\!]$: $t(e_i) = e_1$. On en déduit, pour tout $i \in [\![2, n]\!]$:

$$t(e_1 - e_i) = t(e_1) - t(e_i) = e_1 - e_1 = 0_{\mathbb{R}^{2n+1}}$$

$$\boxed{\text{Pour tout } i \in [\![2, n]\!],\ e_1 - e_i \in \mathrm{Ker}(t).}$$

  × pour tout $i \in [\![n+2, 2n+1]\!]$: $t(e_i) = e_1$. On en déduit, pour tout $i \in [\![n+2, 2n+1]\!]$:

$$t(e_1 - e_i) = t(e_1) - t(e_i) = e_1 - e_1 = 0_{\mathbb{R}^{2n+1}}$$

$$\boxed{\text{Pour tout } i \in [\![n+2, 2n+1]\!],\ e_1 - e_i \in \mathrm{Ker}(t).}$$

- Notons $I = [\![2, n]\!] \cup [\![n+2, 2n+1]\!]$.
  Démontrons que la famille $\mathcal{E} = \big(e_1 - e_i\big)_{i \in I}$ est libre.

  Soit $(\lambda_2, \dots, \lambda_n, \lambda_{n+2}, \dots, \lambda_{2n+1}) \in \mathbb{R}^{2n-1}$.
  (on choisit une numérotation adaptée au problème)

  Supposons :

$$\begin{array}{cccccccccc} & \lambda_2 & \cdot & (e_1 - e_2) & + & \dots & + & \lambda_n & \cdot & (e_1 - e_n) & & \\ + & \lambda_{n+2} & \cdot & (e_1 - e_{n+2}) & + & \dots & + & \lambda_{2n+1} & \cdot & (e_1 - e_{2n+1}) & = & 0_{\mathbb{R}^{2n+1}} \end{array}$$

  En réordonnant :

$$\begin{array}{cccccccccc} & \multicolumn{9}{l}{(\lambda_2 + \dots + \lambda_n + \lambda_{n+2} + \dots + \lambda_{2n+1}) \cdot e_1} \\ + & (-\lambda_2) & \cdot & e_2 & + & \dots & + & (-\lambda_n) & \cdot & e_n & & \\ + & (-\lambda_{n+2}) & \cdot & e_{n+2} & + & \dots & + & (-\lambda_{2n+1}) & \cdot & e_{2n+1} & = & 0_{\mathbb{R}^{2n+1}} \end{array}$$

La famille $\mathscr{B}_c = (e_1, \ldots, e_{2n+1})$ est une base de $\mathbb{R}^{2n+1}$ et est donc libre.
Ainsi, la famille $(e_1, e_2, \ldots, e_n, e_{n+2}, \ldots, e_{2n+1})$, sous-famille de $\mathscr{B}_c$ est elle aussi libre.
On déduit donc de l'égalité précédente :

$$\lambda_2 + \ldots + \lambda_n + \lambda_{n+2} + \ldots + \lambda_{2n+1} = -\lambda_2 = \ldots = -\lambda_n = -\lambda_{n+2} = \ldots = -\lambda_{2n+1} = 0$$

D'où : $\lambda_2 = \ldots = \lambda_n = \lambda_{n+2} = \ldots = \lambda_{2n+1} = 0$.

$$\boxed{\text{La famille } \mathcal{E} \text{ est libre.}}$$

- D'après ce qui précède :
  - × la famille $\mathcal{E}$ est une famille libre constituée de vecteurs de $\mathrm{Ker}(t)$,
  - × $\mathrm{Card}(\mathcal{E}) = 2n - 1 = \dim(\mathrm{Ker}(t))$.

$$\boxed{\text{On en déduit que la famille } \mathcal{E} \text{ est une base de } \mathrm{Ker}(t).}$$

□

Commentaire

On peut aussi exhiber une famille génératrice de $\mathrm{Ker}(t)$.
Détaillons les grandes lignes de la rédaction associée.

Soit $u = (x_1, \ldots, x_{2n+1}) \in \mathbb{R}^{2n+1}$. Notons $U = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_c}(u) = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{2n+1} \end{pmatrix}$.

$$\begin{aligned}
u \in \mathrm{Ker}(t) \quad & \Leftrightarrow \quad t(u) = 0_{\mathbb{R}^{2n+1}} \\
& \Leftrightarrow \quad T\,U = 0_{\mathscr{M}_{2n+1,1}(\mathbb{R})} \\
& \Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{ccccccccccccccc} x_1 & + & \ldots & + & x_n & + & x_{n+1} & + & x_{n+2} & + & \ldots & + & x_{2n+1} & = & 0 \\ & & & & & & x_{n+1} & & & & & & & = & 0 \\ & & & & & & \vdots & & & & & & & & \vdots \\ & & & & & & x_{n+1} & & & & & & & = & 0 \end{array} \right. \\
& \Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{ccccccccccccccc} x_1 & + & \ldots & + & x_n & + & x_{n+1} & + & x_{n+2} & + & \ldots & + & x_{2n+1} & = & 0 \\ & & & & & & x_{n+1} & & & & & & & = & 0 \end{array} \right. \\
& \Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} x_1 = -(x_2 + \ldots + x_n) - (x_{n+2} + \ldots + x_{2n+1}) \\ x_{n+1} = 0 \end{array} \right.
\end{aligned}$$

On obtient alors :

$$\begin{aligned}
& \mathrm{Ker}(t) \\
= \ & \left\{ (x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots, x_{2n+1}) \ \middle| \ \begin{array}{l} x_1 = -(x_2 + \ldots + x_n) - (x_{n+2} + \ldots + x_{2n+1}) \\ x_{n+1} = 0 \end{array} \right\} \\
= \ & \{ (x_1, \ldots, x_n, 0, x_{n+2}, \ldots, x_{2n+1}) \mid x_1 = -(x_2 + \ldots + x_n) - (x_{n+2} + \ldots + x_{2n+1}) \} \\
= \ & \left\{ (-x_2 - \ldots - x_n - x_{n+2} - \ldots - x_{2n+1}, \ldots, x_n, 0, x_{n+2}, \ldots, x_{2n+1}) \ \middle| \ \begin{array}{l} (x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^{n-1} \\ (x_{n+2}, \ldots, x_{2n+1}) \in \mathbb{R}^{n-1} \end{array} \right\} \\
= \ & \ldots \\
= \ & \mathrm{Vect}\left(\mathcal{E}\right)
\end{aligned}$$

Commentaire

On a exhibé lors de la résolution une famille libre $\mathcal{E}$ constituées de vecteurs de $\text{Ker}(t)$. On aurait pu en exhiber d'autres. Par définition de l'endomorphisme t :

× pour tout $i \in [\![1, n]\!]$: $t(e_i) = e_1$. On en déduit, pour tout $i \in [\![1, n-1]\!]$:

$$t(e_i - e_{i+1}) = t(e_i) - t(e_{i+1}) = e_1 - e_1 = 0_{\mathbb{R}^{2n+1}}$$

$$\boxed{\text{Pour tout } i \in [\![1, n-1]\!],\ e_i - e_{i+1} \in \text{Ker}(t).}$$

× pour tout $i \in [\![n+2, 2n+1]\!]$: $t(e_i) = e_1$. On en déduit, pour tout $i \in [\![n+2, 2n]\!]$:

$$t(e_i - e_{i+1}) = t(e_i) - t(e_{i+1}) = e_1 - e_1 = 0_{\mathbb{R}^{2n+1}}$$

$$\boxed{\text{Pour tout } i \in [\![n+2, 2n]\!],\ e_i - e_{i+1} \in \text{Ker}(t).}$$

× enfin : $t(e_n - e_{n+2}) = t(e_n) - t(e_{n+2}) = e_1 - e_1 = 0_{\mathbb{R}^{2n+1}}$.

$$\boxed{\text{Ainsi : } e_n - e_{n+2} \in \text{Ker}(t).}$$

Finalement, la famille :

$$\mathcal{F} = \big(e_1 - e_2, \ldots, e_{n-1} - e_n, e_{n+2} - e_{n+1}, \ldots, e_{2n} - e_{2n+1}, e_n - e_{n+2}\big)$$

est une famille libre de vecteurs de $\text{Ker}(t)$.
Étant de cardinal $\text{Card}(\mathcal{F}) = 2n - 1$, c'est une (autre) base de $\text{Ker}(t)$.

3. Montrer que $\text{Im}(t \circ t) \subset \text{Im}(t)$, où $\text{Im}(u)$ désigne l'image d'un endomorphisme u de $\mathbb{R}^{2n+1}$.

Démonstration.
Soit $y \in \text{Im}(t \circ t)$.
Par définition, il existe $x \in \mathbb{R}^{2n+1}$ tel que : $y = (t \circ t)(x) = t\big(t(x)\big) \in \text{Im}(t)$.

$$\boxed{\text{Im}(t \circ t) \subset \text{Im}(t)}$$

Commentaire

- Cette question est un classique des exercices d'algèbre théorique à HEC.
  Le thème plus général est celui des images et noyaux itérés.
  La première étape d'une telle étude consiste à démontrer :

$$\forall i \in \mathbb{N},\ \text{Im}\left(t^{i+1}\right) \subset \text{Im}\left(t^{i}\right) \quad \text{et} \quad \text{Ker}\left(t^{i+1}\right) \supset \text{Ker}\left(t^{i}\right)$$

- Les exercices d'algèbre théorique donnent lieu à certaines questions dont la résolution est particulièrement simple si on s'y prend bien. Ici, il y a deux choses importantes :

  1) savoir appliquer les techniques de rédaction.
  Pour démontrer une inclusion d'ensembles, on prend un élément dans le premier ensemble et on démontre qu'il est dans le second.

  2) avoir une bonne connaissance du cours.
  Si l'on maîtrise la notion d'image, on sait alors comment s'écrit y et cela permet directement de conclure.

  Dans les sujets HEC, c'est cette bonne connaissance du cours et bonne maîtrise des objets étudiés qui permet de faire la différence.

□

4. Soit $\tilde{t}$ l'endomorphisme défini sur $\text{Im}(t)$ par : pour tout x de $\text{Im}(t)$, $\tilde{t}(x) = t(x)$.
Établir que $\mathscr{B} = \left(e_1,\ \sum\limits_{i=1}^{2n+1} e_i\right)$ constitue une base de $\text{Im}(t)$.
Écrire la matrice associée à $\tilde{t}$ relativement à la base $\mathscr{B}$.

Démonstration.

- Démontrons tout d'abord que e_1 et $\sum\limits_{i=1}^{2n+1} e_i$ sont deux vecteurs de $\text{Im}(t)$. Par définition de t :
  - × $e_1 = t(e_1) \in \text{Im}(t)$,
  - × $\sum\limits_{i=1}^{2n+1} e_i = t(e_{n+1}) \in \text{Im}(t)$.
- Démontrons maintenant que $\mathscr{B}$ est une famille libre.
  Soit $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$.
  Supposons : $\lambda_1 \cdot e_1 + \lambda_2 \cdot \sum\limits_{i=1}^{2n+1} e_i = 0_{\mathbb{R}^{2n+1}}$.
  Cette égalité se réécrit :
  $$(\lambda_1 + \lambda_2) \cdot e_1 + \lambda_2 \cdot e_2 + \ldots + \lambda_2 \cdot e_{2n+1} = 0_{\mathbb{R}^{2n+1}}$$
  La famille $\mathscr{B}_c = (e_1, \ldots, e_{2n+1})$ est une base de $\mathbb{R}^{2n+1}$ et est donc libre.
  On déduit donc de l'égalité précédente :
  $$\lambda_1 + \lambda_2 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_2 = 0$$
  D'où : $\lambda_2 = 0$ et $\lambda_1 = 0$.
  $$\boxed{\text{La famille } \mathscr{B} = \left(e_1,\ \sum_{i=1}^{2n+1} e_i\right) \text{ est libre.}}$$
- D'après ce qui précède :
  - × la famille $\mathscr{B}$ est une famille libre constituée de vecteurs de $\text{Im}(t)$.
  - × $\text{Card}(\mathscr{B}) = 2 = \dim\big(\text{Im}(t)\big)$.

  $$\boxed{\text{On en déduit que la famille } \mathscr{B} \text{ est une base de } \text{Im}(t).}$$
- Déterminons maintenant $\text{Mat}_{\mathscr{B}}(\tilde{t})$. Comme :
  - × $\tilde{t}(e_1) = t(e_1) = e_1$. Ainsi : $\text{Mat}_{\mathcal{G}}\big(\tilde{t}(e_1)\big) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.
  - × $$\begin{aligned} \tilde{t}\left(\sum_{i=1}^{2n+1} e_i\right) &= t\left(\sum_{i=1}^{2n+1} e_i\right) = \sum_{i=1}^{2n+1} t(e_i) = \sum_{i=1}^{n} t(e_i) + t(e_{n+1}) + \sum_{i=n+2}^{2n+1} t(e_i) \\ &= \sum_{i=1}^{n} e_1 + \sum_{i=1}^{2n+1} e_i + \sum_{i=n+2}^{2n+1} e_1 \\ &= 2n \cdot e_1 + \sum_{i=1}^{2n+1} e_i \end{aligned}$$
    Ainsi : $\text{Mat}_{\mathscr{B}}\big(\tilde{t}(e_1)\big) = \begin{pmatrix} 2n \\ 1 \end{pmatrix}$.

$$\boxed{\text{On en conclut : } N = \text{Mat}_{\mathscr{B}}\left(\tilde{t}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 2n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.}$$

Commentaire

Dans cette question, on introduit l'application $\tilde{t}$. Il n'est pas demandé de démontrer que $\tilde{t}$ est bien un endomorphisme de $\mathrm{Im}(t)$. Pour ce faire, il faudrait démontrer :

1) l'application $\tilde{t}$ est linéaire. Ce résultat provient directement de la linéarité de l'application t.

2) l'application $\tilde{t}$ est à valeurs dans $\mathrm{Im}(t)$. Démontrons-le.
Soit $v \in \mathrm{Im}(t)$. Il existe donc $u \in \mathbb{R}^{2n+1}$ tel que : $v = t(u)$. On a alors, par définition de $\tilde{t}$:

$$\tilde{t}(v) = t(v) = t\big(t(u)\big) = (t \circ t)(u) \in \mathrm{Im}(t \circ t) \subseteq \mathrm{Im}(t)$$

Ce dernier point permet de mettre en avant le fait que le résultat de la question ***3.*** joue un rôle primordial dans la bonne définition de l'endomorphisme $\tilde{t}$. □

5. a) Soit λ une valeur propre non nulle de t, et x un vecteur propre associé à λ.
Montrer que x appartient à $\mathrm{Im}(t)$.

Démonstration.
D'après l'énoncé : $t(x) = \lambda \cdot x$.

On en déduit : $x = \dfrac{1}{\lambda} \cdot t(x) = t\left(\dfrac{1}{\lambda} \cdot x\right) \in \mathrm{Im}(t)$.

$$\boxed{\text{Ainsi, } x \in \mathrm{Im}(t).}$$

Commentaire

Il s'agit là encore d'une question classique des exercices d'algèbre théorique des épreuves HEC. Comme souvent dans ce type de questions, écrire la définition est un grand pas vers la résolution de la question. Disons-le à nouveau : dans les sujets HEC, c'est cette bonne connaissance du cours et bonne maîtrise des objets étudiés qui permet de faire la différence. □

b) En déduire toutes les valeurs propres de t. L'endomorphisme t est-il diagonalisable ?

Démonstration.

- D'après la question ***2.c)***, 0 est valeur propre de t.
- Démontrons que la seule autre valeur propre de t est 1.
  Supposons que t admet une valeur propre $\lambda \neq 0$. Notons x un vecteur propre associé à λ.
  D'après la question précédente : $x \in \mathrm{Im}(t)$. On en déduit :

  $$\tilde{t}(x) = t(x) = \lambda \cdot x$$

  Ainsi, λ est un valeur propre de x.

  $$\boxed{\text{On en déduit que toute valeur propre non nulle de } t \text{ est valeur propre de } \tilde{t}.}$$

  Or, d'après la question précédente $N = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}\left(\tilde{t}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 2n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ est une matrice triangulaire supérieure. Ses valeurs propres sont donc ses coefficients diagonaux.

  $$\boxed{\mathrm{Sp}\left(\tilde{t}\right) = \mathrm{Sp}(N) = \{1\}}$$

  On en conclut que 1 est la seule valeur propre non nulle possible pour t. Il reste à démontrer que 1 est bel et bien valeur propre de t. Or, par définition :

  $$t(e_1) = e_1$$

  donc 1 est bien valeur propre de t.

  $$\boxed{\text{La seule valeur propre non nulle de } t \text{ est 1. On en déduit : } \mathrm{Sp}(t) = \{0, 1\}.}$$

Commentaire

- Dans la première partie du raisonnement, on suppose que t admet une valeur propre non nulle. En se basant sur cette hypothèse, on obtient une caractérisation des valeurs propres non nulles de t. Plus précisément :

  $$\begin{array}{l} t \text{ admet une valeur} \\ \text{propre } \lambda \neq 0 \end{array} \quad \Rightarrow \quad \lambda = 1$$

  Il faut bien comprendre que dans cette première partie du raisonnement, on a supposé (et non démontré !) l'existence d'une valeur propre $\lambda \neq 0$ de t. La partie gauche de l'implication n'étant pas encore démontrée, on ne peut conclure la partie droite.

  C'est pourquoi il faut, dans la deuxième partie du raisonnement, démontrer que t admet bien une valeur propre non nulle. Une idée très simple permet de le démontrer : il suffit de tester la valeur obtenue lors de la première étape du raisonnement ($\lambda = 1$) !
- Ce type de raisonnement est parfois présenté sous le nom d'**analyse-synthèse** :
  - × **analyse** : on suppose l'existence d'un objet vérifiant certains critères (λ valeur propre non nulle de t). Si cet objet existe, il est alors d'une certaine forme ($\lambda = 1$).
  - × **synthèse** : on vérifie que l'objet obtenu lors de la phase d'analyse répond bien aux critères initiaux ($\lambda = 1$ est bien une valeur propre non nulle). Cela permet de lever la réserve d'existence.

  Ce schéma de démonstration permet non seulement de conclure :

  $$\begin{array}{l} \text{l'objet répond à} \\ \text{certains critères} \end{array} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{array}{l} \text{l'objet s'écrit sous une} \\ \text{forme particulière} \end{array}$$

  mais aussi de démontrer que chacune des deux propositions de l'équivalence est vérifiée.
- Ce type de schéma de démonstration est par exemple utilisé lorsque l'on souhaite démontrer que toute fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ s'écrit de manière unique sous la forme :

  $$f = g + h$$

  où $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction paire et $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction impaire.
  La démonstration est la suivante :
  - × **analyse** : si f s'écrit sous cette forme, alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

    $$\begin{array}{rcccl} f(x) & = & g(x) & + & h(x) \\ f(-x) & = & g(x) & - & h(x) \quad \begin{array}{l} \textit{(car } g(-x) = g(x) \\ \textit{et } h(-x) = -h(x)\textit{)} \end{array} \end{array}$$

    On en déduit : $g(x) = \dfrac{f(x) + f(-x)}{2}$ et $h(x) = \dfrac{f(x) - f(-x)}{2}$.
  - × **synthèse** : si on note $g : x \mapsto \dfrac{f(x) + f(-x)}{2}$ et $h : x \mapsto \dfrac{f(x) - f(-x)}{2}$ alors on a bien : $f = g + h$ et g est une fonction paire et h une fonction impaire.

- On s'intéresse alors à $E_1(t)$. D'après la question précédente :

  $$E_1(t) \subseteq \mathrm{Im}(t)$$

  Or, par définition de $\tilde{t}$: $E_1\left(\tilde{t}\right) = E_1(t) \cap \mathrm{Im}(t)$.

  $$\boxed{\text{On déduit de l'inclusion précédente : } E_1\left(\tilde{t}\right) = E_1(t).}$$

- On en déduit : $\dim\big(E_1(t)\big) = \dim\big(E_1\left(\tilde{t}\right)\big)$.

  Déterminons $\dim\big(E_1\left(\tilde{t}\right)\big)$. Remarquons tout d'abord :

  × comme 1 est valeur propre de $\tilde{t}$, $\dim\big(E_1\left(\tilde{t}\right)\big) \geqslant 1$.

  × comme $E_1\left(\tilde{t}\right) \subset \mathrm{Im}(t)$, alors : $\dim\big(E_1\left(\tilde{t}\right)\big) \leqslant \dim\left(\mathrm{Im}(t)\right) = 2$.

$$\boxed{1 \leqslant \dim\big(E_1\left(\tilde{t}\right)\big) \leqslant 2}$$

  Démontrons alors $\dim\big(E_1\left(\tilde{t}\right)\big) \neq 2$, ce qui permettra de conclure : $\dim\big(E_1\left(\tilde{t}\right)\big) = 1$.
  Pour ce faire, on procède par l'absurde.
  On suppose $\dim\big(E_1\left(\tilde{t}\right)\big) = 2$.
  L'endomorphisme $\tilde{t} \in \mathscr{L}(\mathrm{Im}(t))$ posède 1 pour une unique valeur propre et :

$$\dim\big(E_1\left(\tilde{t}\right)\big) = 2 = \dim\big(\mathrm{Im}(t)\big)$$

  On en déduit que $\tilde{t}$ est diagonalisable. Il en est de même de N.
  Il existe alors une matrice inversible $P \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ et une matrice diagonale $D \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ dont les coefficients diagonaux sont les valeurs propres de N telles que : $N = PDP^{-1}$.
  Or 1 est la seule valeur propre de N. Ainsi $D = I$ et :

$$N = PDP^{-1} = PI_2P^{-1} = PP^{-1} = I_2$$

  Absurde !

$$\boxed{\text{On en conclut : } \dim\big(E_1\left(\tilde{t}\right)\big) = 1 \text{ et ainsi : } \dim\big(E_1\left(\tilde{t}\right)\big) = 1.}$$

- On a alors : $\dim\big(E_1(t)\big) = 1$ et :

$$\dim\big(E_0(t)\big) + \dim\big(E_1(t)\big) \;=\; (2n-1)+1 \;=\; 2n \neq 2n+1 \;=\; \dim\left(\mathbb{R}^{2n+1}\right)$$

$$\boxed{\text{Ainsi, l'endomorphisme } t \text{ n'est pas diagonalisable.}}$$

Commentaire

Il était possible de démontrer $\dim\big(E_1(t)\big) = 1$ en se ramenant à la détermination de $E_1(N)$. Détaillons ce procédé.

- Soit $x \in \mathbb{R}^{2n+1}$. Notons $X = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_c}(x)$. On a alors :

$$\begin{aligned} x \in E_1(t) &\Leftrightarrow t(x) = x \\ &\Leftrightarrow NX = X \\ &\Leftrightarrow X \in E_1(N) \end{aligned}$$

  On en déduit : $\dim\big(E_1(t)\big) = \dim\big(E_1(N)\big)$.
  Attention ! Cela ne démontre en aucun cas l'égalité des espaces propres :

$$E_1(t) \subseteq \mathbb{R}^{2n+1} \qquad \text{et} \qquad E_1(N) \subseteq \mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{R})$$

- Il est alors simple de démontrer : $E_1(N) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$ et permet ainsi de conclure : $\dim\big(E_1(t)\big) = \dim\big(E_1(N)\big) = 1$.

□

Commentaire

- L'endomorphisme $\tilde{t}$ introduit en question ***3.*** n'est autre que la restriction de l'endomorphisme t à l'espace vectoriel $\text{Im}(t)$. Rappelons que la restriction d'une application f à un ensemble A est généralement introduite en première année lors du chapitre *Ensembles et applications*. Cependant, lorsque l'on se réfère au programme officiel ECE, on ne voit pas apparaître le terme *restriction* dans ce chapitre. Profitons de cet énoncé pour faire un point sur cette notion.
- Commençons par définir la notion de restriction.
  On considère une application f d'un ensemble E vers un ensemble F.
  La **restriction** de f à un ensemble A, notée $f_{|A}$, est l'application de A dans F définie par :
  $$f_{|A} \ : \ \begin{array}{ccc} A & \to & F \\ x & \mapsto & f(x) \end{array}$$
  Autrement dit, $f_{|A}$ est l'application définie par : $\forall x \in A, \ f_{|A}(x) \ = \ f(x)$.
- On a alors : $\boxed{\text{Im}\,(f_{|A}) = f(A)}$ où $f(A)$ est l'image de l'ensemble A par l'application f :
  $$\begin{array}{rcll} \text{Im}\,(f_{|A}) & = & \{y \in F \mid \exists x \in A, \ y = f_{|A}(x)\} & \\ & = & \{y \in F \mid \exists x \in A, \ y = f(x)\} & \textit{(par définition de } f_{|A}\textit{)} \\ & = & f(A) & \end{array}$$
- Si on suppose de plus, comme c'est le cas dans l'exercice, que f est une application linéaire d'un espace vectoriel E vers un espace vectoriel F et $A \subset E$, on peut aussi démontrer :
  $$\boxed{\text{Ker}\,(f_{|A}) = \text{Ker}(f) \cap A}$$
  En effet :
  $$\begin{array}{rcl} x \in \text{Ker}\,\big(f_{|A}\big) & \Leftrightarrow & x \in A \ \texttt{ ET } \ f_{|A}(x) = 0_{\mathbb{R}^n} \\ & \Leftrightarrow & x \in A \ \texttt{ ET } \ f(x) = 0_{\mathbb{R}^n} \\ & \Leftrightarrow & x \in A \ \texttt{ ET } \ x \in \text{Ker}(f) \\ & \Leftrightarrow & x \in A \cap \text{Ker}(f) \end{array}$$
- Dans l'énoncé, on avait : $\tilde{t} = t_{|\text{Im}(t)}$. D'après ce qui précède :
  $$\boxed{\text{Im}\,\big(t_{|\text{Im}(t)}\big) = t(\text{Im}(t))} \qquad \text{et} \qquad \boxed{\text{Ker}\,\big(t_{|\text{Im}(t)}\big) = \text{Ker}(t) \cap \text{Im}(t)}$$
  On peut alors démontrer :
  $$\begin{array}{rcl} E_1\big(\tilde{t}\big) & = & \text{Ker}\,\big(\tilde{t} - \text{id}_{\text{Im}(t)}\big) \\ & = & \text{Ker}\,\big(t_{|\text{Im}(t)} - \text{id}_{\text{Im}(t)}\big) \\ & = & \text{Ker}\,\big((t - \text{id}_{\mathbb{R}^{2n+1}})_{|\text{Im}(t)}\big) \\ & = & \text{Ker}(t - \text{id}_{\mathbb{R}^{2n+1}}) \cap \text{Im}(t) \\ & = & E_1(t) \cap \text{Im}(t) \end{array}$$
  (on peut aussi faire une démonstration analogue à la précédente en raisonnant par équivalence à partir de $x \in E_1\big(\tilde{t}\big)$)

Exercice 2 (EML 2016 voie S)

Partie I : Étude d'une fonction définie par la somme d'une série

On s'intéresse dans cette partie, pour tout $x \in \mathbb{R}$, à la série $\sum\limits_{n \in \mathbb{N}^*} \dfrac{(-1)^{n+1}}{n^x}$.

1. Justifier que, pour tout $x \in \mathbb{R}_-$, la série $\sum\limits_{n \in \mathbb{N}^*} \dfrac{(-1)^{n+1}}{n^x}$ diverge.

Démonstration.
Soit $x \in \mathbb{R}_-$. On note : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = \dfrac{(-1)^{n+1}}{n^x}$.
Deux cas se présentent.

- Si $x = 0$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
  - Tout d'abord : $v_{2n} = \dfrac{(-1)^{2n+1}}{(2n)^0} = -1$.
  - Ensuite : $v_{2n+1} = \dfrac{(-1)^{(2n+1)+1}}{(2n+1)^0} = 1$.

  La suite (v_n) admet donc deux sous-suites qui convergent vers deux limites distinctes.
  On en déduit que la suite (v_n) diverge. En particulier : $v_n \underset{n \to +\infty}{\not\to} 0$.

  La série $\sum\limits_{n \geqslant 1} v_n$ est donc (grossièrement) divergente.
- Si $x < 0$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
  $$v_{2n} = \frac{(-1)^{2n+1}}{(2n)^x} = -\frac{1}{(2n)^x} = -(2n)^{-x} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} -\infty \qquad \textit{(car } -x > 0\textit{)}$$
  La suite (v_n) admet donc une sous-suite qui diverge.
  On en déduit que la suite (v_n) diverge. En particulier : $v_n \underset{n \to +\infty}{\not\to} 0$.

  La série $\sum\limits_{n \geqslant 1} v_n$ est donc (grossièrement) divergente.

$$\boxed{\text{Finalement, pour tout } x \in \mathbb{R}_-, \text{ la série } \sum_{n \geqslant 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n^x} \text{ diverge.}}$$

Commentaire

On rappelle la condition `NÉCESSAIRE` de convergence des séries :

$$\sum u_n \text{ converge} \quad \Rightarrow \quad u_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$$

On utilise généralement la contraposée de ce résultat, à savoir :

$$u_n \underset{n \to +\infty}{\not\to} 0 \quad \Rightarrow \quad \sum u_n \text{ diverge}$$

(une série grossièrement divergente est divergente)

□

2. Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. On note, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{(-1)^{k+1}}{k^x}$.

a) Montrer que les suites $(u_{2p})_{p\in\mathbb{N}^*}$ et $(u_{2p-1})_{p\in\mathbb{N}^*}$ sont adjacentes, puis en déduire qu'elles convergent vers une même limite notée $S(x)$.

Démonstration.

- Déterminons le sens de variations de (u_{2p}).
  Soit $p \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned} u_{2(p+1)} - u_{2p} &= u_{2p+2} - u_{2p} = \sum_{k=1}^{2p+2} \frac{(-1)^{k+1}}{k^x} - \sum_{k=1}^{2p} \frac{(-1)^{k+1}}{k^x} \\ &= \left(\cancel{\sum_{k=1}^{2p} \frac{(-1)^{k+1}}{k^x}} + \frac{(-1)^{(2p+1)+1}}{(2p+1)^x} + \frac{(-1)^{(2p+2)+1}}{(2p+2)^x} \right) - \cancel{\sum_{k=1}^{2p} \frac{(-1)^{k+1}}{k^x}} \\ &= \frac{1}{(2p+1)^x} - \frac{1}{(2p+2)^x} \end{aligned}$$

Or :

$$\begin{aligned} \frac{1}{(2p+1)^x} - \frac{1}{(2p+2)^x} \geqslant 0 &\Leftrightarrow \frac{1}{(2p+1)^x} \geqslant \frac{1}{(2p+2)^x} \\ &\Leftrightarrow (2p+1)^x \leqslant (2p+2)^x && \textit{(par stricte décroissance de la fonction inverse sur }]0,+\infty[\textit{)} \\ &\Leftrightarrow x\ \ln(2p+1) \leqslant x\ \ln(2p+2) && \textit{(par stricte croissance de la fonction } \ln \textit{ sur }]0,+\infty[\textit{)} \\ &\Leftrightarrow \ln(2p+1) \leqslant \ln(2p+2) && \textit{(par multiplication par } \tfrac{1}{x} > 0\textit{)} \\ &\Leftrightarrow 2p+1 \leqslant 2p+2 && \textit{(par stricte croissance de la fonction } \exp \textit{ sur } \mathbb{R}\textit{)} \end{aligned}$$

Cette dernière inégalité est vraie. Donc, par équivalence : $\dfrac{1}{(2p+1)^x} - \dfrac{1}{(2p+2)^x} \geqslant 0$.

On en déduit : $u_{2(p+1)} - u_{2p} \geqslant 0$.

$\boxed{\text{La suite } (u_{2p}) \text{ est donc croissante.}}$

- Montrons que la suite (u_{2p-1}) est décroissante.
  Soit $p \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned} u_{2(p+1)-1} - u_{2p-1} &= u_{2p+1} - u_{2p-1} = \sum_{k=1}^{2p+1} \frac{(-1)^{k+1}}{k^x} - \sum_{k=1}^{2p-1} \frac{(-1)^{k+1}}{k^x} \\ &= \left(\cancel{\sum_{k=1}^{2p-1} \frac{(-1)^{k+1}}{k^x}} + \frac{(-1)^{(2p)+1}}{(2p)^x} + \frac{(-1)^{(2p+1)+1}}{(2p+1)^x} \right) - \cancel{\sum_{k=1}^{2p-1} \frac{(-1)^{k+1}}{k^x}} \\ &= -\frac{1}{(2p)^x} + \frac{1}{(2p+1)^x} \end{aligned}$$

Or :

$$\begin{aligned} -\frac{1}{(2p)^x} + \frac{1}{(2p+1)^x} \leqslant 0 &\Leftrightarrow \frac{1}{(2p+1)^x} \leqslant \frac{1}{(2p)^x} \\ &\Leftrightarrow 2p+1 \geqslant 2p && \textit{(par les mêmes arguments que précédemment)} \end{aligned}$$

Cette dernière inégalité est vraie. Donc, par équivalence : $-\dfrac{1}{(2p)^x} + \dfrac{1}{(2p+1)^x} \leqslant 0$.
On en déduit : $u_{2(p+1)-1} - u_{2p-1} \leqslant 0$.

$\boxed{\text{La suite } (u_{2p-1}) \text{ est donc décroissante.}}$

- Montrons enfin que la suite $(u_{2p} - u_{2p-1})$ est convergente et $\lim\limits_{p\to+\infty} u_{2p} - u_{2p-1} = 0$.
  Soit $p \in \mathbb{N}^*$.

$$u_{2p} - u_{2p-1} = \sum_{k=1}^{2p} \frac{(-1)^{k+1}}{k^x} - \sum_{k=1}^{2p-1} \frac{(-1)^{k+1}}{k^x} = \frac{(-1)^{(2p)+1}}{(2p)^x} = -\frac{1}{(2p)^x}$$

  Or, comme $x > 0$: $\lim\limits_{p\to+\infty} -\dfrac{1}{(2p)^x} = 0$.

$$\boxed{\text{D'où : } \lim_{p\to+\infty} u_{2p} - u_{2p-1} = 0.}$$

$\boxed{\text{On en déduit que les suites } (u_{2p}) \text{ et } (u_{2p-1}) \text{ sont adjacentes.}}$

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{D'après le théorème des suites adjacentes,}\\ \text{les suites } (u_{2p}) \text{ et } (u_{2p-1}) \text{ convergent vers la même limite, notée } S(x).\end{array}}$$

□

b) En déduire que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que pour tout $n \geqslant n_0$, on a : $|u_n - S(x)| \leqslant \varepsilon$.

Démonstration.

- Rédaction 1 :
  Soit I un intervalle ouvert contenant $S(x)$.
  × $u_{2p} \underset{p\to+\infty}{\longrightarrow} S(x)$, donc l'intervalle I contient tous les termes de la suite (u_{2p}) (*i.e.* tous les termes d'indices pairs de la suite (u_n)) sauf un nombre fini,
  × $u_{2p-1} \underset{p\to+\infty}{\longrightarrow} S(x)$, donc l'intervalle I contient tous les termes de la suite (u_{2p-1}) (*i.e.* tous les termes d'indices impairs de la suite (u_n)) sauf un nombre fini.

  Finalement, l'intervalle I contient tous les termes de la suite (u_n) sauf un nombre fini.
  Cela démontre que la suite (u_n) converge vers $S(x)$.

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{Ainsi, par définition de la convergence,}\\ \text{pour tout } \varepsilon > 0, \text{ il existe un rang } n_0 \in \mathbb{N}^* \text{ tel que pour tout } n \geqslant n_0, \text{ on a : } |u_n - S(x)| \leqslant \varepsilon.\end{array}}$$

- Rédaction 2 :
  Soit $\varepsilon > 0$.
  × $u_{2p} \underset{p\to+\infty}{\longrightarrow} S(x)$, donc, par définition de la convergence :
  il existe un rang $p_1 \in \mathbb{N}^*$ tel que pour tout $p \geqslant p_1$: $|u_{2p} - S(x)| \leqslant \varepsilon$.
  × $u_{2p-1} \underset{p\to+\infty}{\longrightarrow} S(x)$, donc, par définition de la convergence :
  il existe un rang $p_2 \in \mathbb{N}^*$ tel que pour tout $p \geqslant p_2$: $|u_{2p-1} - S(x)| \leqslant \varepsilon$.

  On choisit alors $n_0 = \max(2p_1, 2p_2 - 1)$.

$\boxed{\text{Alors, pour tout } n \geqslant n_0 : |u_n - S(x)| \leqslant \varepsilon.}$

Commentaire

- On démontre dans cette question la propriété, parfois appelée « propriété de recouvrement » :

$$\left.\begin{array}{l} u_{2n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell \\ u_{2n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell \end{array}\right\} \Rightarrow u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$$

Cette propriété n'apparaît pas dans le programme officiel de la voie ECE.
Il faut donc la redémontrer à chaque utilisation.

- La convergence d'une suite (u_n) vers un réel ℓ admet deux définitions équivalentes.

1) Définition sans les ε :

(u_n) converge vers $\ell \in \mathbb{R}$ $\Leftrightarrow$ Tout intervalle ouvert contenant ℓ contient tous les termes de la suite (u_n) sauf un nombre fini d'entre eux

C'est la définition donnée par le programme officiel (correspond à la première rédaction).

2) Définition avec les ε :

$$(u_n) \text{ converge vers } \ell \in \mathbb{R} \quad \Leftrightarrow \quad \forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant n_0, |u_n - \ell| < \varepsilon$$

La présence d'un ε dans l'énoncé rend obligatoire l'utilisation de cette définition une fois la propriété de recouvrement démontrée. C'est certainement la deuxième rédaction que le concepteur avait en tête.

□

c) Justifier alors que la série $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} \dfrac{(-1)^{n+1}}{n^x}$ converge et que l'on a : $S(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^{n+1}}{n^x}$.

Démonstration.
La suite (u_n) est la suite des sommes partielles de la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{(-1)^{n+1}}{n^x}$.

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{Comme la suite } (u_n) \text{ converge vers } S(x), \\ \text{on en déduit que la série } \sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{(-1)^{n+1}}{n^x} \text{ converge et } \sum\limits_{k=1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^{k+1}}{k^x} = S(x).\end{array}}$$

□

d) Justifier : $\forall p \in \mathbb{N}^*$, $u_{2p} \leqslant S(x) \leqslant u_{2p+1} \leqslant u_{2p-1}$.

Démonstration.

- D'après la question ***2.a)***, la suite (u_{2p}) est croissante. Donc, par récurrence immédiate :

$$\forall p \in \mathbb{N}^*, \ \forall n \in \mathbb{N}, \ u_{2p} \leqslant u_{2(p+n)}$$

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = S(x)$, par passage à la limite quand n tend vers $+\infty$, on obtient :

$$\forall p \in \mathbb{N}^*, \ u_{2p} \leqslant S(x)$$

- D'après la question ***2.a)***, la suite (u_{2p-1}) est décroissante. Donc, par récurrence immédiate :

$$\forall p \in \mathbb{N}^*, \ \forall n \in \mathbb{N}, \ u_{2(p+n)+1} \leqslant u_{2p+1}$$

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = S(x)$, par passage à la limite quand n tend vers $+\infty$, on obtient :

$$\forall p \in \mathbb{N}^*, \ S(x) \leqslant u_{2p+1}$$

- Enfin, comme la suite (u_{2p-1}) est décroissante, on a, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{array}{ccc} u_{2(p+1)-1} & \leqslant & u_{2p-1} \\ \shortparallel & & \\ u_{2p+1} & & \end{array}$$

$$\boxed{\text{Finalement : } \forall p \in \mathbb{N}^*,\ u_{2p} \leqslant S(x) \leqslant u_{2p+1} \leqslant u_{2p-1}.}$$

Commentaire

- On démontre dans cette question une propriété classique :

$$\boxed{\left.\begin{array}{l} (v_n) \text{ croissante} \\ v_n \to \ell \in \mathbb{R} \end{array}\right\} \Rightarrow \ \forall n \in \mathbb{N},\ v_n \leqslant \ell}$$

(dans l'énoncé, c'est la suite (v_{2p}) qui vérifie cette propriété)
Cette propriété stipule qu'une suite croissante qui converge vers une limite $\ell \in \mathbb{R}$ est majorée par ℓ. Ce résultat est immédiat si l'on sait que la limite ℓ, si elle existe, d'une suite croissante (v_n) est sa borne supérieure. Or, par définition, la borne supérieure d'une suite est le plus petit des majorants de la suite. Ce qui permet de conclure. La notion de borne supérieure n'étant pas explicitement au programme, on refait ici la démonstration.

- On peut aussi démontrer ce résultat par l'absurde. Détaillons la démonstration.
  On suppose :
  × la suite (v_n) croissante,
  × la suite (v_n) converge vers ℓ,
  × `NON`$(\forall n \in \mathbb{N},\ v_n \leqslant \ell)$ est vérifiée.
  Autrement dit, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $v_{n_0} > \ell$.

  La suite (v_n) étant croissante, on a :

$$\forall n \geqslant n_0,\ v_n \geqslant v_{n_0}$$

  Par passage à la limite dans cette inégalité, on obtient : $\ell \geqslant v_{n_0}$.
  En combinant avec l'inégalité de l'hypothèse, on a alors : $\ell \geqslant v_{n_0} > \ell$.
  Absurde !

□

e) En déduire : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ |S(x) - u_n| \leqslant \dfrac{1}{(n+1)^x}$.
On pourra séparer les cas n pair et n impair.

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Deux cas se présentent.

- Si n est pair, alors il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $n = 2p$ (donc $u_n = u_{2p}$).
  D'après la question ***2.c)*** :

$$u_{2p} \ \leqslant \ S(x) \ \leqslant \ u_{2p+1}$$

  Donc :

$$\begin{array}{ccccc} 0 & \leqslant & S(x) - u_{2p} & \leqslant & u_{2p+1} - u_{2p} \\ & & \shortparallel & & \\ & & |S(x) - u_{2p}| & & \textit{(d'après l'inégalité de gauche)} \end{array}$$

Enfin :

$$\begin{aligned} u_{2p+1} - u_{2p} &= \sum_{k=1}^{2p+1} \frac{(-1)^{k+1}}{k^x} - \sum_{k=1}^{2p} \frac{(-1)^{k+1}}{k^x} = \frac{(-1)^{(2p+1)+1}}{(2p+1)^x} \\ &= \frac{1}{(2p+1)^x} = \frac{1}{(n+1)^x} \qquad \textit{(car } n = 2p\textit{)} \end{aligned}$$

Finalement, dans le cas où $n = 2p$ on a démontré :

$$|S(x) - u_n| \leqslant \frac{1}{(n+1)^x}$$

- Si n est impair, alors il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $n = 2p - 1$ (donc $u_n = u_{2p-1}$).
  D'après la question ***2.c)*** :

$$u_{2p} \leqslant S(x) \leqslant u_{2p-1}$$

Donc :

$$u_{2p} - u_{2p-1} \leqslant S(x) - u_{2p-1} \leqslant 0$$

$$S(x) - u_{2p-1} = -|S(x) - u_{2p-1}| \qquad \textit{(d'après l'inégalité de droite)}$$

Enfin :

$$\begin{aligned} u_{2p} - u_{2p-1} &= \sum_{k=1}^{2p} \frac{(-1)^{k+1}}{k^x} - \sum_{k=1}^{2p-1} \frac{(-1)^{k+1}}{k^x} = \frac{(-1)^{(2p)+1}}{(2p)^x} \\ &= -\frac{1}{(2p)^x} = -\frac{1}{(n+1)^x} \qquad \textit{(car } n = 2p-1\textit{)} \end{aligned}$$

Finalement, dans le cas où $n = 2p - 1$ on a démontré :

$$-\frac{1}{(n+1)^x} \leqslant -|S(x) - u_n| \quad \text{et donc} \quad \frac{1}{(n+1)^x} \geqslant |S(x) - u_n|$$

$$\boxed{\text{On en déduit : } \forall n \in \mathbb{N}^*,\ |S(x) - u_n| \leqslant \frac{1}{(n+1)^x}}$$

Commentaire

On a séparé dans cette démonstration le cas n pair du cas où n est impair.
En particulier, on a considéré :

$$u_{2p+1} = \sum_{k=1}^{2p+1} \frac{(-1)^{k+1}}{k^x}$$

Le fait que l'on somme pour k variant de 1 à $2p+1$ (nombre impair) ne démontre en `AUCUN CAS` que la variable d'itération k est toujours impaire. La variable k prend toutes les valeurs de l'ensemble $[\![1, 2p+1]\!]$ et ainsi $(-1)^{k+1}$ prend alternativement les valeurs 1 et -1. Il ne faut pas confondre cette question avec la question ***3.*** où l'on sépare la somme suivant les valeurs pairs et impaires de k.

□

f) En déduire une fonction **Scilab** qui, étant donnés deux réels $x > 0$ et $\varepsilon > 0$, renvoie une valeur approchée de $S(x)$ à ε près.

Démonstration.
Soit $\varepsilon > 0$ et soit $x > 0$.

- On cherche ici à trouver un entier n_0 tel que u_{n_0} est une valeur approchée de $S(x)$ à ε près. Autrement dit, on souhaite exhiber n_0 tel que :
$$|S(x) - u_{n_0}| \leqslant \varepsilon$$
- Pour que cette inégalité soit vérifiée, il suffit de trouver n_0 tel que : $\dfrac{1}{(n_0+1)^x} \leqslant \varepsilon$.
En effet, d'après ce qui précède, on aura alors, par transitivité :
$$|S(x) - u_{n_0}| \leqslant \frac{1}{(n_0+1)^x} \leqslant \varepsilon$$
- Or on a :
$$\begin{array}{rcll} \dfrac{1}{(n+1)^x} \leqslant \varepsilon & \Leftrightarrow & (n+1)^x \geqslant \dfrac{1}{\varepsilon} & \textit{(par stricte décroissance de la fonction inverse sur }]0,+\infty[\textit{)} \\ & \Leftrightarrow & x \ln(n+1) \geqslant \ln\left(\dfrac{1}{\varepsilon}\right) & \textit{(par stricte croissance de la fonction ln sur }]0,+\infty[\textit{)} \\ & \Leftrightarrow & \ln(n+1) \geqslant \dfrac{\ln\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)}{x} & \textit{(par multiplication par } \frac{1}{x} > 0\textit{)} \\ & \Leftrightarrow & n+1 \geqslant \exp\left(\dfrac{1}{x}\ln\left(\dfrac{1}{\varepsilon}\right)\right) & \textit{(par stricte croissance de la fonction exp sur } \mathbb{R}\textit{)} \\ & \Leftrightarrow & n \geqslant \exp\left(\dfrac{1}{x}\ln\left(\dfrac{1}{\varepsilon}\right)\right) - 1 & \end{array}$$
L'entier : $n_0 = \left\lceil \left(\dfrac{1}{\varepsilon}\right)^{\frac{1}{x}} - 1 \right\rceil$ convient.
- Il suffit donc de calculer u_{n_0} avec $n_0 = \left\lceil \left(\dfrac{1}{\varepsilon}\right)^{\frac{1}{x}} - 1 \right\rceil$.

```
function u = approxS(x, epsilon)
  n = ceil((1 / epsilon) ^ (1 / x) - 1)
  u = 1
  for k = 1:(n-1)
    u = u + ((-1) ^ (k+1)) / (n ^ x)
  end
endfunction
```

□

3. Soient $x \in \mathbb{R}_+^*$ et $p \in \mathbb{N}^*$. Montrer :

$$\sum_{k=1}^{2p} \frac{(-1)^{k+1}}{k^x} = \sum_{k=1}^{p} \frac{1}{(2k-1)^x} - \frac{1}{2^x} \sum_{k=1}^{p} \frac{1}{k^x}$$

puis :

$$\sum_{k=1}^{2p} \frac{(-1)^{k+1}}{k^x} = \sum_{k=1}^{2p} \frac{1}{k^x} - \frac{1}{2^{x-1}} \sum_{k=1}^{p} \frac{1}{k^x}$$

Démonstration.

- On calcule :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{2p} \frac{(-1)^{k+1}}{k^x} &= \sum_{\substack{k \in [\![1, 2p]\!] \\ k \text{ pair}}} \frac{(-1)^{k+1}}{k^x} + \sum_{\substack{k \in [\![1, 2p]\!] \\ k \text{ impair}}} \frac{(-1)^{k+1}}{k^x} \\
&= \sum_{k=1}^{p} \frac{(-1)^{(2k)+1}}{(2k)^x} + \sum_{k=1}^{p} \frac{(-1)^{(2k-1)+1}}{(2k-1)^x} \\
&= -\sum_{k=1}^{p} \frac{1}{2^x\, k^x} + \sum_{k=1}^{p} \frac{1}{(2k-1)^x} \\
&= -\frac{1}{2^x} \sum_{k=1}^{p} \frac{1}{k^x} + \sum_{k=1}^{p} \frac{1}{(2k-1)^x}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\sum_{k=1}^{2p} \frac{(-1)^{k+1}}{k^x} = \sum_{k=1}^{p} \frac{1}{(2k-1)^x} + \frac{1}{2^x} \sum_{k=1}^{p} \frac{1}{k^x}}$$

- Pour démontrer la deuxième égalité, il suffit de démontrer :

$$\sum_{k=1}^{2p} \frac{1}{k^x} - \frac{1}{2^{x-1}} \sum_{k=1}^{p} \frac{1}{k^x} = \sum_{k=1}^{p} \frac{1}{(2k-1)^x} - \frac{1}{2^x} \sum_{k=1}^{p} \frac{1}{k^x}$$

ce qui s'écrit, en réordonnant :

$$\sum_{k=1}^{2p} \frac{1}{k^x} = \sum_{k=1}^{p} \frac{1}{(2k-1)^x} + \left(\frac{1}{2^{x-1}} - \frac{1}{2^x} \right) \sum_{k=1}^{p} \frac{1}{k^x}$$

Démontrons cette dernière égalité en partant de la partie droite :

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=1}^{p} \frac{1}{(2k-1)^x} + \left(\frac{1}{2^{x-1}} - \frac{1}{2^x} \right) \sum_{k=1}^{p} \frac{1}{k^x} \\
= \ &\sum_{k=1}^{p} \frac{1}{(2k-1)^x} + \frac{1}{2^x} \sum_{k=1}^{p} \frac{1}{k^x} \qquad \textit{(car } \frac{1}{2^{x-1}} - \frac{1}{2^x} = \frac{2-1}{2^x} = \frac{1}{2^x}\textit{)} \\
= \ &\sum_{k=1}^{p} \frac{1}{(2k-1)^x} + \sum_{k=1}^{p} \frac{1}{(2k)^x} \\
= \ &\sum_{\substack{k \in [\![1, 2p]\!] \\ k \text{ impair}}} \frac{1}{k^x} + \sum_{\substack{k \in [\![1, 2p]\!] \\ k \text{ pair}}} \frac{1}{k^x} = \sum_{k=1}^{2p} \frac{1}{k^x}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Ainsi, on a bien : } \sum_{k=1}^{2p} \frac{(-1)^{k+1}}{k^x} = \sum_{k=1}^{2p} \frac{1}{k^x} - \frac{1}{2^{x-1}} \sum_{k=1}^{p} \frac{1}{k^x}.}$$

Commentaire

- On pouvait aussi démontrer directement la deuxième éaglité en commençant par regrouper les deux sommes sur $[\![1, 2p]\!]$ puis en écrivant :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{2p} \frac{(-1)^{k+1}-1}{k^x} &= \sum_{\substack{k \in [\![1,2p]\!] \\ k \text{ pair}}} \frac{(-1)^{k+1}-1}{k^x} + \sum_{\substack{k \in [\![1,2p]\!] \\ k \text{ impair}}} \frac{(-1)^{k+1}-1}{k^x} \\
&= \sum_{k=1}^{p} \frac{(-1)^{(2k)+1}-1}{(2k)^x} + \sum_{k=1}^{p} \frac{(-1)^{(2k-1)+1}-1}{(2k-1)^x} \\
&= \sum_{k=1}^{p} \frac{-1-1}{(2k)^x} + \cancel{\sum_{k=1}^{p} \frac{1-1}{(2k-1)^x}} \\
&= -2 \sum_{k=1}^{p} \frac{1}{2^x\, k^x} = -\frac{2}{2^x} \sum_{k=1}^{p} \frac{1}{k^x} = -\frac{1}{2^{x-1}} \sum_{k=1}^{p} \frac{1}{k^x}
\end{aligned}$$

- À la lecture de l'énoncé, plusieurs éléments doivent mettre sur la piste d'une séparation de la somme suivant les indices pairs et impairs :
  - × les termes $(-1)^{k+1}$ n'apparaissent plus à droite.
  - × on passe d'**une** somme sur $[\![1, 2p]\!]$ à **deux** sommes sur $[\![1, p]\!]$.

□

4. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$.

a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer, en utilisant la question *3.* : $v_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1+\frac{k}{n}}$.

Démonstration.

- Par définition : $v_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$.
  Or, en appliquant l'égalité de la question précédente pour $x = 1$ et $p = n$, on obtient :

$$\begin{aligned}
v_n = \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k+1}}{k} &= \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k^1} - \frac{1}{2^{1-1}} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^1} \\
&= \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \\
&= \left(\cancel{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}} + \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \right) - \cancel{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Donc : } v_n = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k}.}$$

- De plus :

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1+\frac{k}{n}} = \frac{1}{\cancel{n}} \sum_{k=1}^{n} \frac{\cancel{n}}{n+k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k} = \sum_{j=n+1}^{2n} \frac{1}{j}$$

(avec le changement d'indice $j = n + k$)

$$\boxed{\text{D'où : } v_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1+\frac{k}{n}}}$$

□

b) En déduire la convergence et la limite de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, puis la valeur de $S(1)$.

Démonstration.

- D'après la question précédente :
$$v_n \;=\; \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1+\frac{k}{n}} \;=\; \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$$
où la fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{1+x}$ est continue sur le segment $[0,1]$.
- On reconnaît une somme de Riemann, ce qui démontre :
$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_0^1 f(x)\,dx$$
Or :
$$\int_0^1 f(x)\,dx \;=\; \int_0^1 \frac{1}{1+x}\,dx \;=\; \Big[\ln\left(|1+x|\right)\Big]_0^1 \;=\; \ln\left(|2|\right)-\ln\left(|1|\right) \;=\; \ln(2)-\cancel{\ln(1)}$$
$$\boxed{\text{Ainsi la suite } (v_n) \text{ converge et : } \lim_{n\to+\infty} v_n = \ln(2).}$$

- Notons $x=1$. Par définition, on alors, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$:
$$u_n \;=\; \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \quad \text{et} \quad v_n \;=\; \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$$
Ainsi : $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $v_n = u_{2n}$. La suite (v_n) est donc une sous-suite de (u_n).
Or, d'après la question ***2.b)***, la suite (u_n) converge vers $S(1)$.
On en déduit que la suite (v_n) est elle aussi convergente et de même limite que (u_n).
Par unicité de la limite, on conclut alors :
$$S(1) \;=\; \lim_{n\to+\infty} u_n \;=\; \lim_{n\to+\infty} v_n \;=\; \ln(2)$$
$$\boxed{\text{En conclusion : } S(1) \;=\; \ln(2).}$$
□

5. On admet que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$. Déterminer la valeur de $S(2)$.

Démonstration.

- D'après la question ***2.c)*** : $S(2) \;=\; \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k^2}$.
- On réitère le procédé de la question ***4.*** : on applique l'égalité de la question ***3.*** avec les paramètres $x=2$ et $p=n$.
En utilisant la donnée de l'énoncé $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^3} = \frac{\pi^2}{6}$, on obtient :
$$\begin{array}{ccccc} \displaystyle\sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k+1}}{k^2} & = & \displaystyle\sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k^2} & - & \displaystyle\frac{1}{2^{2-1}}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \\ \Big\downarrow{\scriptstyle n\to+\infty} & & \Big\downarrow{\scriptstyle n\to+\infty} & & \Big\downarrow{\scriptstyle n\to+\infty} \\ S(2) & = & \dfrac{\pi^2}{6} & - & \dfrac{1}{2}\times\dfrac{\pi^2}{6} \;=\; \dfrac{\pi^2}{12} \end{array}$$
$$\boxed{\text{On en déduit : } S(2) \;=\; \frac{\pi^2}{12}.}$$
□

Partie II : Étude d'une fonction définie par une intégrale

On rappelle que la fonction Γ est définie sur $]0;+\infty[$ par : $\forall x \in]0;+\infty[$, $\Gamma(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\,dt$.
On rappelle également l'égalité suivante : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\Gamma(n) = (n-1)!$

6. Soit $x \in \mathbb{R}$. Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t^x}{1+\mathrm{e}^t}\,dt$ converge si et seulement si $x > -1$.

On pose, pour tout réel x de $]-1;+\infty[$, $I(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t^x}{1+\mathrm{e}^t}\,dt$.

Démonstration.
Soit $x \in \mathbb{R}$.

- La fonction $f : t \mapsto \dfrac{t^x}{1+\mathrm{e}^t}$ est continue sur $]0,+\infty[$ car elle est le quotient $f = \dfrac{f_1}{f_2}$ où :

  (i) $f_1 : t \mapsto \mathrm{e}^{x\,\ln(t)}$ est continue sur $]0,+\infty[$ car elle est la composée $h_2 \circ h_1$ où :
  - $h_1 : t \mapsto x\,\ln(t)$ est :
    - $\times$ continue sur $]0,+\infty[$,
    - $\times$ telle que $h_1\big(]0,+\infty[\big) \subseteq \mathbb{R}$.
  - $h_2 : t \mapsto \mathrm{e}^t$ continue sur $\mathbb{R}$.

  (ii) $f_2 : t \mapsto 1+\mathrm{e}^t$:
  - est continue sur $]0,+\infty[$.
  - ne s'annule pas sur $]0,+\infty[$.

$$\boxed{\text{La fonction } f : t \mapsto \dfrac{t^x}{1+\mathrm{e}^t} \text{ est continue sur }]0,+\infty[.}$$

Commentaire

On détaille ici précisément l'argumentation permettant de démontrer le caractère continu de f sur $]0,+\infty[$. Lors des concours, il n'est pas nécessaire de donner autant de détails tout au long de l'épreuve. Il est toutefois conseillé de faire cet effort de précision sur les premières questions, de sorte à faire bonne impression auprès du correcteur.

- L'intégrale (doublement) impropre $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\,dt$ est convergente

  $\Leftrightarrow$ Les intégrales impropres $\displaystyle\int_0^{1} f(t)\,dt$ et $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(t)\,dt$ sont convergentes

- Déterminons la nature de $\displaystyle\int_0^{1} f(t)\,dt$.
  - $\times$ $\forall t \in]0,1]$, $t^x = \mathrm{e}^{x\,\ln(t)} \geqslant 0$.
  - $\times$ $f(t) = \dfrac{t^x}{1+\mathrm{e}^t} \underset{t\to 0}{\sim} \dfrac{1}{2}\,t^x$.
  - $\times$ L'intégrale $\displaystyle\int_0^{1} \frac{1}{t^{-x}}\,dt$ est une intégrale de Riemann, impropre en 0, d'exposant $-x$.
    Elle est convergente si et seulement si $-x < 1$.

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{Ainsi, par critère d'équivalence des intégrales généralisées de fonctions continues}\\ \text{positives, l'intégrale impropre } \displaystyle\int_0^{1} f(t)\,dt \text{ est convergente si et seulement si } x > -1.\end{array}}$$

- Déterminons maintenant la nature de $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(t)\ dt$.

  × $\forall t \in\ [1,+\infty[,\ f(t) \geqslant 0$ et $\dfrac{1}{t^2} \geqslant 0$.

  × $f(t) = \dfrac{t^x}{1+\mathrm{e}^t} \underset{t\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$. En effet :
$$\frac{\frac{t^x}{1+\mathrm{e}^t}}{\frac{1}{t^2}} = \frac{t^{x+2}}{1+\mathrm{e}^t} \underset{t\to+\infty}{\sim} \frac{t^{x+2}}{\mathrm{e}^t} \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$
  par croissances comparées (si $x+2>0$) ou par opérations usuelles sur les limites (si $x+2 \leqslant 0$).

  × L'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}\ dt$ est une intégrale de Riemann, impropre en $+\infty$, d'exposant 2 ($2>1$). Elle est donc convergente.

Ainsi, par critère de négligeabilité des intégrales généralisées de fonctions continues positives, l'intégrale impropre $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(t)\ dt$ est convergente.

En conclusion, l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t^x}{1+\mathrm{e}^t}\ dt$ est donc convergente si et seulement si $x>-1$. □

7. Soit $x \in\ ]-1,+\infty[$. On définit la fonction $g_x :]0;+\infty[,\ t \mapsto \dfrac{t^x}{1+\mathrm{e}^t}$.

a) Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall t \in \mathbb{R}_+^*,\ g_x(t) = (-1)^n\, g_x(t)\, \mathrm{e}^{-nt} + \displaystyle\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1}\, t^x\, \mathrm{e}^{-kt}$.

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et soit $t \in \mathbb{R}_+^*$.

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1}\, t^x\, \mathrm{e}^{-kt} &= -t^x \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \left(\mathrm{e}^{-t}\right)^k \\
&= -t^x \sum_{k=1}^{n} \left(-\mathrm{e}^{-t}\right)^k \\
&= -t^x\ \frac{\left(-\mathrm{e}^{-t}\right)^1 - \left(-\mathrm{e}^{-t}\right)^{n+1}}{1-\left(-\mathrm{e}^{-t}\right)} && \textit{(car $-\mathrm{e}^{-t} \neq 1$)} \\
&= t^x\ \frac{\mathrm{e}^{-t} + \left(-\mathrm{e}^{-t}\right)^{n+1}}{1+\mathrm{e}^{-t}} \\
&= t^x\ \frac{1-\left(-\mathrm{e}^{-t}\right)^n}{\mathrm{e}^t+1} && \textit{(en multipliant par $\frac{\mathrm{e}^{-t}}{\mathrm{e}^{-t}}$)} \\
&= \frac{t^x}{1+\mathrm{e}^t} - \frac{t^x}{1+\mathrm{e}^t}\ \left(-\mathrm{e}^{-t}\right)^n \\
&= \frac{t^x}{1+\mathrm{e}^t} - \frac{t^x}{1+\mathrm{e}^t}\ (-1)^n\ \left(\mathrm{e}^{-t}\right)^n \\
&= g_x(t) - (-1)^n\, g_x(t)\, \mathrm{e}^{-nt}
\end{aligned}$$

$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall t \in \mathbb{R}_+^*,\ g_x(t) = (-1)^n\, g_x(t)\, \mathrm{e}^{-nt} + \displaystyle\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1}\, t^x\, \mathrm{e}^{-kt}$ □

b) Justifier, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^x \,\mathrm{e}^{-kt}\, dt$ converge et que l'on a :

$$\int_0^{+\infty} t^x \,\mathrm{e}^{-kt}\, dt = \frac{1}{k^{x+1}}\,\Gamma(x+1)$$

Démonstration.
Soit $k \in \mathbb{N}^*$.

- On effectue le changement de variable $\boxed{u = kt}$.

$$\left|\begin{array}{l} u = kt \quad \text{(et donc } t = \frac{1}{k}\,u\text{)} \\ \hookrightarrow du = k\; dt \quad \text{ et } \quad dt = \frac{1}{k}\; du \\ \bullet\; t = 0 \;\Rightarrow\; u = 0 \\ \bullet\; t = +\infty \;\Rightarrow\; u = +\infty \end{array}\right.$$

- Ce changement de variable est valide car $\psi : u \mapsto \dfrac{1}{k}\,u$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$.
  On obtient alors :
  $$\int_0^{+\infty} t^x \,\mathrm{e}^{-kt}\, dx \;=\; \int_0^{+\infty} \left(\frac{1}{k}\,u\right)^x \mathrm{e}^{-u}\frac{1}{k}\; du \;=\; \left(\frac{1}{k}\right)^{x+1} \int_0^{+\infty} u^x\; \mathrm{e}^{-u}\; du$$
  L'intégrale impropre $\displaystyle\int_0^{+\infty} u^x\; \mathrm{e}^{-u}\; du$ étant convergente, il en est de même de l'intégrale impropre $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^x \,\mathrm{e}^{-kt}\; dx$.

$$\boxed{\text{On obtient enfin : } \int_0^{+\infty} t^x \,\mathrm{e}^{-kt}\; dx \;=\; \frac{1}{k^{x+1}} \int_0^{+\infty} u^{(x+1)-1}\,\mathrm{e}^{-u}\; du \;=\; \frac{1}{k^{x+1}}\;\Gamma(x+1).}$$ □

c) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} g_x(t)\,\mathrm{e}^{-nt}\; dt$ converge, puis que la limite de $\displaystyle\int_0^{+\infty} g_x(t)\,\mathrm{e}^{-nt}\; dt$, lorsque l'entier n tend vers $+\infty$, est égale à 0.

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

- Soit $t > 0$.

Tout d'abord		$1 + \mathrm{e}^t$	$\geqslant$	1	*(car $\mathrm{e}^t \geqslant 0$)*
ensuite	$0 \leqslant$	$\dfrac{1}{1+\mathrm{e}^t}$	$\leqslant$	1	*(par croissance de la fonction inverse sur $]0, +\infty[$)*
enfin	$0 \leqslant$	$\dfrac{t^x\,\mathrm{e}^{-nt}}{1+\mathrm{e}^t}$	$\leqslant$	$t^x\,\mathrm{e}^{-nt}$	*(car $t^x = e^{x\,\ln(t)} > 0$ et $e^{-nt} > 0$)*

- On a :
  × $\forall t > 0$, $0 \leqslant \dfrac{t^x\,\mathrm{e}^{-nt}}{1+\mathrm{e}^t} \leqslant t^x\,\mathrm{e}^{-nt}$.
  × L'intégrale impropre $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^x\,\mathrm{e}^{-nt}$ est convergente d'après la question ***7.b)***.

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{Ainsi, par critère de comparaison des intégrales généralisées de fonctions continues} \\ \text{positives, l'intégrale impropre } \displaystyle\int_0^{+\infty} g_x(t)\;\mathrm{e}^{-nt}\; dt \text{ est convergente.}\end{array}}$$

- D'après l'inégalité précédente et par croissance de l'intégration, le bornes étant dans l'ordre croissant :
$$0 \leqslant \int_0^{+\infty} g_x(t)\,\mathrm{e}^{-nt}\ dt \leqslant \int_0^{+\infty} t^x\,\mathrm{e}^{-nt}\ dt \ = \ \frac{\Gamma(x+1)}{n^{x+1}}$$
- Or :
  × $\lim\limits_{n\to+\infty} 0 = 0$,
  × $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\Gamma(x+1)}{n^{x+1}} = 0$ car $x+1>0$ (on a supposé dans l'énoncé $x>-1$).

$$\boxed{\text{Ainsi, d'après le théorème d'encadrement : } \lim\limits_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} g_x(t)\,\mathrm{e}^{-nt} = 0.}$$
□

d) En déduire la relation : $I(x) = S(x+1)\,\Gamma(x+1)$, où la fonction S a été définie dans la Partie **I**.

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
- D'après la question ***7.a)*** :
$$g_x(t) = (-1)^n\,g_x(t)\,\mathrm{e}^{-nt} + \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1}\,t^x\,\mathrm{e}^{-kt}$$
Comme l'intégrale impropre de chaque fonction apparaissant dans cette égalité est convergente (d'après ce qui précède), on peut intégrer de part et d'autre :
$$\begin{aligned}
\int_0^{+\infty} g_x(t)\ dt &= \int_0^{+\infty} \left((-1)^n\,g_x(t)\,\mathrm{e}^{-nt} + \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1}\,t^x\,\mathrm{e}^{-kt}\right)\ dt \\
&= (-1)^n \int_0^{+\infty} g_x(t)\,\mathrm{e}^{-nt}\ dt + \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \int_0^{+\infty} t^x\,\mathrm{e}^{-kt}\ dt && \textit{(par linéarité de l'intégration)} \\
&= (-1)^n \int_0^{+\infty} g_x(t)\,\mathrm{e}^{-nt}\ dt + \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \frac{\Gamma(x+1)}{k^{x+1}} && \textit{(d'après la question } \textbf{\textit{7.b)}}\textit{)} \\
&= (-1)^n \int_0^{+\infty} g_x(t)\,\mathrm{e}^{-nt}\ dt + \Gamma(x+1) \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k^{x+1}}
\end{aligned}$$
Remarquons alors :
× $$\begin{aligned}
\left|(-1)^n \int_0^{+\infty} g_x(t)\,\mathrm{e}^{-nt}\ dt\right| &= |(-1)^n| \left|\int_0^{+\infty} g_x(t)\,\mathrm{e}^{-nt}\ dt\right| \\
&= \left|\int_0^{+\infty} g_x(t)\,\mathrm{e}^{-nt}\ dt\right| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} |0| = 0 && \textit{(d'après la question précédente)}
\end{aligned}$$
On en déduit : $\lim\limits_{n\to+\infty} (-1)^n \displaystyle\int_0^{+\infty} g_x(t)\,\mathrm{e}^{-nt}\ dt = 0$.
× comme $x>-1$, alors $x+1>0$.
Ainsi, d'après la Partie **I**, la série $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} \dfrac{(-1)^{n+1}}{n^{x+1}}$ est convergente et :
$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k^{x+1}} = S(x+1)$$

On en déduit que la partie droite de l'égalité admet une limite et :

$$\begin{aligned}
& \lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} g_x(t)\ dt \\
= & \lim_{n\to+\infty} \left((-1)^n \int_0^{+\infty} g_x(t)\,\mathrm{e}^{-nt}\ dt + \Gamma(x+1) \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k^{x+1}} \right) \\
= & \lim_{n\to+\infty} \left((-1)^n \int_0^{+\infty} g_x(t)\,\mathrm{e}^{-nt}\ dt \right) \quad + \lim_{n\to+\infty} \left(\Gamma(x+1) \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k^{x+1}} \right) \\
= & \qquad 0 \qquad + \ \Gamma(x+1) \underbrace{\lim_{n\to+\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k^{x+1}} \right)}_{S(x+1)}
\end{aligned}$$

Et comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \displaystyle\int_0^{+\infty} g_x(t)\ dt = \lim\limits_{n\to+\infty} I(x) = I(x)$, on obtient bien :

$$\boxed{I(x) \ = \ \Gamma(x+1)\, S(x+1)}$$

□

8. En utilisant la Partie **I.**, déterminer la valeur de $I(1)$.

Démonstration.
En utilisant la formule précédente pour $x = 1 \in\ ]-1,+\infty[$:

$$\begin{aligned}
I(1) &= \Gamma(2)\, S(2) \\
&= (1!)\, S(2) && \textit{(d'après le rappel au début de la Partie } \textbf{II}\textit{)} \\
&= \frac{\pi^2}{12} && \textit{(d'après la question } \textbf{\textit{5.}}\textit{)}
\end{aligned}$$

$$\boxed{I(1) = \frac{\pi^2}{12}}$$

□

Exercice 3 (EML 2018)

Dans tout cet exercice, f désigne la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par :

$$\forall x \in \,]0,+\infty[, \ f(x) = x - \ln(x)$$

Partie I : Étude de la fonction f

1. Dresser le tableau de variations de f en précisant ses limites en 0 et en $+\infty$.

Démonstration.

- La fonction f est dérivable sur $]0,+\infty[$ en tant que somme de fonctions dérivables sur $]0,+\infty[$.
- Soit $x \in \,]0,+\infty[$.

$$f'(x) \ = \ 1 - \frac{1}{x} \ = \ \frac{x-1}{x}$$

Alors, comme $x > 0$, la quantité $f'(x)$ **est** du signe de $x - 1$. Ainsi :

$$f'(x) > 0 \ \Leftrightarrow \ x - 1 > 0 \ \Leftrightarrow \ x > 1$$

On obtient le tableau de variations suivant :

x	0		1		$+\infty$
Signe de $f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
Variations de f	‖ $+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

- Détaillons les éléments de ce tableau.
  - Tout d'abord : $f(1) = 1 - \ln(1) = 1$.
  - Ensuite : $\lim\limits_{x \to 0} \ln(x) = -\infty$.

$$\boxed{\text{Donc : } \lim_{x \to 0} f(x) = +\infty.}$$

  - Enfin, soit $x \in \,]0,+\infty[$:

$$f(x) \ = \ x - \ln(x) \ = \ x\left(1 - \frac{\ln(x)}{x}\right)$$

De plus, par croissances comparées : $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln(x)}{x} = 0$.

$$\boxed{\text{On en déduit : } \lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty.}$$

□

2. Montrer que l'équation $f(x) = 2$, d'inconnue $x \in \,]0,+\infty[$, admet exactement deux solutions, que l'on note a et b, telles que $0 < a < 1 < b$.

Démonstration.

- La fonction f est :
  - × continue sur $]0,1[$ (car dérivable sur $]0,1[$),
  - × strictement décroissante sur $]0,1[$.

  Ainsi f réalise une bijection de $]0,1[$ dans $f(]0,1[)$. Or :

$$f(]0,1[) \ = \left] \lim_{x \to 1^-} f(x), \lim_{x \to 0} f(x) \right[= \,]1,+\infty[$$

Or $2 \in \,]1,+\infty[$.
Donc l'équation $f(x) = 2$ admet une unique solution sur $]0,1[$, notée a.

- La fonction f est :
  $\times$ continue sur $]1,+\infty[$ (car dérivable sur $]1,+\infty[$),
  $\times$ strictement croissante sur $]1,+\infty[$.
  Ainsi f réalise une bijection de $]1,+\infty[$ dans $f(]1,+\infty[)$. Or :
  $$f(]1,+\infty[) \ = \left] \lim_{x\to 1^-} f(x), \lim_{x\to+\infty} f(x) \right[=]1,+\infty[$$
  Or $2 \in]1,+\infty[$.
  Donc l'équation $f(x) = 2$ admet une unique solution sur $]1,+\infty[$, notée b.
- Enfin, $f(1) = 1$ et donc 1 n'est pas solution de $f(x) = 2$.

Finalement, l'équation $f(x) = 2$ admet exactement 2 solutions sur $]0,+\infty[$ notées a et b telles que $0 < a < 1 < b$.

Commentaire

- Il est important dans cette question d'avoir parfaitement en tête toutes les hypothèses du théorème de la bijection. En particulier, la fonction f doit être **strictement monotone** sur l'intervalle considéré.
- On ne pouvait donc pas appliquer le théorème de la bijection directement sur l'intervalle $]0,+\infty[$, mais il fallait découper cet intervalle en plusieurs sous-intervalles sur lesquels f est strictement monotone (ici $]0,1[$ et $]1,+\infty[$).

□

3. Montrer : $b \in [2,4]$. On donne $\ln(2) \simeq 0,\ 7$.

Démonstration.
Remarquons :
$\times$ $f(2) = 2 - \ln(2) \leqslant 2$.
$\times$ $f(b) = 2$.
$\times$ $f(4) = 4 - \ln(4) = 4 - \ln(2^2) = 4 - 2\ln(2) = 2(2 - \ln(2))$.
De plus, $\ln(2) \simeq 0,7$, donc : $2 - \ln(2) \simeq 1,3$ et $2(2 - \ln(2)) \simeq 2,6$.
D'où : $f(4) \geqslant 2$.
Ainsi :
$$f(2) \ \leqslant \ \underset{\substack{\shortparallel \\ f(b)}}{2} \ \leqslant \ f(4)$$
Or, d'après le théorème de la bijection, la fonction $f^{-1} :]1,+\infty[\to]1,+\infty[$ est strictement croissante (*(de même monotonie que* f). En appliquant f^{-1} de part et d'autre, on obtient :
$$f^{-1}\big(f(2)\big) \ \leqslant \ f^{-1}\big(f(b)\big) \ \leqslant \ f^{-1}\big(f(4)\big)$$

On en déduit : $2 \leqslant b \leqslant 4$.

Commentaire

L'indication de l'énoncé $\ln(2) \simeq 0,7$ ne permet pas de savoir si $0,7$ est une sur ou sous-approximation de $\ln(2)$. Il n'est d'ailleurs pas indiqué l'erreur de précision commise par une telle approximation. Il s'agit d'une valeur approchée à 10^{-1} près et on a l'encadrement : $0,6 \leqslant \ln(2) \leqslant 0,8$. Cette information serait certainement préférable pour résoudre plus rigoureusement cette question.

□

Partie II : Étude d'une suite

On pose : $u_0 = 4$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \ln(u_n) + 2$.

4. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie et que l'on a : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [b, +\infty[$.

Démonstration.

Démontrons par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$ où $\mathcal{P}(n) : \left\{ \begin{array}{l} u_n \text{ est bien défini} \\ u_n \in [b, +\infty[\end{array} \right.$

- **Initialisation** :
  Tout d'abord $u_0 = 4$. Or, d'après la question *3.*, $b \leqslant 4$. Donc : $u_0 \in [b, +\infty[$.
  D'où $\mathcal{P}(0)$.
- **Hérédité** : Soit $n \in \mathbb{N}$.
  Supposons $\mathcal{P}(n)$ et démontrons $\mathcal{P}(n+1)$ $\left(\textit{i.e.} \left\{ \begin{array}{l} u_{n+1} \text{ est bien défini} \\ u_{n+1} \in [b, +\infty[\end{array} \right. \right)$.

  Par hypothèse de récurrence, u_n est bien défini et $u_n \in [b, +\infty[$.
  - Comme $u_n \geqslant b \geqslant 2$, on a en particulier $u_n > 0$.
    Donc $\ln(u_n)$ est bien définie. D'où u_{n+1} est bien défini.
  - Comme $u_n \geqslant b$, on obtient, par stricte croissance de ln sur $]0, +\infty[$: $\ln(u_n) \geqslant \ln(b)$.
    On en déduit :
    $$u_{n+1} = \ln(u_n) + 2 \ \geqslant\ \ln(b) + 2$$
    Or, par définition de b : $f(b) = 2$, c'est-à-dire $b - \ln(b) = 2$.
    Donc : $\ln(b) = b - 2$.
    On en déduit : $u_{n+1} \geqslant b - \cancel{2} + \cancel{2} = b$. Ainsi : $u_{n+1} \in [b, +\infty[$.

  D'où $\mathcal{P}(n+1)$.

$$\boxed{\text{Par principe de récurrence, on obtient que } (u_n) \text{ est bien définie et : } \forall n \in \mathbb{N},\ u_n \in [b, +\infty[.}$$

Commentaire

Cette question est un classique de l'étude des suites récurrentes. Il faut savoir rédiger proprement la récurrence associée en commençant par bien énoncer l'hypothèse de récurrence.
Il s'agit de démontrer :

« **la suite** (u_n) est bien définie »

Pour ce faire, on démontre :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \mathcal{P}(n) \quad \text{où} \quad \mathcal{P}(n) : \textbf{le réel } u_n \text{ est bien défini}$$

De plus, pour s'assurer de pouvoir effectivement calculer $\ln(u_n)$, il faut être sûr que u_n soit dans l'ensemble de définition de ln. Ici, il s'agit donc de vérifier qu'à tout rang $n \in \mathbb{N}$, $u_n \neq 0$. On démontre en réalité une propriété plus forte, à savoir :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \mathcal{P}(n) \quad \text{où} \quad \mathcal{P}(n) : \left\{ \begin{array}{l} u_n \text{ est bien défini} \\ u_n \geqslant b \end{array} \right.$$

Démontrer une propriété plus forte que celle assurant la bonne définition de la suite (u_n) ne rend pas la démonstration plus difficile. Au contraire ! Tout se joue lors de l'étape d'hérédité : on aura plus de matériel mathématique si l'on suppose $u_n \geqslant b$ que si l'on suppose $u_n \neq 0$ ce qui facilite la suite de la démonstration.

□

5. Déterminer la monotonie de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. En déduire qu'elle converge et préciser sa limite.

Démonstration.

- Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$u_{n+1} - u_n \ = \ \ln(u_n) + 2 - u_n \ = \ 2 - (u_n - \ln(u_n)) \ = \ f(b) - f(u_n)$$

Or, d'après la question précédente : $u_n \geqslant b$.
De plus, par croissance de la fonction f sur $[b, +\infty[$: $f(u_n) \geqslant f(b)$.
D'où : $u_{n+1} - u_n = f(b) - f(u_n) \leqslant 0$.

$$\boxed{\text{Ainsi, la suite } (u_n) \text{ est décroissante.}}$$

Commentaire

On pouvait aussi démontrer la décroissance de la suite (u_n) par récurrence.
Démontrons par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$ où $\mathcal{P}(n)$: $u_{n+1} \leqslant u_n$.

- **Initialisation** :
  $u_1 = \ln(u_0) + 2 = \ln(4) + 2 = 2\ \ln(2) + 2 \simeq 2 \times 0,7 + 2 \simeq 3,4$.
  Donc $u_1 \leqslant u_0$.
  D'où $\mathcal{P}(0)$.
- **Hérédité** : Soit $n \in \mathbb{N}$.
  Supposons $\mathcal{P}(n)$ et démontrons $\mathcal{P}(n+1)$ (*i.e.* $u_{n+2} \geqslant u_{n+1}$).
  Par hypothèse de récurrence : $u_{n+1} \leqslant u_n$.
  On obtient donc, par croissance de ln sur $]0, +\infty[$: $\ln(u_{n+1}) \geqslant \ln(u_n)$. Ainsi :

$$u_{n+2} = \ln(u_{n+1}) + 2 \ \leqslant \ \ln(u_n) + 2 = u_{n+1}$$

  D'où $\mathcal{P}(n+1)$.

Par principe de récurrence, on en déduit : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} \leqslant u_n$.

- La suite (u_n) est donc :
  × décroissante,
  × minorée par b (car : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [b, +\infty[$).

$$\boxed{\text{On en déduit que la suite } (u_n) \text{ est converge de limite } \ell \geqslant b.}$$

- Déterminons précisément la valeur de ℓ.
  - Tout d'abord : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant b$.
    Par passage à limite, on en déduit : $\ell \geqslant b$.
  - Ensuite : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \ln(u_n) + 2$.
    La fonction ln étant continue sur $]0, +\infty[$, elle l'est en particulier en ℓ et ainsi :

$$\ell = \ln(\ell) + 2$$

Or :

$$\begin{array}{rcll} \ell = \ln(\ell) + 2 & \Leftrightarrow & \ell - \ln(\ell) = 2 & \\ & \Leftrightarrow & f(\ell) = 2 & \\ & \Leftrightarrow & \ell = b & \textit{(car d'après la question 2., b est l'unique solution de l'équation } f(x) = 2 \textit{ sur }]1, +\infty[) \end{array}$$

$$\boxed{\text{Ainsi : } \ell = b.}$$

□

6. a) Montrer : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} - b \leqslant \dfrac{1}{2}\,(u_n - b)$.

Démonstration.
On note g la fonction définie par $g : x \mapsto \ln(x) + 2$.

- La fonction g est dérivable sur $[b, +\infty[$ en tant que somme de fonctions dérivables sur $[b, +\infty[$.
  Soit $x \in [b, +\infty[$. On a : $g'(x) = \dfrac{1}{x} \geqslant 0$.
  Or, d'après la question ***3.***, $b \geqslant 2$. Donc, pour tout $x \in [b, +\infty[$: $x \geqslant b \geqslant 2$.
  Par décroissance de la fonction inverse sur $]0, +\infty[$, on en déduit : $\dfrac{1}{x} \leqslant \dfrac{1}{2}$.

  $$\boxed{\text{On en conclut : } \forall x \in [b, +\infty[,\ g'(x) \leqslant \frac{1}{2}.}$$

- D'après ce qui précède :
  × g est dérivable sur $[b, +\infty[$,
  × $\forall x \in [b, +\infty[,\ |g'(x)| \leqslant \dfrac{1}{2}$.
  On en déduit, par l'inégalité des accroissements finis :

  $$\forall (x, y) \in [b, +\infty[^2,\ |g(y) - g(x)| \ \leqslant\ \frac{1}{2}\ |y - x|$$

  Soit $n \in \mathbb{N}$. En appliquant cette inégalité à $y = u_n \in [b, +\infty[$ et $x = b \in [b, +\infty[$, on obtient :

  $$|g(u_n) - g(b)| \ \leqslant\ \frac{1}{2}\ |u_n - b|$$

  Or :
  × $g(u_n) = \ln(u_n) + 2 = u_{n+1}$
  × $g(b) = \ln(b) + 2 = (b - \cancel{2}) + \cancel{2} = b$, car b est solution de l'équation $f(x) = 2$.
  Enfin, d'après la question ***4.*** : $u_n \geqslant b$ et $u_{n+1} \geqslant b$.

  $$\boxed{\text{On en déduit : } \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} - b \leqslant \frac{1}{2}(u_n - b).}$$

□

b) En déduire : $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant u_n - b \leqslant \dfrac{1}{2^{n-1}}$.

Démonstration.

- Soit $n \in \mathbb{N}$. D'après la question ***4.*** : $u_n \geqslant b$.

  $$\boxed{\text{Donc : } u_n - b \geqslant 0.}$$

- Démontrons par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N},\ \mathcal{P}(n)$ où $\mathcal{P}(n) : u_n - b \leqslant \dfrac{1}{2^{n-1}}$.
  ▸ **Initialisation** :
  D'une part : $u_0 - b = 4 - b$.
  D'autre part : $\dfrac{1}{2^{0-1}} = \dfrac{1}{2^{-1}} = 2$.
  Or :

  $$u_0 - b \leqslant \frac{1}{2^{0-1}} \ \Leftrightarrow\ 4 - b \leqslant 2 \ \Leftrightarrow\ 2 \leqslant b$$

  La dernière assertion est vraie d'après la question ***3***.
  Donc, par équivalence, la première assertion l'est aussi.
  D'où $\mathcal{P}(0)$.

- **Hérédité** : soit $n \in \mathbb{N}$.
  Supposons $\mathcal{P}(n)$ et démontrons $\mathcal{P}(n+1)$ $\left(\textit{i.e.}\ u_{n+1} - b \leqslant \dfrac{1}{2^n} \right)$.
  D'après la question précédente : $0 \leqslant u_{n+1} - b \leqslant \dfrac{1}{2}\ (u_n - b)$.
  Or, par hypothèse de récurrence : $0 \leqslant u_n - b \leqslant \dfrac{1}{2^{n-1}}$.
  En combinant ces deux résultats, on obtient :
  $$u_{n+1} - b \ \leqslant\ \frac{1}{2}(u_n - b)\ \leqslant\ \frac{1}{2}\,\frac{1}{2^{n-1}} = \frac{1}{2^n}$$
  D'où $\mathcal{P}(n+1)$.

$$\boxed{\text{Par principe de récurrence : } \forall n \in \mathbb{N},\ u_n - b \leqslant \frac{1}{2^{n-1}}.}$$

□

7. a) Écrire une fonction **Scilab** d'en-tête `function u = suite(n)` qui, prenant en argument un entier n de $\mathbb{N}$, renvoie la valeur de u_n.

Démonstration.

```
1  function u = suite(n)
2      u = 4
3      for k = 1:n
4          u = log(u) + 2
5      end
6  endfunction
```

Détaillons les différents éléments de ce programme.
La variable `u` est créée pour contenir successivement les valeurs u_0, u_1, ..., u_n.

- On initialise donc cette variable à 4 (valeur de u_0) en ligne 2 :

```
2      u = 4
```

- On met ensuite à jour `u` de manière itérative en ligne 4

```
4      u = log(u) + 2
```

Commentaire

- On décrit ici les instructions afin de permettre une bonne compréhension des mécanismes en jeu. Cependant, l'écriture de la fonction démontre la compréhension de toutes les commandes en question et permet sans doute d'obtenir la totalité des points alloués à cette question.
- Si on souhaite calculer les n premiers termes de la suite (u_n), il faut introduire un tableau `tab` (contenant n cases) permettant de stocker chacun de ces éléments :

```
function tab = suite(n)
    tab = zeros(1, n)
    tab(1) = 4
    for k = 1:n-1
        tab(k+1) = log(tab(k)) + 2
    end
endfunction
```

□

b) Recopier et compléter la ligne 3 de la fonction **Scilab** suivante afin que, prenant en argument un réel `epsilon` strictement positif, elle renvoie une valeur approchée de b à `epsilon` près.

```
1 function b = valeur _approchee(epsilon)
2     n = 0
3     while ..........
4         n = n + 1
5     end
6     b = suite(n)
7 endfunction
```

Démonstration.

- On cherche ici à trouver un entier N tel que u_N est une valeur approchée de b à une précision ε près (fournie par l'utilisateur). Autrement dit, on souhaite exhiber $N \in \mathbb{N}$ tel que :

$$|u_N - b| \quad \leqslant \quad 10^{-3}$$

- Or, d'après la question ***6.b)*** : $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant u_n - b \leqslant \dfrac{1}{2^{n-1}}$.
- Il suffit alors de trouver $N \in \mathbb{N}$ tel que : $\dfrac{1}{2^{N-1}} \leqslant \varepsilon$.
Si c'est le cas, on obtient alors, par transitivité :

$$0 \leqslant u_N - b \leqslant \frac{1}{2^{N-1}} \leqslant \varepsilon$$

- On complète alors le programme **Scilab** de la façon suivante :

```
3     while 1 / 2 ^ (n-1) > epsilon
```

À la fin de la boucle, on est assuré que : $\dfrac{1}{2^{n-1}} \leqslant \varepsilon$ (on itère tant que ce n'est pas le cas).
Il reste alors à calculer la valeur approchée de b : on l'obtient par le caclul de u_n où n est la valeur obtenue à l'issue de cette boucle.

```
6     b = suite(n)
```

Commentaire

- Lorsqu'on écrit une boucle `while` il est préférable de s'assurer en amont de sa terminaison. C'est bien le cas ici. En effet, la suite $(\frac{1}{2^{n-1}})_{n \geqslant 1}$ est convergente de limite 0. Ce qui signifie :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant n_0,\ \left| \frac{1}{2^{n-1}} - 0 \right| < \varepsilon$$

Ainsi, quelle que soit la précision $\varepsilon > 0$ choisie au départ, on est toujours en mesure de trouver un rang n_0 à partir duquel on aura : $\dfrac{1}{2^{n-1}} < \varepsilon$.

- On pouvait déterminer, sans utiliser de boucle, un entier N tel que u_N est une valeur approchée à ε près de b. Pour ce faire, on remarque :

$$\frac{1}{2^{n-1}} \leqslant \varepsilon \quad \Leftrightarrow \quad 2^{n-1} \geqslant \frac{1}{\varepsilon} \quad \Leftrightarrow \quad (n-1)\ \ln(2) \geqslant \ln\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) \quad \Leftrightarrow \quad (n-1)\ \geqslant \frac{-\ln(\varepsilon)}{\ln(2)}$$

L'entier $N = \left\lceil \dfrac{-\ln(\varepsilon)}{\ln(2)} + 1 \right\rceil$ convient. $\square$

Partie III : Étude d'une fonction définie par une intégrale

On note Φ la fonction donnée par : $\Phi(x) = \displaystyle\int_x^{2x} \frac{1}{f(t)}\, dt$.

8. Montrer que Φ est bien définie et dérivable sur $]0, +\infty[$, et que l'on a :

$$\forall x \in\,]0, +\infty[,\ \Phi'(x) = \frac{\ln(2) - \ln(x)}{(x - \ln(x))(2x - \ln(2x))}$$

Démonstration.

- La fonction $\dfrac{1}{f}$ est continue sur $]0, +\infty[$ en tant qu'inverse d'une fonction continue sur $]0, +\infty[$ qui ne s'annule pas sur cet intervalle (en effet, d'après le tableau de variations de f en question ***1.*** : $\forall x \in\,]0, +\infty[,\ f(x) \geqslant 1$).

$$\boxed{\text{La fonction } \frac{1}{f} \text{ admet donc une primitive } G \text{ de classe } \mathcal{C}^1 \text{ sur }]0, +\infty[.}$$

- On obtient alors :
$$\forall x \in\,]0, +\infty[,\ \Phi(x) = G(2x) - G(x)$$
Or la fonction $x \mapsto G(2x)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$ car elle est la composée $G \circ h$ où :
  - × $h : x \mapsto 2x$ est :
    - de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$,
    - telle que $h(]0, +\infty[) \subset\,]0, +\infty[$.
  - × G est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$.

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{Ainsi, } \Phi \text{ est de classe } \mathcal{C}^1 \text{ sur }]0, +\infty[\text{ (donc dérivable sur }]0, +\infty[) \\ \text{en tant que différence de fonctions de classe } \mathcal{C}^1 \text{ sur }]0, +\infty[.\end{array}}$$

- Soit $x \in\,]0, +\infty[$.

$$\begin{array}{rcl} \Phi'(x) & = & 2\, G'(2x) - G'(x) \ = \ 2\, \dfrac{1}{f(2x)} - \dfrac{1}{f(x)} \\ & = & \dfrac{2}{2x - \ln(2x)} - \dfrac{1}{x - \ln(x)} \ = \ \dfrac{2(\cancel{x} - \ln(x)) - (\cancel{2x} - \ln(2x))}{(2x - \ln(2x))(x - \ln(x))} \\ & = & \dfrac{-2\ln(x) + \ln(2) + \ln(x)}{(x - \ln(x))(2x - \ln(2x))} \ = \ \dfrac{\ln(2) - \ln(x)}{(x - \ln(x))(2x - \ln(2x))} \end{array}$$

$$\boxed{\forall x \in\,]0, +\infty[,\ \Phi'(x) = \frac{\ln(2) - \ln(x)}{(x - \ln(x))(2x - \ln(2x))}}$$

□

9. En déduire les variations de Φ sur $]0, +\infty[$.

Démonstration.

- Soit $x \in\,]0, +\infty[$. D'après la question précédente, on a :
$$\Phi'(x) \ = \ \frac{\ln(2) - \ln(x)}{(x - \ln(x))(2x - \ln(2x))} \ = \ \frac{\ln(2) - \ln(x)}{f(x)\, f(2x)}$$
Or, d'après la question ***1.*** : $f(x) > 0$ et $f(2x) > 0$.
La quantité $\Phi'(x)$ est donc du signe de $\ln(2) - \ln(x)$. Or :
$$\begin{array}{rcl} \Phi'(x) > 0 & \Leftrightarrow & \ln(2) - \ln(x) > 0 \ \Leftrightarrow \ \ln(2) > \ln(x) \\ & \Leftrightarrow & 2 > x \end{array}$$
(car la fonction $\ln$ *est strictement croissante sur* $]0, +\infty[$*)*

On obtient le tableau de variations suivant :

x	0		2		$+\infty$
Signe de $\Phi'(x)$		$+$	0	$-$	
Variations de Φ		$\nearrow$	$\Phi(2)$	$\searrow$	

□

10. Montrer : $\forall x \in \,]0,+\infty[,\ 0 \leqslant \Phi(x) \leqslant x$.

Démonstration.
Soit $x \in \,]0,+\infty[$.

- D'après la question ***1.***, pour tout $t \in \,]0,x]$: $f(t) \geqslant 1$.
  On en déduit, par décroissance de la fonction inverse sur $]0,+\infty[$:
  $$\forall t \in \,]0,x],\ 0 \ \leqslant \ \frac{1}{f(t)} \ \leqslant \ 1$$
- Par croissance de l'intégration, les bornes étant dans l'ordre croissant ($x \leqslant 2x$ car $x \geqslant 0$) :
  $$\underbrace{\int_x^{2x} 0 \, dt}_{=\,0} \ \leqslant \ \underbrace{\int_x^{2x} \frac{1}{f(t)} \, dt}_{=\,\Phi(x)} \ \leqslant \ \underbrace{\int_x^{2x} 1 \, dt}_{=\,(2x-x)\times 1}$$

$$\boxed{\text{On a bien : } \forall x \in \,]0,+\infty[,\ 0 \leqslant \Phi(x) \leqslant x.}$$

Commentaire

- Le schéma de résolution de cette question est plutôt classique.
  Afin d'encadrer une intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t) \, dt$:
  1) on cherche d'abord à encadrer l'intégrande, c'est-à- dire montrer :
  $$\forall t \in [a,b],\ m \leqslant f(t) \leqslant M$$
  où m et M sont deux réels à déterminer grâce à l'étude de la fonction f,
  2) on utilise ensuite la croissance de l'intégration (si les bornes a et b sont dans l'ordre croissant, c'est-à-dire $a \leqslant b$) pour conclure :
  $$m(b-a) = \int_a^b m \, dt \ \leqslant \ \int_a^b f(t) \, dt \ \leqslant \ \int_a^b M \, dt = M(b-a)$$
- La difficulté de la question vient du fait que l'on compare une quantité $\Phi(x)$ qui s'écrit comme une intégrale à la quantité x qui n'est pas naturellement donnée sous la forme d'une intégrale. Dès qu'il s'agit de démontrer une inégalité dans laquelle l'un des membres est une intégrale, il y a fort à parier qu'on puisse écrire l'autre membre sous forme intégrale (avec les mêmes bornes). On peut alors utiliser l'idée exposée dans le point précédent.
- L'idée à retenir est que pour comparer deux intégrales, on commence systématiquement par comparer les deux intégrandes.

□

11. ***a)*** Montrer que Φ est prolongeable par continuité en 0.
On note encore Φ la fonction ainsi prolongée. Préciser alors $\Phi(0)$.

Démonstration.
D'après la question précédente : $\forall x \in \,]0,+\infty[,\ 0 \leqslant \Phi(x) \leqslant x$.
Or :

× $\lim\limits_{x\to 0} 0 = 0$.
× $\lim\limits_{x\to 0} x = 0$.

Donc, par théorème d'encadrement : $\lim\limits_{x\to 0} \Phi(x) = 0$.

> On en déduit que la fonction Φ est prolongeable par continuité et que ce prolongement, toujours noté Φ, vérifie $\Phi(0) = 0$.

□

b) Montrer : $\lim\limits_{x\to 0} \Phi'(x) = 0$.
On admet que la fonction Φ est alors dérivable en 0 et que $\Phi'(0) = 0$.

Démonstration.
D'après la question ***8.*** :

$$\forall x \in \,]0,+\infty[,\ \Phi'(x) = \frac{2}{f(2x)} - \frac{1}{f(x)}$$

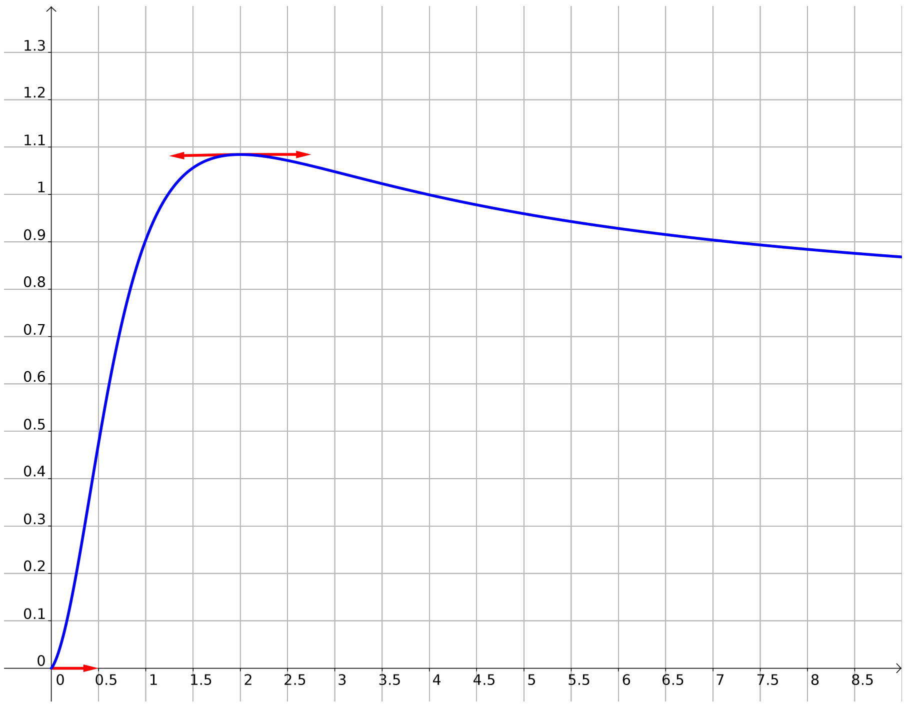
Or, d'après la question ***1.*** : $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = +\infty$.
Comme $\lim\limits_{x\to 0} 2x = 0$, par composition, on a aussi : $\lim\limits_{x\to 0} f(2x) = +\infty$.

> Ainsi : $\lim\limits_{x\to 0} \Phi'(x) = 0$.

□

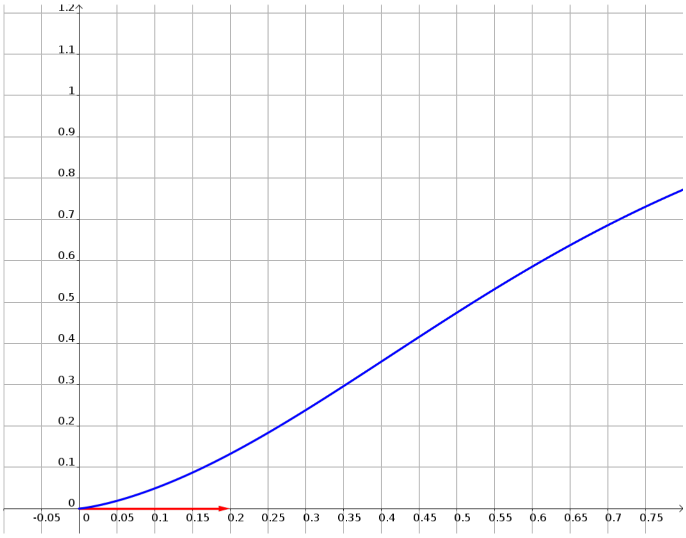
12. On donne $\Phi(2) \simeq 1,1$ et on admet que $\lim\limits_{x\to+\infty} \Phi(x) = \ln(2) \simeq 0,7$.
Tracer l'allure de la courbe représentative de la fonction Φ ainsi que la tangente à la courbe au point d'abscisse 0.

Démonstration.



Commentaire

Sur le graphe précédent, la tangente à l'origine ne semble pas être correcte.
En effet, comme son étymologie (le verbe latin « tangere ») l'indique, une tangente doit **toucher** la courbe, ce qui ne paraît pas être le cas ici. Cela est simplement dû à l'échelle de la figure : si on zoome sur l'origine du repère, on obtient le graphe suivant :



Sur une copie, il faut bien évidemment accentuer les tangentes à la courbe. □