DS2 (version A) /188

Exercice 1 /43

Partie I : Étude d'une suite récurrente /27

On considère une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 \in \mathbb{R}$ et : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \dfrac{u_n^2}{n+1}$.
On suppose : $u_0 > 0$.
On pose : $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = \dfrac{\ln(u_n)}{2^n}$.

1. Montrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie et : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n > 0$.

- **- 1 pt : initialisation**
- **- 2 pts : hérédité**
- **- 0 pt à la question en cas de faute flagrante ($\mathcal{P}(n)$ mal défini => récurrence non lue OU oubli de l'introduction du n OU supposition de $\forall n$, $\mathcal{P}(n)$ au lieu de $\mathcal{P}(n)$ . . .)**

2. a) Montrer que la série $\sum\limits_{k\geqslant 1} \dfrac{\ln(k)}{2^k}$ converge. Dans la suite, on note : $\sigma = -\sum\limits_{k=1}^{+\infty} \dfrac{\ln(k)}{2^k}$.

- **- 1 pt :** $\dfrac{\ln(n)}{2^n} \geqslant 0$ **et** $\dfrac{1}{n^2} \geqslant 0$
- **- 2 pts :** $\dfrac{\ln(n)}{2^n} \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$
- **- 1 pt :** $\sum \dfrac{1}{n^2}$ **converge**
- **- 1 pt : citation du critère de comparaison**

b) (i) Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, exprimer $v_k - v_{k-1}$ en fonction de k.
Puis déterminer la nature de la série $\sum\limits_{k\geqslant 1} (v_k - v_{k-1})$.

- **- 1 pt :** $v_k - v_{k-1} = -\dfrac{\ln(k)}{2^k}$
- **- 1 pt : utilisation de la question précédente et multiplication par** (-1)

(ii) En déduire que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge. Exprimer sa limite ℓ en fonction de u_0 et σ.

- **- 1 pt : télescopage** $\sum\limits_{k=1}^{n} (v_k - v_{k-1}) = v_n - v_0$
- **- 1 pt :** (v_n) **converge d'après la question précédente**
- **- 1 pt :** $\ell = \sigma + v_0$

3. On suppose dans cette question que $u_0 \neq \mathrm{e}^{-\sigma}$.

a) Déterminer le signe de ℓ
On pourra distinguer les cas $u_0 > e^{-\sigma}$ et $u_0 < e^{-\sigma}$.

- **- 2 pts :** $u_0 > \mathrm{e}^{-\sigma} \ \Leftrightarrow\ \ell > 0$ **(1 pt pour la stricte croissance de** $\exp$ **sur** $\mathbb{R}$**, 1 pt pour résultat)**
- **- 1 pt :** $u_0 < \mathrm{e}^{-\sigma} \ \Leftrightarrow\ \ell < 0$

b) En déduire la limite de $\big(\ln(u_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$, puis étudier le comportement en $+\infty$ de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

- 1 pt : si $u_0 > e^{-\sigma}$, alors $\ln(u_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$

- 1 pt : si $u_0 > e^{-\sigma}$, alors $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$

- 1 pt : si $u_0 < e^{-\sigma}$, alors $\ln(u_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty$ et $u_0 < e^{-\sigma}$, alors $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$

4. On suppose dans cette question : $u_0 = e^{-\sigma}$.

a) Vérifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $v_n = \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} \dfrac{\ln(k)}{2^k}$.

- 1 pt : $v_0 = -\sigma = \sum\limits_{k=1}^{+\infty} \dfrac{\ln(k)}{2^k}$

- 1 pt : $v_n = -\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{\ln(k)}{2^k} + v_0$

- 1 pt : $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} \dfrac{\ln(k)}{2^k} = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{\ln(k)}{2^k} + \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} \dfrac{\ln(k)}{2^k}$

b) En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

- 1 pt : $\ln(u_n) = \dfrac{\ln(n+1)}{2} + 2^n \sum\limits_{k=n+2}^{+\infty} \dfrac{\ln(k)}{2^k}$

- 1 pt : $\ln(u_n) \geqslant \dfrac{\ln(n+1)}{2}$ car $\sum\limits_{k=n+2}^{+\infty} \dfrac{\ln(k)}{2^k} \geqslant 0$

- 1 pt : $u_n \geqslant \exp\left(\dfrac{\ln(n+1)}{2}\right)$ et $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ par théorème de comparaison

Partie II : Approximation de σ /19

5. *a)* Montrer : $\forall x \in]0,+\infty[$, $\ln(x) \leqslant x$.

- 3 pts (1 pt pour concavité de $\ln$ sur $]0,+\infty[$, 1 pt pour l'équation de la tangente en 1 : $y = x-1$, 1 pt pour $x - 1 \leqslant x$)

b) En déduire : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} \dfrac{\ln(k)}{2^k} \leqslant \dfrac{n+1}{2^{n-1}}$.

- 1 pt : $\sum\limits_{k=n+1}^{m} \dfrac{\ln(k)}{2^k} \leqslant \sum\limits_{k=n+1}^{m} \dfrac{k}{2^k}$

- 1 pt : $\sum\limits_{k=n+1}^{m} k \left(\dfrac{1}{2}\right)^k = \sum\limits_{k=1}^{m-n} (k+n) \left(\dfrac{1}{2}\right)^{k+n}$

- 1 pt : $\sum\limits_{k=1}^{m-n} (k+n) \left(\dfrac{1}{2}\right)^{k+n} = \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n+1} \sum\limits_{k=1}^{m-n} k \left(\dfrac{1}{2}\right)^{k-1} + n \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n} \sum\limits_{k=1}^{m-n} \left(\dfrac{1}{2}\right)^{k}$

- 2 pts : $\sum\limits_{k\geqslant 1} k \left(\dfrac{1}{2}\right)^{k-1}$ série géométrique dérivée (1 pt pour $\dfrac{1}{2} \in]-1,1[$, 1 pt pour $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} k \left(\dfrac{1}{2}\right)^{k-1} = 4$)

- 1 pt : $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} \left(\dfrac{1}{2}\right)^{k-1} = 1$

- 1 pt : $\sum\limits_{k=n+1}^{m} \dfrac{k}{2^k} \underset{m\to+\infty}{\longrightarrow} \dfrac{n+2}{2^n}$

6. Montrer alors : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\left| \sigma - \left(-\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{\ln(k)}{2^k} \right) \right| \leqslant \frac{n+1}{2^{n-1}}$.

- **2 pts :** $\left| \sigma - \left(-\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{\ln(k)}{2^k} \right) \right| = \left| -\sum\limits_{k=1}^{+\infty} \frac{\ln(k)}{2^k} + \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{\ln(k)}{2^k} \right| = \left| \sum\limits_{k=1}^{+\infty} \frac{\ln(k)}{2^k} - \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{\ln(k)}{2^k} \right|$
- **1 pt :** $\left| \sum\limits_{k=1}^{+\infty} \frac{\ln(k)}{2^k} - \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{\ln(k)}{2^k} \right| = \left| \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} \frac{\ln(k)}{2^k} \right| = \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} \frac{\ln(k)}{2^k} \leqslant \frac{n+2}{2^n}$

7. Écrire une fonction **Scilab** d'entête `function sigma = approx(epsilon)` qui, prenant en argument un réel ε strictement positif, renvoie une valeur approchée de σ à ε près.

- **5 pts (1 pt pour structure `function`, 1 pt pour initialisation, 2 pts pour boucle `while`, 1 pt pour sortie)**

```
function sigma = approx(eps)
    N = 1
    S = 0
    while (N+2) / 2 ^ N > eps
      S = S + log(N) / 2 ^ N
      N = N + 1
    end
    sigma = -S
endfunction
```

Exercice 2 /44

On note $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_4(\mathbb{R})$.

1. a) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Montrer :

$$A - \lambda \cdot I_4 \text{ non inversible} \quad \Leftrightarrow \quad \lambda \in \{-2, -1, 1, 2\}$$

- **3 pts :** $\text{rg}(A - \lambda \cdot I_4) = \text{rg}\left(\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & -\lambda \\ 0 & 1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4-\lambda^2 \end{pmatrix}\right)$
- **1 pt : réduite triangulaire donc non inversible ssi au moins l'un de ses coeff est nul**
- **1 pt :** $A - \lambda \cdot I_4$ **non inversible ssi** $\lambda \in \{-2, -1, 1, 2\}$

b) On définit les ensembles suivants :

$$\begin{array}{rcl} E_{-2}(A) & = & \{X \in \mathscr{M}_{4,1}(\mathbb{R}) \mid AX = -2X\} \\ E_{-1}(A) & = & \{X \in \mathscr{M}_{4,1}(\mathbb{R}) \mid AX = -X\} \\ E_{1}(A) & = & \{X \in \mathscr{M}_{4,1}(\mathbb{R}) \mid AX = X\} \\ E_{2}(A) & = & \{X \in \mathscr{M}_{4,1}(\mathbb{R}) \mid AX = 2X\} \end{array}$$

Montrer que ce sont des espaces vectoriels et déterminer une base de chacun d'entre eux.
En déduire leurs dimensions.

- **4 pts :** $E_{-2}(A) = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ **(1 pt pour écriture système** $\left\{\begin{array}{rcrcrcrcl} 2x & & & & & + & 2t & = & 0 \\ & & 2y & + & z & & & = & 0 \\ & & y & + & 2z & & & = & 0 \\ 2x & & & & & + & 2t & = & 0 \end{array}\right.$,
  2 pts pour résolution $\left\{\begin{array}{rcl} x & = & -t \\ y & = & 0 \\ z & = & 0 \end{array}\right.$ **, 1 pt pour écriture sous forme de sev engendré)**
- **1 pt :** $\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ **base de** $E_{-2}(A)$ **(caractère générateur + caractère libre)**
- **1 pt :** $\dim(E_{-2}(A)) = 1$
- **2 pts :** $E_{-1}(A) = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$**, donner une base et sa dimension**
- **2 pts :** $E_{1}(A) = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$**, donner une base et sa dimension**
- **2 pts :** $E_{2}(A) = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$**, donner une base et sa dimension**

2. Montrer que la matrice $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ est inversible et déterminer P^{-1}.

- 3 pts : $P^{-1} = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

3. Déterminer la matrice $D = P^{-1}AP$.

- 1 pt : $AP = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ **ou** $P^{-1}A = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

- 1 pt : $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

On appelle commutant de A, et on note C_A, l'ensemble des matrices M de $\mathscr{M}_4(\mathbb{R})$ telles que

$$AM = MA$$

On appelle commutant de D, et on note C_D, l'ensemble des matrices N de $\mathscr{M}_4(\mathbb{R})$ telles que

$$DN = ND$$

4. Montrer que C_A est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_4(\mathbb{R})$.

- 1 pt : $C_A \subset \mathscr{M}_4(\mathbb{R})$

- 1 pt : $0 \in C_A$

- 2 pts : stabilité par combinaison linéaire

5. Soit $M \in \mathscr{M}_4(\mathbb{R})$. On note $N = P^{-1}MP$. Montrer :

$$M \in C_A \Longleftrightarrow N \in C_D$$

- 2 pts

6. Déterminer C_D, en utilisant les coefficients des matrices.

- 1 pt : $DN = \begin{pmatrix} -2x_1 & -2x_2 & -2x_3 & -2x_4 \\ -x_5 & -x_6 & -x_7 & -x_8 \\ x_9 & x_{10} & x_{11} & x_{12} \\ 2x_{13} & 2x_{14} & 2x_{15} & 2x_{16} \end{pmatrix}$

- 1 pt : $ND = \begin{pmatrix} -2x_1 & -x_2 & x_3 & 2x_4 \\ -2x_5 & -x_6 & x_7 & 2x_8 \\ -2x_9 & -x_{10} & x_{11} & 2x_{12} \\ -2x_{13} & -x_{14} & x_{15} & 2x_{16} \end{pmatrix}$

- 1 pt : $N \in C_D \;\Leftrightarrow\; \left\{ \begin{array}{l} x_2 = x_3 = x_4 = 0 \\ x_5 = x_7 = x_8 = 0 \\ x_9 = x_{10} = x_{12} = 0 \\ x_{13} = x_{14} = x_{15} = 0 \end{array} \right.$

- **1 pt :** $C_D = \{\begin{pmatrix} x_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x_6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x_{11} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x_{16} \end{pmatrix} \mid (x_1, x_6, x_{11}, x_{16}) \in \mathbb{R}^4\}$

7. En déduire :

$$C_A = \{\begin{pmatrix} a & 0 & 0 & b \\ 0 & c & d & 0 \\ 0 & d & c & 0 \\ b & 0 & 0 & a \end{pmatrix} \mid (a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4\}$$

- **2 pts :** $C_A = \{ P \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_4 \end{pmatrix} P^{-1} \mid (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4) \in \mathbb{R}^4 \}$
- **1 pt :** $P \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \lambda_4 \\ 0 & \lambda_2 & \lambda_3 & 0 \\ 0 & -\lambda_2 & \lambda_3 & 0 \\ -\lambda_1 & 0 & 0 & \lambda_4 \end{pmatrix}$
- **1 pt :** $P \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_4 \end{pmatrix} P^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \lambda_1 + \lambda_4 & 0 & 0 & -\lambda_1 + \lambda_4 \\ 0 & \lambda_2 + \lambda_3 & -\lambda_2 + \lambda_3 & 0 \\ 0 & -\lambda_2 + \lambda_3 & \lambda_2 + \lambda_3 & 0 \\ -\lambda_1 + \lambda_4 & 0 & 0 & \lambda_1 + \lambda_4 \end{pmatrix}$
- **1 pt :** $C_A \subseteq \{ \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & b \\ 0 & c & d & 0 \\ 0 & d & c & 0 \\ b & 0 & 0 & a \end{pmatrix} \mid (a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4 \}$
- **1 pt :** $A \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & b \\ 0 & c & d & 0 \\ 0 & d & c & 0 \\ b & 0 & 0 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2b & 0 & 0 & 2a \\ 0 & d & c & 0 \\ 0 & c & d & 0 \\ 2a & 0 & 0 & 2b \end{pmatrix}$
- **1 pt :** $\begin{pmatrix} a & 0 & 0 & b \\ 0 & c & d & 0 \\ 0 & d & c & 0 \\ b & 0 & 0 & a \end{pmatrix} A = \begin{pmatrix} 2b & 0 & 0 & 2a \\ 0 & d & c & 0 \\ 0 & c & d & 0 \\ 2a & 0 & 0 & 2b \end{pmatrix}$

8. Déterminer une base de C_A et la dimension de C_A.

- **1 pt :** $C_A = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right)$
- **1 pt : $\mathcal{F}$ engendre C_A**
- **2 pts : $\mathcal{F}$ est libre**
- **1 pt :** $\dim(C_A) = 4$

Problème /106

Partie I – Des exemples /24

Dans cette partie I, on suppose que les variables U_k suivent la loi de Bernoulli de paramètre p, où p est un réel de l'intervalle $]0,1[$.

1. Pour n dans $\mathbb{N}^*$, quelle est la loi de X_n ?

- 1 pt : $X_n \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p)$ (0 si l'indépendance n'est pas citée)

2. Pour tout entier naturel j, établir : $r_j = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}([X_n = j])\, p_n$.

- 1 pt : $([N = n])_{n\in\mathbb{N}}$ SCE

- 1 pt : FPT

- 1 pt : $[N = n] \cap [X = j] = [N = n] \cap [X_n = j]$

- 1 pt : N et X_n indépendantes par lemme des coalitions

3. Dans cette question *3.*, on suppose que N suit la loi binomiale de paramètres m, entier naturel, et π, réel dans $]0,1[$. Soit j un entier naturel.

a) Justifier que $r_j = 0$ si $j > m$.

- 1 pt : $X(\Omega) \subset [\![0,m]\!]$

- 1 pt : si $j > m$, $[X = j] = \varnothing$

b) Établir que pour tout $j \in [\![0,m]\!]$: $r_j = \sum\limits_{n=j}^{m} \binom{n}{j} p^j\,(1-p)^{n-j} \binom{m}{n} \pi^n\,(1-\pi)^{m-n}$.

- 1 pt : utilisation qst *2.* avec $([N = n])_{n\in[\![0,m]\!]}$ SCE

- 1 pt : découpage somme

- 1 pt : $r_j = \sum\limits_{n=j}^{m} \mathbb{P}([X_n = j])\,\mathbb{P}([N = n])$

- 1 pt : $X_n \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p)$ et $N \hookrightarrow \mathcal{B}(m,\pi)$

c) Vérifier que pour tous entiers j, n, m tels que $0 \leqslant j \leqslant n \leqslant m$: $\binom{n}{j}\binom{m}{n} = \binom{m}{j}\binom{m-j}{n-j}$.

- 2 pts

d) En déduire, pour tout $j \in [\![0,m]\!]$: $r_j = \binom{m}{j} (p\pi)^j \sum\limits_{\ell=0}^{m-j} \binom{m-j}{\ell} \big((1-p)\pi\big)^{\ell}\,(1-\pi)^{m-j-\ell}$.

- 1 pt : utilisation *3.b)* et *3.c)* ($r_j = \binom{m}{j} p_j \sum\limits_{n=j}^{m} \binom{m-j}{n-j} (1-p)^{n-j}\pi^n(1-\pi)^{m-n}$)

- 1 pt : décalage d'indice ($r_j = \binom{m}{j} p_j \sum\limits_{\ell=0}^{m-j} \binom{m-j}{\ell} (1-p)^{\ell}\pi^{\ell+j}(1-\pi)^{m-(\ell+j)}$)

- 1 pt : $r_j = \binom{m}{j} (p\pi)^j \sum\limits_{\ell=0}^{m-j} \binom{m-j}{\ell} \big((1-p)\pi\big)^{\ell}\,(1-\pi)^{m-j-\ell}$

e) Montrer finalement que X suit une loi binomiale et préciser ses paramètres en fonction de m, p et π.

- 2 pts (1 pt pour formule du binôme de Newton, 1 pt pour reste du calcul)

4. On suppose dans cette question *4.* que N suit la loi de Poisson de paramètre λ, réel strictement positif.

a) Montrer que pour tout entier naturel j, on a :

$$r_j = \mathrm{e}^{-j} \frac{(\lambda\, p)^j}{j!} \sum_{n=j}^{+\infty} \frac{1}{(n-j)!} \big(\lambda(1-p)\big)^{n-j}$$

- **1 pt :** $r_j = \sum\limits_{n=j}^{+\infty} \mathbb{P}([X_n = j])\, \mathbb{P}([N = n])$
- **2 pts :** $r_j = \mathrm{e}^{-j} \dfrac{(\lambda\, p)^j}{j!} \sum\limits_{n=j}^{+\infty} \dfrac{1}{(n-j)!} \big(\lambda(1-p)\big)^{n-j}$

b) En déduire que X suit une loi de Poisson, et préciser son paramètre en fonction de p et λ.

- **3 pts (1 pt pour décalage d'indice, 1 pt pour la série exponentielle de paramètre $\lambda(1-p)$, 1 pt pour $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda\, p)$)**

Partie II – La loi binomiale négative /52

On généralise la définition des coefficients binomiaux aux nombres réels en posant, pour tout y réel et tout entier $k \in \mathbb{N}^*$: $\dbinom{y}{k} = \dfrac{1}{k!} \prod\limits_{i=0}^{k-1} (y-i)$, et $\dbinom{y}{0} = 1$.

5. Écrire une fonction en **Scilab** d'entête `function c = CoeffBin(y, k)` qui calcule $\dbinom{y}{k}$.

- **5 pts (1 pt pour la structure de fonction, 1 pt pour l'initialisation, 1 pt pour la structure conditionnelle, 2 points pour la structure itérative)**

```
function c = CoeffBin(y, k)
  c = 1
  if k >= 1 then
    for i = 0:(k-1)
      c = c * (y - i) / (i + 1)
    end
  end
endfunction
```

6. *La formule du binôme négatif.*
Soit c un réel strictement positif, et x un réel de $[0,1[$.
Pour tout entier naturel n, on pose $I_n = \displaystyle\int_0^x \frac{(x-t)^n}{(1-t)^{c+n+1}}\, dt$.
On admet le résultat suivant :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \frac{1}{(1-x)^c} \ = \ \sum_{k=0}^{n} \binom{c+k-1}{k} x^k + c \binom{c+n}{n} I_n$$

a) Vérifier que pour tout $t \in [0,x]$: $0 \leqslant \dfrac{x-t}{1-t} \leqslant x$.
En déduire l'encadrement : $0 \leqslant I_n \leqslant \dfrac{x^{n+1}}{(1-x)^{c+1}}$.

- **1 pt :** $0 \leqslant \dfrac{x-t}{1-t} \leqslant x \ \Leftrightarrow \ x \geqslant t \geqslant xt$
- **1 pt :** $xt \leqslant t$ **car** $x \in [0,1[$
- **1 pt :** $0^n \leqslant \left(\dfrac{x-t}{1-t}\right)^n \leqslant x^n$ **par stricte croissance de la fonction** $t \mapsto t^n$ **sur** $[0,+\infty[$
- **1 pt :** $0 \leqslant \dfrac{(x-t)^n}{(1-t)^{n+c+1}} \leqslant \dfrac{x^n}{(1-t)^{c+1}}$ **car** $\dfrac{1}{(1-t)^{c+1}} > 0$
- **1 pt :** $0 \leqslant \dfrac{(x-t)^n}{(1-t)^{n+c+1}} \leqslant \dfrac{x^n}{(1-x)^{c+1}}$ **par stricte croissance de la fonction** $t \mapsto t^{c+1}$ **sur** $[0,+\infty[$
- **1 pt : croissance de l'intégration, les bornes étant dans l'ordre croissant** $(0 \leqslant x)$
- **1 pt :** $\displaystyle\int_0^x \frac{x^n}{(1-x)^{c+1}}\, dt = \frac{x^{n+1}}{(1-x)^{c+1}}$
- **2 pts : cas** $n = 0$

b) (i) Montrer, pour tout n dans $\mathbb{N}^*$: $\dbinom{c+n}{n} = \displaystyle\prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{c}{k}\right)$.

- **2 pts (1 pt pour changement d'indice** $k = n - i$**, 1 pt pour reste)**

(ii) Montrer que pour tout réel t positif, $\ln(1+t) \leqslant t$.

- **2 pts (1 pt pour concavité de** $t \mapsto \ln(1+t)$ **sur** $[0,+\infty[$**, 1 pt pour équation de tangente en** 0**)**

(iii) Établir, pour tout entier naturel $k \geqslant 2$: $\dfrac{1}{k} \leqslant \ln(k) - \ln(k-1)$.
En déduire : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \leqslant 1 + \ln(n)$.

- **2 pts : (1 pt pour** $\dfrac{1}{k} \leqslant \ln(k) - \ln(k-1) \ \Leftrightarrow \ \dfrac{1}{k} \leqslant \ln(k) - \ln(k-1)$**, 1 pt pour** $k \geqslant 2 \ \Rightarrow \ -\dfrac{1}{k} \in \,]-1,+\infty[$**)** `OU` **(comparaison série-intégrale)** `OU` **(IAF)**
- **2 pts :** $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \leqslant 1 + \ln(n)$ **(1 pt pour sommation de** 2 **à** n**, 1 pt pour ajouter** 1**)**

(iv) Montrer que pour tout n dans $\mathbb{N}^*$: $\ln\left(\binom{c+n}{n}\right) \leqslant c\,(1+\ln(n))$.

En déduire : $\lim\limits_{n\to+\infty} \binom{c+n}{n} x^{n+1} = 0$.

- 1 pt : $\ln\left(\binom{c+n}{n}\right) = \sum\limits_{k=1}^{n} \ln\left(1+\frac{c}{k}\right)$ ***(6.b)(i))***

- 1 pt : $\sum\limits_{k=1}^{n} \ln\left(1+\frac{c}{k}\right) \leqslant c \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ ***(6.b)(ii))***

- 1 pt : $c \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \leqslant c(1+\ln(n))$ ***(6.b)(iii))***

- 1 pt : $\binom{c+n}{n} \leqslant \exp\big(c(1+\ln(n))\big)$ **(croissance de** $\exp$ **sur** $\mathbb{R}$**)**

- 1 pt : $\exp(c+c\,\ln(n))\,x^{n+1} = \exp\left(n\,\ln(x)\left(\frac{c+\ln(x)}{n\,\ln(x)} + \frac{c\,\ln(n)}{n\,\ln(x)} + 1\right)\right)$

- 1 pt : $\lim\limits_{n\to+\infty} \exp\left(n\,\ln(x)\left(\frac{c+\ln(x)}{n\,\ln(x)} + \frac{c\,\ln(n)}{n\,\ln(x)} + 1\right)\right) = 0$

- 1 pt : $\lim\limits_{n\to+\infty} \binom{c+n}{n} x^{n+1} = 0$ **par théorème d'encadrement**

c) En conclure que la série $\sum\limits_{k\geqslant 0} \binom{c+k-1}{k} x^k$ est convergente, et établir la formule du binôme négatif :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \binom{c+k-1}{k} x^k = \frac{1}{(1-x)^c}$$

- 1 pt : $0 \leqslant c\binom{c+n}{n} I_n \leqslant \frac{c}{(1-x)^{c+1}} \binom{c+n}{n} x^{n+1}$ ***(6.a))***

- 1 pt : $\lim\limits_{n\to+\infty} c\binom{c+n}{n} I_n = 0$ **par théorème d'encadrement (*6.b*))**

- 1 pt : $\sum\limits_{k\geqslant 0} \binom{c+k-1}{k} x^k$ **converge et :** $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} \binom{c+k-1}{k} x^k = \frac{1}{(1-x)^c}$ **(avec égalité de l'énoncé)**

7. Soit p un réel de $]0,1[$ et r un réel strictement positif. Montrer que la suite de nombres $(p_k)_{k\in\mathbb{N}}$ définie par $p_k = \binom{r+k-1}{k}(1-p)^k\,p^r$ définit une loi de probabilité d'une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$. On l'appelle *loi binomiale négative* de paramètres r et p.

- 1 pt : $\forall k \in \mathbb{N}$**,** $p_k \geqslant 0$

- 2 pts : $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} p_k = 1$ **(1 pt pour application de la question précédente à** $c = r$ **et** $x = 1-p$**, 1 pt pour le reste)**

8. Si Y est une variable aléatoire suivant la loi binomiale négative de paramètres 1 et p, reconnaître la loi de $Y+1$.

- 1 pt : $(Y+1)(\Omega) = \mathbb{N}^*$

- 1 pt : $\mathbb{P}([Y+1=k]) = p_{k-1} = (1-p)^{k-1}\,p$

- 1 pt : $Y \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$

9. *Espérance et variance.*
Soit Z une variable aléatoire suivant la loi binomiale négative de paramètres r réel strictement positif et $p \in \,]0,1[$.

a) Montrer que pour tout entier $k \geqslant 1$: $k \dbinom{r+k-1}{k} = r \dbinom{r+k-1}{k-1}$.

- 2 pts

b) Montrer que Z admet une espérance et que l'on a : $\mathbb{E}(Z) = \dfrac{r(1-p)}{p}$.

- 1 pt : Z admet une espérance si et seulement si la série $\sum\limits_{n \geqslant 0} n\, \mathbb{P}([Z = n])$ est absolument convergente. Cette série étant à termes positifs, cela revient à démontrer qu'elle est convergente

- 1 pt : $\sum\limits_{k=0}^{n} k\, \mathbb{P}([Z = k]) = r\ \dfrac{1-p}{p} \sum\limits_{k=0}^{n-1} \dbinom{(r+1)+k-1}{k} (1-p)^k\, p^{r+1}$

- 2 pts : $r\ \dfrac{1-p}{p} \sum\limits_{k=0}^{n-1} \dbinom{(r+1)+k-1}{k} (1-p)^k\, p^{r+1} = r\ \dfrac{1-p}{p} \sum\limits_{k=0}^{n-1} \mathbb{P}([W = k])$ **(où W suit la loi binomiale négative de paramètres $r+1$ et p)**

- 1 pt : $([W = k])_{k \in \mathbb{N}}$ **SCE, donc** $\sum\limits_{n \geqslant 0} \mathbb{P}([W = n])$ **converge et sa somme vaut** 1

- 1 pt : Z admet une espérance et $\mathbb{E}(Z) \ = \ r\ \dfrac{1-p}{p}$

c) Montrer que Z admet une variance et que l'on a : $\mathbb{V}(Z) = \dfrac{r(1-p)}{p^2}$.
On pourra commencer par calculer l'espérance de $Z(Z-1)$.

- 1 pt : $Z(Z-1)$ admet une espérance si et seulement si la série $\sum\limits_{n \geqslant 0} n(n-1)\, \mathbb{P}([Z = n])$ est absolument convergente. Cette série étant à termes positifs, cela revient à démontrer qu'elle est convergente.

- 3 pts : $\sum\limits_{k=0}^{n} k(k-1)\, \mathbb{P}([Z = k]) = r\ \dfrac{1-p}{p} \sum\limits_{k=0}^{n-1} k\, \mathbb{P}([W = k])$ **(où W suit la loi binomiale négative de paramètres $r+1$ et p)**

- 1 pt : W admet une espérance et $\mathbb{E}(W) = (r+1)\ \dfrac{1-p}{p}$

- 1 pt : $Z(Z-1)$ admet une espérance et $\mathbb{E}\big(Z(Z-1)\big) \ = \ (r+1)r\ \left(\dfrac{1-p}{p}\right)^2$

- 1 pt : $Z^2 \ = \ Z(Z-1) + Z$ **donc Z^2 admet une espérance**

- 1 pt : $\mathbb{E}(Z^2) = (r+1)r\ \left(\dfrac{1-p}{p}\right)^2 + r\ \dfrac{1-p}{p}$

- 1 pt : formule de Koenig-Huygens

- 1 pt : $\mathbb{V}(Z) \ = \ r\ \dfrac{1-p}{p^2}$

Partie III – Les lois de Panjer /30

On reprend les notations du début du problème : la variable aléatoire N à valeurs dans $\mathbb{N}$ a sa loi donnée par $p_k = \mathbb{P}([N = k])$ pour $k \in \mathbb{N}$.
On suppose dans toute la suite du sujet que la loi de N vérifie la relation de Panjer : il existe deux réels a et b, avec $a < 1$ et $a + b > 0$, tels que :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad p_k = \left(a + \frac{b}{k}\right) p_{k-1}$$

On dira alors que N suit la loi $\mathcal{P}(a, b)$.

10. *Détermination des lois de Panjer.*

a) Montrer que pour tout entier k strictement positif, on a : $p_k = p_0 \prod\limits_{i=1}^{k} \left(a + \dfrac{b}{i}\right)$.

- 1 pt : initialisation

- 2 pts : hérédité

b) Dans cette question, on suppose que $a = 0$.
Montrer que N suit une loi de Poisson de paramètre b.

- 1 pt : $p_k = p_0 \dfrac{b^k}{k!}$

- 1 pt : FPT : $1 = p_0 + \sum\limits_{k=1}^{+\infty} p_k$

- 1 pt : série exponentielle $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} p_k = p_0 \left(\mathrm{e}^b - 1\right)$

- 1 pt : $p_0 = \mathrm{e}^{-b}$ **et** $N \hookrightarrow \mathcal{P}(b)$

c) Dans cette question, on suppose que $a < 0$.

(i) Montrer qu'il existe un unique entier naturel r, tel que : $\forall k > r$, $p_k = 0$ et $\forall k \leqslant r$, $p_k \neq 0$.
On pourra raisonner par l'absurde, et supposer les p_k tous strictement positifs.

- 2 pts : le choix de $k_0 = \left\lceil -\dfrac{b}{a} - 1 \right\rceil$ **permet d'obtenir** $p_{k_0} < 0$

- 2 pts : $r = s - 1$ **où** $s = \min\ (\{i \in \mathbb{N} \mid p_i = 0\})$

Noter généreusement et valoriser toute prise d'initiative.

(ii) Montrer : $b = -a(r + 1)$.

- 1 pt : $p_{r+1} = \left(a + \dfrac{b}{r+1}\right) p_r = 0$

- 1 pt : conclusion $b = -a(r + 1)$

(iii) Établir que pour tout $k \in [\![0, r]\!]$, $p_k = (-a)^k \dbinom{r}{k} p_0$.
En déduire que $p_0 = \dfrac{1}{(1 - a)^r}$.

- 1 pt : pour tout $k \in [\![1, r]\!]$**,** $p_k = p_0\ (-a)^k\ \binom{r}{k}$ **par calcul**

- 1 pt : cas $k = 0$

- 1 pt : $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}([N = k]) = 1$

- 1 pt : reste du calcul et conclusion $p_0 = \dfrac{1}{(1 - a)^r}$

(iv) En conclure que N suit une loi binomiale et préciser les paramètres en fonction de a et b.

- **1 pt : pour tout** $k \in [\![0, r]\!]$**,** $\mathbb{P}([N = k]) = \binom{r}{k} \left(-\dfrac{a}{1-a}\right)^k \left(\dfrac{1}{1-a}\right)^{r-k}$
- **1 pt : si** $k \geqslant r+1$**,** $\mathbb{P}([N = k]) = 0$
- **1 pt : finalement :** $N \hookrightarrow \mathcal{B}\left(-\dfrac{b}{a} - 1, -\dfrac{a}{1-a}\right)$

d) Dans cette question, on suppose que $a > 0$.

(i) Montrer que pour tout entier naturel k, on a : $p_k = \binom{\frac{b}{a} + k}{k} a^k \, p_0$.

- **2 pts : calcul**

(ii) En déduire que N suit une loi binomiale négative et préciser ses paramètres en fonction de a et b.

- **1 pt :** $1 = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}([N = k]) \; = \; \sum\limits_{k=0}^{+\infty} p_k$
- **1 pt :** $p_0 = (1-a)^{\frac{b}{a}+1}$
- **1 pt :** N **suit la loi binomiale négative de paramètres** $\dfrac{b}{a} + 1$ **et** $1 - a$ **(car** $p_k = \binom{(\frac{b}{a}+1)+k-1}{k} a^k$**)**

11. Montrer que, dans tous les cas, N admet une espérance et une variance, et qu'elles sont données par : $\mathbb{E}(N) = \dfrac{a+b}{1-a}$ et $\mathbb{V}(N) = \dfrac{a+b}{(1-a)^2}$.

- **1 pt : cas** $a = 0$ **:** $N \hookrightarrow \mathcal{P}(b)$ **et** $\mathbb{E}(N) = b = \dfrac{0+b}{1-0}$ **et** $\mathbb{V}(N) = b = \dfrac{0+b}{(1-0)^2}$
- **1 pt : cas** $a < 0$ **:** $N \hookrightarrow \mathcal{B}\left(-\dfrac{b}{a} - 1, -\dfrac{a}{1-a}\right)$ **donc la v.a.r.** N **admet donc une espérance et une variance**
- **1 pt : cas** $a < 0$ **:** $\mathbb{E}(N) = \dfrac{a+b}{1-a}$ **et** $\mathbb{V}(N) = \dfrac{a+b}{(1-a)^2}$
- **1 pt : cas** $a > 0$ **:** N **suit une loi binomiale négative de paramètres** $\dfrac{b}{a} + 1$ **et** $1 - a$ **donc admet une espérance et une variance**
- **1 pt :** $\mathbb{E}(N) = \dfrac{a+b}{1-a}$ **et** $\mathbb{V}(N) = \dfrac{a+b}{(1-a)^2}$