DS2 (version B)

Exercice 1 (Inspiré Oral ESCP 2018)

Partie I : Étude d'une suite récurrente

On considère une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 \in \mathbb{R}$ et : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \dfrac{u_n^2}{n+1}$.
On suppose : $u_0 > 0$.
On pose : $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = \dfrac{\ln(u_n)}{2^n}$.

1. Montrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie et : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n > 0$.

Démonstration.

- Démontrons par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N},\ \mathcal{P}(n)$ où $\mathcal{P}(n)$: $u_n > 0$.
  - **Initialisation** :
    D'après l'énoncé : $u_0 > 0$.
    D'où $\mathcal{P}(0)$.
  - **Hérédité** : soit $n \in \mathbb{N}$.
    Supposons $\mathcal{P}(n)$ et démontrons $\mathcal{P}(n+1)$ (*i.e.* $u_{n+1} > 0$).
    Par hypothèse de récurrence, $u_n > 0$.
    - Comme $u_n > 0$, alors $u_n^2 > 0$ (car la fonction $x \mapsto x^2$ est strictement croissante sur $]0, +\infty[$).
    - Comme de plus $n+1 > 0$ alors $u_{n+1} = \dfrac{u_n^2}{n+1} > 0$.

    D'où $\mathcal{P}(n+1)$.

  $$\boxed{\text{Par principe de récurrence, on en conclut : } \forall n \in \mathbb{N},\ u_n > 0.}$$

- Soit $n \in \mathbb{N}$.
  - Comme $u_n > 0$, alors la quantité $\ln(u_n)$ est bien définie.
  - De plus, $2^n \neq 0$.

  On en déduit que la quantité $v_n = \dfrac{\ln(u_n)}{2^n}$ est bien définie.

  $$\boxed{\text{Ainsi, la suite } (v_n) \text{ est bien définie.}}$$

Commentaire

Démontrer qu'une suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie, c'est démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, la quantité v_n est bien définie.

□

2. a) Montrer que la série $\sum\limits_{k\geqslant 1} \dfrac{\ln(k)}{2^k}$ converge. Dans la suite, on note : $\sigma = -\sum\limits_{k=1}^{+\infty} \dfrac{\ln(k)}{2^k}$.

Démonstration.
On a :

× $\forall n \geqslant 1,\ \dfrac{\ln(n)}{2^n} \geqslant 1$ et $\dfrac{1}{n^2} \geqslant 0$.

× $\dfrac{\ln(n)}{2^n} \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$. En effet :

$$\frac{\frac{\ln(n)}{2^n}}{\frac{1}{n^2}} = \frac{\ln(n)}{2^n}\, n^2 = \frac{\ln(n)}{(\sqrt{2})^n}\ \frac{n^2}{(\sqrt{2})^n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

car $\dfrac{\ln(n)}{(\sqrt{2})^n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et $\dfrac{n^2}{(\sqrt{2})^n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ par croissances comparées.

× La série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{1}{n^2}$ est une série de Riemann d'exposant 2 ($2 > 1$).
Cette série est donc convergente.

> Par critère de négligeabilité des séries à termes positifs, la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{\ln(n)}{2^n}$ converge.

□

Commentaire

- Le théorème des croissances comparées stipule que pour tout $b > 0$ et $q > 1$:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\big(\ln(n)\big)^b}{q^n} = 0$$

On dit alors que la croissance logarithmique est plus faible que la croissance exponentielle.
Dans cette question, il s'agit de démontrer :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n^2\ln(n)}{2^n} = 0$$

Le numérateur n'est ni polynomial, ni logarithmique. En toute rigueur, il faut donc un argument supplémentaire avant de pouvoir utiliser le théorème des croissances comparées.

- Il faut avoir en tête : $n^2\ln(n) \underset{n\to+\infty}{=} o\big(n^3\big)$. La croissance au numérateur est donc « au mieux polynomiale ». Il est donc logique que la croissance exponentielle au dénominateur l'emporte.

- Rappelons au passage la condition `NÉCESSAIRE` de convergence des séries :

$$\sum w_n \text{ converge} \quad \Rightarrow \quad w_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

Cette condition n'est pas suffisante : $w_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \ \cancel{\Rightarrow}\ \sum w_n$ converge.
(on peut illustrer ce point par la suite (w_n) définie par : $\forall n \geqslant 1,\ w_n = \frac{1}{n}$)
S'il est nécessaire que le terme général de la série tende vers 0, il faut de plus s'assurer que cette convergence se fait suffisamment rapidement. C'est ce que l'on fait dans le cas des séries à termes positifs : on s'assure que le terme général w_n tend vers 0 au moins aussi vite que le terme général d'une série convergente (on utilise les théorèmes de comparaisons).
C'est l'argument ici : $\dfrac{\ln(n)}{2^n}$ tend plus rapidement vers 0 que $\dfrac{1}{n^2}$ qui est un exemple classique de terme général de série convergente.

b) (i) Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, exprimer $v_k - v_{k-1}$ en fonction de k.
Puis déterminer la nature de la série $\sum\limits_{k \geqslant 1} (v_k - v_{k-1})$.

Démonstration.

- Soit $k \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned} v_k - v_{k-1} &= \frac{\ln(u_k)}{2^k} - \frac{\ln(u_{k-1})}{2^{k-1}} \\ &= \frac{\ln\left(\frac{{u_{k-1}}^2}{(k-1)+1}\right)}{2^k} - \frac{\ln(u_{k-1})}{2^{k-1}} && \textit{(par définition de la suite } (u_n)\textit{)} \\ &= \frac{\ln\left({u_{k-1}}^2\right) - \ln(k)}{2^k} - \frac{2\ \ln(u_{k-1})}{2^k} \\ &= \frac{\cancel{2\ \ln(u_{k-1})} - \ln(k) - \cancel{2\ \ln(u_{k-1})}}{2^k} && \textit{(car } u_{k-1} > 0\textit{)} \\ &= -\frac{\ln(k)}{2^k} \end{aligned}$$

$$\boxed{\forall k \geqslant 1,\ v_k - v_{k-1} = -\frac{\ln(k)}{2^k}}$$

- On a vu dans la question précédente que la série $\sum\limits_{k \geqslant 1} \frac{\ln(k)}{2^k}$ est convergente.
  On ne change pas la nature d'une série en multipliant son terme général par -1 ($\neq 0$).

$$\boxed{\text{On en déduit que la série } \sum_{k \geqslant 1} (v_k - v_{k-1}) \text{ est convergente.}}$$

□

(ii) En déduire que la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge. Exprimer sa limite ℓ en fonction de u_0 et σ.

Démonstration.
Soit $n \geqslant 1$. Par télescopage, on a :

$$\sum_{k=1}^{n} (v_k - v_{k-1}) = v_n - v_0$$

On en déduit :

$$\begin{aligned} v_n &= \sum_{k=1}^{n} (v_k - v_{k-1}) + v_0 \\ &= -\sum_{k=1}^{n} \frac{\ln(k)}{2^k} + v_0 && \textit{(d'après la question précédente)} \end{aligned}$$

$$\begin{array}{ccc} \Big\downarrow {\scriptstyle n \to +\infty} & & \Big\downarrow {\scriptstyle n \to +\infty} \\ -\sum\limits_{k=1}^{+\infty} \frac{\ln(k)}{2^k} & & v_0 \end{array} \qquad \textit{(car on a montré en question } \textbf{\textit{2.a}} \textit{ que la série } \sum_{k \geqslant 1} \frac{\ln(k)}{2^k} \textit{ est convergente)}$$

$$\boxed{\text{La suite } (v_n) \text{ est convergente, de limite } \ell = -\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\ln(k)}{2^k} + v_0 = \sigma + v_0.}$$

□

3. On suppose dans cette question que $u_0 \neq \mathrm{e}^{-\sigma}$.

a) Déterminer le signe de ℓ.
On pourra distinguer les cas $u_0 > \mathrm{e}^{-\sigma}$ et $u_0 < \mathrm{e}^{-\sigma}$.

Démonstration.
D'après la question précédente :

$$\ell \ = \ \sigma + v_0 \ = \ \sigma + \ln(u_0)$$

- On en déduit :

$$\begin{array}{rcll} \ell > 0 & \Leftrightarrow & \sigma + \ln(u_0) > 0 & \\ & \Leftrightarrow & \ln(u_0) > -\sigma & \\ & \Leftrightarrow & u_0 > \mathrm{e}^{-\sigma} & \textit{(par stricte croissance de la fonction } \exp \textit{ sur } \mathbb{R}\textit{)} \end{array}$$

$$\boxed{\text{Ainsi, si : } u_0 > \mathrm{e}^{-\sigma} \text{ alors : } \ell > 0.}$$

- De même :

$$\ell < 0 \ \Leftrightarrow \ u_0 < \mathrm{e}^{-\sigma}$$

$$\boxed{\text{Ainsi, si : } u_0 < \mathrm{e}^{-\sigma} \text{ alors : } \ell < 0.}$$

□

b) En déduire la limite de $\big(\ln(u_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$, puis étudier le comportement en $+\infty$ de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}$. Par définition :

$$\ln(u_n) \ = \ 2^n \ v_n$$

Deux cas se présentent :

× si $u_0 > \mathrm{e}^{-\sigma}$: alors la suite (v_n) est convergente de limite $\ell > 0$.
De plus : $2^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

$$\boxed{\text{On en déduit, par produit de limites, que la suite } \big(\ln(u_n)\big)_{n\in\mathbb{N}} \text{ diverge vers } +\infty.}$$

Enfin : $u_n = \exp\big(\ln(u_n)\big) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

$$\boxed{\text{La suite } (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ diverge vers } +\infty.}$$

× si $u_0 < \mathrm{e}^{-\sigma}$: alors la suite (v_n) est convergente de limite $\ell < 0$.
De plus : $2^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

$$\boxed{\text{On en déduit, par produit de limites, que la suite } \big(\ln(u_n)\big)_{n\in\mathbb{N}} \text{ diverge vers } -\infty.}$$

Enfin : $u_n = \exp\big(\ln(u_n)\big) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

$$\boxed{\text{La suite } (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge vers } 0.}$$

□

4. On suppose dans cette question : $u_0 = \mathrm{e}^{-\sigma}$.

a) Vérifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $v_n = \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} \dfrac{\ln(k)}{2^k}$.

Démonstration.

- Comme on a supposé $u_0 = \mathrm{e}^{-\sigma}$, on a :

$$v_0 \ = \ \ln(u_0) \ = \ -\sigma \ = \ \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\ln(k)}{2^k}$$

- Or pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a, d'après la question ***2.b)(ii)*** :

$$\begin{aligned} v_n &= -\sum_{k=1}^{n} \frac{\ln(k)}{2^k} + v_0 \\ &= -\sum_{k=1}^{n} \frac{\ln(k)}{2^k} + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\ln(k)}{2^k} \;=\; \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{\ln(k)}{2^k} \end{aligned}$$

En effet, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\ln(k)}{2^k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\ln(k)}{2^k} + \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{\ln(k)}{2^k}$$

$$\boxed{\text{On a bien : } \forall n \in \mathbb{N},\ v_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{\ln(k)}{2^k}.}$$

□

b) En déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}$.

- Tout d'abord :

$$\begin{aligned} \ln(u_n) &= 2^n\, v_n \\ &= 2^n \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{\ln(k)}{2^k} \\ &= 2^n \left(\frac{\ln(n+1)}{2^{n+1}} + \sum_{k=n+2}^{+\infty} \frac{\ln(k)}{2^k} \right) \\ &= \frac{\ln(n+1)}{2} + 2^n \sum_{k=n+2}^{+\infty} \frac{\ln(k)}{2^k} \\ &\geqslant \frac{\ln(n+1)}{2} \end{aligned}$$

(car $\sum\limits_{k=n+2}^{+\infty} \frac{\ln(k)}{2^k} \geqslant 0$ en tant que somme de réels positifs)

- On en déduit, par croissance de la fonction exp sur $\mathbb{R}$:

$$u_n \geqslant \exp\left(\frac{\ln(n+1)}{2}\right)$$

Or : $\dfrac{\ln(n+1)}{2} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$ donc, par composition : $\exp\left(\dfrac{\ln(n+1)}{2}\right) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

$$\boxed{\text{On en déduit que la suite } (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ diverge vers } +\infty.}$$

□

Partie II : Approximation de σ

5. a) Montrer : $\forall x \in \,]0,+\infty[, \ \ln(x) \leqslant x$.

Démonstration.
La fonction ln est concave sur $]0,+\infty[$. Sa courbe représentative est donc située sous ses tangentes, notamment celle au point d'abscisse 1, droite d'équation :

$$y = x - 1$$

On en déduit : $\forall x \in \,]0,+\infty[, \ \ln(x) \leqslant x - 1$.

Et comme pour tout $x > 0$, $x - 1 \leqslant x$, on obtient, par transitivité : $\forall x \in \,]0,+\infty[, \ \ln(x) \leqslant x$.

Commentaire

- Le membre droit de l'inégalité souhaitée est un polynôme de degré 1. Sa représentation graphique est une droite. C'est ce constat qui doit faire penser à une inégalité de convexité.
- Si on ne pense pas à utiliser une propriété de convexité, on peut aussi résoudre cette question en étudiant le signe de la fonction $x \mapsto \ln(x) - x$.

□

b) En déduire : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \ \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} \dfrac{\ln(k)}{2^k} \leqslant \dfrac{n+2}{2^n}$.

Démonstration.
Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $m \in \mathbb{N}^*$ tel que $m > n$.

- D'après la question précédente :

$$\sum_{k=n+1}^{m} \frac{\ln(k)}{2^k} \leqslant \sum_{k=n+1}^{m} \frac{k}{2^k} \qquad (*)$$

- Considérons la partie de droite :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=n+1}^{m} k \left(\frac{1}{2}\right)^k &= \sum_{k=1}^{m-n} (k+n) \left(\frac{1}{2}\right)^{k+n} && \textit{(par décalage d'indice)} \\
&= \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \sum_{k=1}^{m-n} k \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} + n \left(\frac{1}{2}\right)^{n} \sum_{k=1}^{m-n} \left(\frac{1}{2}\right)^{k} && \textit{(par linéarité)}
\end{aligned}$$

Or :

× la série $\sum\limits_{k\geqslant 1} k \left(\dfrac{1}{2}\right)^{k-1}$ est une série géométrique dérivée première de raison $\frac{1}{2} \in \,]-1,1[$.
C'est donc une série convergente. De plus, on a :

$$\sum_{k=1}^{m-n} k \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} \underset{m\to+\infty}{\longrightarrow} \sum_{k=1}^{+\infty} k \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} = \frac{1}{\left(1-\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{1}{\frac{1}{4}} = 4$$

× la série $\sum\limits_{k\geqslant 1} \left(\dfrac{1}{2}\right)^{k}$ est une série géométrique de raison $\frac{1}{2} \in \,]-1,1[$.
C'est donc une série convergente. De plus, on a :

$$\sum_{k=1}^{m-n} \left(\frac{1}{2}\right)^{k} = \frac{(\frac{1}{2})^1 - (\frac{1}{2})^{m-n+1}}{1-\frac{1}{2}} \underset{m\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = 1$$

Ainsi : $\sum\limits_{k=n+1}^{m} k \left(\dfrac{1}{2}\right)^k \underset{m\to+\infty}{\longrightarrow} \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n+1} 4 + n \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n} = \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n} 2 + n \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n} = \dfrac{n+2}{2^n}$

- On en déduit que le membre droit de l'inégalité $(*)$ admet une limite finie.
  Par passage à la limite lorsque m tend vers $+\infty$, on obtient :

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{\ln(k)}{2^k} \leqslant \frac{n+2}{2^n}$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \ \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{\ln(k)}{2^k} \leqslant \frac{n+2}{2^n}}$$

Commentaire

- Dans l'énoncé initial, il était demandé de démontrer :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \ \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{\ln(k)}{2^k} \leqslant \frac{n+1}{2^{n-1}}$$

  C'était en fait une coquille.
- Malgré tout, il est possible de démontrer le résultat du point précédent.
  Il suffit pour cela de remarquer : $\dfrac{n+2}{2^n} \leqslant \dfrac{n+1}{2^{n-1}}$.
- Cette dernière démonstration semblant un peu artificielle, on fait le choix ici de corriger la coquille dans cette question et la suivante.

□

6. Montrer alors : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \ \left| \sigma - \left(-\sum_{k=1}^{n} \frac{\ln(k)}{2^k} \right) \right| \leqslant \frac{n+2}{2^n}$.

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned}
\left| \sigma - \left(-\sum_{k=1}^{n} \frac{\ln(k)}{2^k} \right) \right| &= \left| \sigma + \sum_{k=1}^{n} \frac{\ln(k)}{2^k} \right| \\
&= \left| -\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\ln(k)}{2^k} + \sum_{k=1}^{n} \frac{\ln(k)}{2^k} \right| && \textit{(par définition de } \sigma\textit{)} \\
&= \left| -\left(\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\ln(k)}{2^k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{\ln(k)}{2^k} \right) \right| \\
&= \left| \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\ln(k)}{2^k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{\ln(k)}{2^k} \right| && \textit{(car pour tout } u \in \mathbb{R}, \ |-u| = |u|\textit{)} \\
&= \left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{\ln(k)}{2^k} \right| = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{\ln(k)}{2^k} \leqslant \frac{n+2}{2^n}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \ \left| \sigma - \left(-\sum_{k=1}^{n} \frac{\ln(k)}{2^k} \right) \right| \leqslant \frac{n+2}{2^n}}$$

□

7. Écrire une fonction **Scilab** d'entête `function sigma = approx(epsilon)` qui, prenant en argument un réel ε strictement positif, renvoie une valeur approchée de σ à ε près.

Démonstration.

- On cherche ici à trouver un entier N tel que $-\sum\limits_{k=1}^{N} \dfrac{\ln(k)}{2^k}$ est une valeur approchée de σ à ε près. Autrement dit, on souhaite exhiber $N \in \mathbb{N}$ tel que :
$$\left| \sigma - \left(-\sum_{k=1}^{N} \frac{\ln(k)}{2^k} \right) \right| \leqslant \varepsilon$$
- Or, d'après la question ***6.***, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:
$$\left| \sigma - \left(-\sum_{k=1}^{n} \frac{\ln(k)}{2^k} \right) \right| \leqslant \frac{n+2}{2^n}$$
- Il suffit alors de trouver $N \in \mathbb{N}$ tel que : $\dfrac{N+2}{2^N} \leqslant \varepsilon$.
En effet, par transitivité, on aura alors :
$$\left| \sigma - \left(-\sum_{k=1}^{N} \frac{\ln(k)}{2^k} \right) \right| \leqslant \frac{N+2}{2^N} \leqslant \varepsilon$$
- On en déduit le programme suivant qui permet :
  × de déterminer la première valeur de N qui convient (à l'aide d'une boucle `while`),
  × de calculer $\sum\limits_{k=1}^{N} \dfrac{\ln(k)}{2^k}$ par mise à jour successive, dans la boucle `while` d'une variable `S`.

```
function sigma = approx(eps)
    N = 1
    S = 0
    while (N+2) / 2 ^ N > eps
      S = S + log(N) / 2 ^ N
      N = N + 1
    end
    sigma = -S
endfunction
```

□

Exercice 2 (EML 2013)

On note $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_4(\mathbb{R})$.

1. a) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Montrer :

$$A - \lambda I_4 \text{ non inversible} \quad \Leftrightarrow \quad \lambda \in \{-2, -1, 1, 2\}$$

Démonstration.
Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
\mathrm{rg}(A - \lambda I_4) &= \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix} -\lambda & 0 & 0 & 2 \\ 0 & -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda & 0 \\ 2 & 0 & 0 & -\lambda \end{pmatrix}\right) \\
&\overset{L_1 \leftrightarrow L_4}{=} \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & -\lambda \\ 0 & -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda & 0 \\ -\lambda & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}\right) \\
&\overset{L_4 \leftarrow 2\,L_4 + \lambda\,L_1}{=} \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & -\lambda \\ 0 & -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4-\lambda^2 \end{pmatrix}\right) \\
&\overset{L_2 \leftrightarrow L_3}{=} \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & -\lambda \\ 0 & 1 & -\lambda & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4-\lambda^2 \end{pmatrix}\right) \\
&\overset{L_3 \leftarrow L_3 + \lambda\,L_2}{=} \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & -\lambda \\ 0 & 1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4-\lambda^2 \end{pmatrix}\right)
\end{aligned}$$

La réduite obtenue est triangulaire supérieure.
Elle est donc non inversible si et seulement si l'un de ses coefficients diagonaux est nul.
On en déduit :

$$\begin{aligned}
A - \lambda I_3 \text{ non inversible} &\Leftrightarrow 1 - \lambda^2 = 0 \ \texttt{OU} \ 4 - \lambda^2 = 0 \\
&\Leftrightarrow (1-\lambda)(1+\lambda) = 0 \ \texttt{OU} \ (2-\lambda)(2+\lambda) = 0 \\
&\Leftrightarrow \lambda = 1 \ \texttt{OU} \ \lambda = -1 \ \texttt{OU} \ \lambda = 2 \ \texttt{OU} \ \lambda = -2 \\
&\Leftrightarrow \lambda \in \{-2, -1, 1, 2\}
\end{aligned}$$

$$\boxed{A - \lambda\, I_4 \text{ non inversible} \Leftrightarrow \lambda \in \{-2, -1, 1, 2\}}$$

□

b) On définit les ensembles suivants :

$$\begin{aligned}
E_{-2}(A) &= \{X \in \mathscr{M}_{4,1}(\mathbb{R}) \mid AX = -2X\} \\
E_{-1}(A) &= \{X \in \mathscr{M}_{4,1}(\mathbb{R}) \mid AX = -X\} \\
E_{1}(A) &= \{X \in \mathscr{M}_{4,1}(\mathbb{R}) \mid AX = X\} \\
E_{2}(A) &= \{X \in \mathscr{M}_{4,1}(\mathbb{R}) \mid AX = 2X\}
\end{aligned}$$

Montrer que ce sont des espaces vectoriels et déterminer une base de chacun d'entre eux.
En déduire leurs dimensions.

Démonstration.

- Déterminons $E_{-2}(A)$. Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{4,1}(\mathbb{R})$.

$$\begin{array}{rcl}
X \in E_{-2}(A) & \Longleftrightarrow & AX = -2X \\
& \Longleftrightarrow & (A + 2\,I_4)\,X = 0_{\mathscr{M}_{4,1}(\mathbb{R})} \\
& \Longleftrightarrow & \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
& \Longleftrightarrow & \left\{ \begin{array}{rcrcrcrcl} 2x & & & & & + & 2t & = & 0 \\ & & 2y & + & z & & & = & 0 \\ & & y & + & 2z & & & = & 0 \\ 2x & & & & & + & 2t & = & 0 \end{array} \right. \\
& \overset{L_1 \leftarrow \frac{1}{2} L_1}{\Longleftrightarrow} & \left\{ \begin{array}{rcrcrcrcl} x & & & & & + & t & = & 0 \\ & & 2y & + & z & & & = & 0 \\ & & y & + & 2z & & & = & 0 \end{array} \right. \\
& \overset{L_3 \leftarrow 2\,L_3 - L_2}{\Longleftrightarrow} & \left\{ \begin{array}{rcrcrcrcl} x & & & & & + & t & = & 0 \\ & & 2y & + & z & & & = & 0 \\ & & & & 3z & & & = & 0 \end{array} \right. \\
& \Longleftrightarrow & \left\{ \begin{array}{rcrcrcr} x & & & & & = & -t \\ & & 2y & + & z & = & 0 \\ & & & & 3z & = & 0 \end{array} \right. \\
& \overset{L_2 \leftarrow 3\,L_2 - L_3}{\Longleftrightarrow} & \left\{ \begin{array}{rcrcrcr} x & & & & & = & -t \\ & & 6y & & & = & 0 \\ & & & & 3z & = & 0 \end{array} \right. \\
& \overset{\substack{L_2 \leftarrow \frac{1}{6} L_2 \\ L_3 \leftarrow \frac{1}{3} L_3}}{\Longleftrightarrow} & \left\{ \begin{array}{rcrcrcr} x & & & & & = & -t \\ & & y & & & = & 0 \\ & & & & z & = & 0 \end{array} \right.
\end{array}$$

On en déduit :

$$\begin{array}{rcl}
E_{-2}(A) & = & \{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{4,1}(\mathbb{R}) \mid AX = -2X \} \\
& = & \{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \mid x = -t \text{ et } y = 0 \text{ et } z = 0 \} \\
& = & \{ \begin{pmatrix} -t \\ 0 \\ 0 \\ t \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{R} \} \ = \ \{ t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{R} \} \ = \ \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)
\end{array}$$

$$\boxed{\text{Ainsi, } E_{-2}(A) \text{ est un espace vectoriel.}}$$

Enfin, la famille $\mathcal{F}_1 = \left(\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$:

× engendre $E_{-2}(A)$,

× est une famille libre de $\mathscr{M}_{4,1}(\mathbb{R})$, car elle est constituée uniquement d'un vecteur non nul.

$$\boxed{\text{La famille } \mathcal{F}_1 \text{ est donc une base de } E_{-2}(A) \text{ et } \dim\big(E_{-2}(A)\big) = \mathrm{Card}\,(\mathcal{F}_1) = 1.}$$

- Déterminons $E_{-1}(A)$. Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{4,1}(\mathbb{R})$.

$$\begin{array}{rcl}
X \in E_{-1}(A) & \iff & AX = -X \\[4pt]
& \iff & (A + I_4)\, X = 0_{\mathscr{M}_{4,1}(\mathbb{R})} \\[4pt]
& \iff & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\[4pt]
& \iff & \left\{ \begin{array}{rcrcrcrcr} x & & & & & + & 2t & = & 0 \\ & & y & + & z & & & = & 0 \\ & & y & + & z & & & = & 0 \\ 2x & & & & & + & t & = & 0 \end{array} \right. \\[4pt]
& \iff & \left\{ \begin{array}{rcrcrcrcr} x & & & & & + & 2t & = & 0 \\ & & y & + & z & & & = & 0 \\ 2x & & & & & + & t & = & 0 \end{array} \right. \\[4pt]
& \underset{L_3 \leftarrow L_3 - 2\,L_1}{\iff} & \left\{ \begin{array}{rcrcrcrcr} x & & & & & + & 2t & = & 0 \\ & & y & + & z & & & = & 0 \\ & & & & & - & 3t & = & 0 \end{array} \right. \\[4pt]
& \iff & \left\{ \begin{array}{rcrcr} x & & 2t & = & 0 \\ & y & & = & -z \\ & & -3t & = & 0 \end{array} \right. \quad \underset{L_1 \leftarrow 3L_1 + 2\,L_3}{\iff} \quad \left\{ \begin{array}{rcrcr} 3x & & & = & 0 \\ & y & & = & -z \\ & & -3t & = & 0 \end{array} \right.
\end{array}$$

On en déduit :

$$\begin{array}{rcl}
E_{-1}(A) & = & \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{4,1}(\mathbb{R}) \mid AX = -X \right\} \\[4pt]
& = & \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \mid x = 0 \text{ et } y = -z \text{ et } t = 0 \right\} \\[4pt]
& = & \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ -z \\ z \\ 0 \end{pmatrix} \mid z \in \mathbb{R} \right\} \; = \; \left\{ z \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \mid z \in \mathbb{R} \right\} \; = \; \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)
\end{array}$$

$$\boxed{\text{Ainsi, } E_{-1}(A) \text{ est un espace vectoriel.}}$$

Enfin la famille $\mathcal{F}_2 = \left(\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$:

× engendre $E_{-1}(A)$,

× est une famille libre de $\mathscr{M}_{4,1}(\mathbb{R})$, car elle est constituée uniquement d'un vecteur non nul.

$$\boxed{\text{La famille } \mathcal{F}_2 \text{ est donc une base de } E_{-1}(A) \text{ et } \dim\big(E_{-1}(A)\big) = \mathrm{Card}\,(\mathcal{F}_2) = 1.}$$

- Déterminons $E_1(A)$. Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{4,1}(\mathbb{R})$.

$$\begin{array}{rcl}
X \in E_1(A) & \iff & AX = X \\[4pt]
& \iff & (A - I_4)\, X = 0_{\mathscr{M}_{4,1}(\mathbb{R})} \\[4pt]
& \iff & \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\[4pt]
& \iff & \left\{ \begin{array}{rcrcrcrcl} -x & & & & & + & 2t & = & 0 \\ & - & y & + & z & & & = & 0 \\ & & y & - & z & & & = & 0 \\ 2x & & & & & - & t & = & 0 \end{array} \right. \\[4pt]
& \iff & \left\{ \begin{array}{rcrcrcrcl} -x & & & & & + & 2t & = & 0 \\ & & y & - & z & & & = & 0 \\ 2x & & & & & - & t & = & 0 \end{array} \right. \\[4pt]
& \underset{L_3 \leftarrow L_3 + 2L_1}{\iff} & \left\{ \begin{array}{rcrcrcrcl} -x & & & & & + & 2t & = & 0 \\ & & y & - & z & & & = & 0 \\ & & & & & & 3t & = & 0 \end{array} \right. \\[4pt]
& \iff & \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} -x & & & + & 2t & = & 0 \\ & & y & & & = & z \\ & & & & 3t & = & 0 \end{array} \right. \quad \underset{L_1 \leftarrow 3L_1 - 2L_3}{\iff} \quad \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} -3x & & & & & = & 0 \\ & & y & & & = & z \\ & & & & 3t & = & 0 \end{array} \right.
\end{array}$$

On en déduit :

$$\begin{array}{rcl}
E_1(A) & = & \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{4,1}(\mathbb{R}) \mid AX = X \right\} \\[6pt]
& = & \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \mid x = 0 \text{ et } y = z \text{ et } t = 0 \right\} \\[6pt]
& = & \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ z \\ z \\ 0 \end{pmatrix} \mid z \in \mathbb{R} \right\} \; = \; \left\{ z \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \mid z \in \mathbb{R} \right\} \; = \; \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)
\end{array}$$

$$\boxed{\text{Ainsi, } E_1(A) \text{ est un espace vectoriel.}}$$

Enfin, la famille $\mathcal{F}_3 = \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$:

× engendre $E_1(A)$,

× est une famille libre de $\mathscr{M}_{4,1}(\mathbb{R})$, car elle est constituée uniquement d'un vecteur non nul.

$$\boxed{\text{La famille } \mathcal{F}_3 \text{ est donc une base de } E_1(A) \text{ et } \dim\big(E_1(A)\big) = \mathrm{Card}\,(\mathcal{F}_3) = 1.}$$

- Déterminons $E_2(A)$. Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{4,1}(\mathbb{R})$.

$$\begin{array}{rcl}
X \in E_2(A) & \Longleftrightarrow & AX = 2X \\[4pt]
& \Longleftrightarrow & (A - 2\, I_4)\, X = 0_{\mathscr{M}_{4,1}(\mathbb{R})} \\[4pt]
& \Longleftrightarrow & \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\[4pt]
& \Longleftrightarrow & \left\{ \begin{array}{rcrcrcrcl} -2x & & & & & + & 2t & = & 0 \\ & - & 2y & + & z & & & = & 0 \\ & & y & - & 2z & & & = & 0 \\ 2x & & & & & - & 2t & = & 0 \end{array} \right. \\[4pt]
& \underset{L_1 \leftarrow -\frac{1}{2} L_1}{\Longleftrightarrow} & \left\{ \begin{array}{rcrcrcrcl} x & & & & & - & t & = & 0 \\ & - & 2y & + & z & & & = & 0 \\ & & y & - & 2z & & & = & 0 \end{array} \right. \\[4pt]
& \underset{L_3 \leftarrow 2 L_3 + L_2}{\Longleftrightarrow} & \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} x & & & & - & t & = & 0 \\ & 2y & + & z & & & = & 0 \\ & & - & 3z & & & = & 0 \end{array} \right. \\[4pt]
& \Longleftrightarrow & \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} x & & & & = & t \\ & 2y & + & z & = & 0 \\ & & - & 3z & = & 0 \end{array} \right. \underset{L_2 \leftarrow 3 L_2 + L_3}{\Longleftrightarrow} \left\{ \begin{array}{rrrcl} x & & & = & t \\ & 6y & & = & 0 \\ & & -3z & = & 0 \end{array} \right.
\end{array}$$

On en déduit :

$$\begin{array}{rcl}
E_2(A) & = & \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{4,1}(\mathbb{R}) \mid AX = 2X \right\} \\[6pt]
& = & \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \mid x = t \text{ et } y = 0 \text{ et } z = 0 \right\} \\[6pt]
& = & \left\{ \begin{pmatrix} t \\ 0 \\ 0 \\ t \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{R} \right\} \ = \ \left\{ t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{R} \right\} \ = \ \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)
\end{array}$$

$$\boxed{\text{Ainsi, } E_2(A) \text{ est un espace vectoriel.}}$$

Enfin, la famille $\mathcal{F}_4 = \left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix}\right)$:

× engendre $E_2(A)$,

× est une famille libre de $\mathscr{M}_{4,1}(\mathbb{R})$, car elle est constituée uniquement d'un vecteur non nul.

$$\boxed{\text{La famille } \mathcal{F}_4 \text{ est donc une base de } E_2(A) \text{ et } \dim\big(E_2(A)\big) \ = \ \text{Card}(\mathcal{F}_4) \ = \ 1.}$$

Commentaire

- Il faut s'habituer à déterminer les ensembles $E_\lambda(A)$ par lecture de la matrice $A - \lambda\, I$.
- Illustrons la méthode avec la matrice de l'exercice et $\lambda = -2$.

  On cherche les vecteurs $X = \begin{pmatrix}x\\y\\z\\t\end{pmatrix}$ de $E_{-2}(A)$ c'est-à-dire les vecteurs tels que : $(A + 2\, I_4)\, X = 0_{\mathscr{M}_{4,1}(\mathbb{R})}$. Or :

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix}2&0&0&2\\0&2&1&0\\0&1&2&0\\2&0&0&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\\t\end{pmatrix} &= x\cdot C_1 + y\cdot C_2 + z\cdot C_3 + t\cdot C_4 \\ &= x\cdot\begin{pmatrix}2\\0\\0\\2\end{pmatrix} + y\cdot\begin{pmatrix}0\\2\\1\\0\end{pmatrix} + z\cdot\begin{pmatrix}0\\1\\2\\0\end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix}2\\0\\0\\2\end{pmatrix}\end{aligned}$$

  Pour obtenir le vecteur $\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}$ l'aide de cette combinaison linéaire, on doit forcément choisir $y = 0$. En effet, si y est non nul, le coefficient en $2^{\text{ème}}$ position est non nul et doit être compensé par le choix $z = -2y$ mais dans ce cas, le coefficient créé en $3^{\text{ème}}$ position est non nul. On doit alors choisir $z = 0$ sinon les coefficients en $2^{\text{ème}}$ et $3^{\text{ème}}$ positions sont non nuls. La combinaison linéaire restante ne contient plus que les vecteurs C_1 et C_4 qui sont égaux. Cette combinaison linéaire est nulle si : $x = -t$. En prenant par exemple $t = 1$, on obtient :

$$E_{-2}(A) \ = \ \text{Vect}\left(\begin{pmatrix}-1\\0\\0\\1\end{pmatrix}\right)$$

- On peut procéder de même pour $E_{-1}(A)$, $E_1(A)$ et $E_2(A)$.

□

2. Montrer que la matrice $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ est inversible et déterminer P^{-1}.

Démonstration.
On applique l'algorithme du pivot de Gauss.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \left| \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right.$$

On effectue l'opération $\{ L_4 \leftarrow L_4 + L_1$. On obtient alors :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \left| \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right.$$

On effectue l'opération $\{ L_3 \leftarrow L_3 + L_2$. On obtient alors :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \left| \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right.$$

La réduite obtenue est triangulaire supérieure et ses coefficients diagonaux sont tous non nuls.
Donc P est inversible.
On effectue l'opération $\{ L_1 \leftarrow 2\,L_1 - L_4$. On obtient alors :

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \left| \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right.$$

On effectue l'opération $\{ L_2 \leftarrow 2\,L_2 - L_3$. On obtient alors :

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \left| \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right.$$

On effectue les opérations $\left\{ \begin{array}{l} L_1 \leftarrow \frac{1}{2}\,L_1 \\ L_2 \leftarrow \frac{1}{2}\,L_2 \\ L_3 \leftarrow \frac{1}{2}\,L_3 \\ L_4 \leftarrow \frac{1}{2}\,L_4 \end{array} \right.$ On obtient :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \left| \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \right.$$

$$\boxed{\text{On en conclut que } P \text{ et inversible et } P^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.}$$

$\square$

3. Montrer : $A = PDP^{-1}$, où D est une matrice à définir.

Démonstration.
Il s'agit ici de calculer $D = P^{-1}AP$.

- Tout d'abord :

$$AP = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

- Ensuite :

$$P^{-1}AP = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\text{On en déduit : } A = PDP^{-1} \text{ avec } D = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.}$$

□

On appelle commutant de A, et on note C_A, l'ensemble des matrices M de $\mathscr{M}_4(\mathbb{R})$ telles que :

$$AM = MA$$

On appelle commutant de D, et on note C_D, l'ensemble des matrices N de $\mathscr{M}_4(\mathbb{R})$ telles que :

$$DN = ND$$

4. Montrer que C_A est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_4(\mathbb{R})$.

Démonstration.
Démontrons que C_A est un sev de $\mathscr{M}_4(\mathbb{R})$.

(i) $C_A \subseteq \mathscr{M}_4(\mathbb{R})$ par définition.

(ii) $C_A \neq \varnothing$. En effet, la matrice nulle $0_{\mathscr{M}_4(\mathbb{R})}$ est élément de C_A puisque :

$$A \times 0_{\mathscr{M}_4(\mathbb{R})} = 0_{\mathscr{M}_4(\mathbb{R})} = 0_{\mathscr{M}_4(\mathbb{R})} \times A$$

(iii) Démontrons enfin que C_A est stable par combinaisons linéaires.

Soit $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ et soit $(M, N) \in {C_A}^2$.

- Comme $M \in C_A$, M est une matrice de $\mathscr{M}_4(\mathbb{R})$ qui vérifie : $AM = MA$.
- Comme $N \in C_A$, N est une matrice de $\mathscr{M}_4(\mathbb{R})$ qui vérifie : $AN = NA$.

Démontrons alors que $\lambda \cdot M + \mu \cdot N$ est un élément de C_A.

$$\begin{aligned} A\left(\lambda \cdot M + \mu \cdot N\right) &= \lambda \cdot AM + \mu \cdot AN \\ &= \lambda \cdot MA + \mu \cdot NA \quad \textit{(car } M \in C_A \textit{ et } N \in C_A\textit{)} \\ &= \left(\lambda \cdot M + \mu \cdot N\right) A \end{aligned}$$

Et ainsi $\lambda \cdot M + \mu \cdot N \in C_A$.

$$\boxed{C_A \text{ est bien un sous-espace vectoriel de } \mathscr{M}_4(\mathbb{R}).}$$

□

5. Soit $M \in \mathscr{M}_4(\mathbb{R})$. On note $N = P^{-1}MP$. Montrer :

$$M \in C_A \Leftrightarrow N \in C_D$$

Démonstration.

$$\begin{array}{rcll}
M \in C_A & \Leftrightarrow & AM = MA & \\
& \Leftrightarrow & APNP^{-1} = PNP^{-1}A & \textit{(comme } N = P^{-1}MP \\
& & & \textit{alors } M = PNP^{-1}\textit{)} \\
& \Leftrightarrow & P^{-1}APNP^{-1} = P^{-1}PNP^{-1}A & \textit{(en multipliant} \\
& & & \textit{à gauche par } P^{-1}\textit{)} \\
& \Leftrightarrow & P^{-1}APNP^{-1} = NP^{-1}A & \\
& \Leftrightarrow & P^{-1}APNP^{-1}P = NP^{-1}AP & \textit{(en multipliant} \\
& & & \textit{à droite par } P\textit{)} \\
& \Leftrightarrow & P^{-1}APN = NP^{-1}AP & \\
& \Leftrightarrow & DN = ND & \\
& \Leftrightarrow & N \in C_D &
\end{array}$$

$$\boxed{\text{On a bien : } M \in C_A \Leftrightarrow N \in C_D.}$$

□

6. Déterminer C_D, en utilisant les coefficients des matrices.

Démonstration.

Soit $N = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ x_5 & x_6 & x_7 & x_8 \\ x_9 & x_{10} & x_{11} & x_{12} \\ x_{13} & x_{14} & x_{15} & x_{16} \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_4(\mathbb{R})$.

Avec cette notation :

$$\begin{array}{rcl}
N \in C_D & \Leftrightarrow & DN = ND \\
& \Leftrightarrow & \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ x_5 & x_6 & x_7 & x_8 \\ x_9 & x_{10} & x_{11} & x_{12} \\ x_{13} & x_{14} & x_{15} & x_{16} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ x_5 & x_6 & x_7 & x_8 \\ x_9 & x_{10} & x_{11} & x_{12} \\ x_{13} & x_{14} & x_{15} & x_{16} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \\
& \Leftrightarrow & \begin{pmatrix} -2x_1 & -2x_2 & -2x_3 & -2x_4 \\ -x_5 & -x_6 & -x_7 & -x_8 \\ x_9 & x_{10} & x_{11} & x_{12} \\ 2x_{13} & 2x_{14} & 2x_{15} & 2x_{16} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2x_1 & -x_2 & x_3 & 2x_4 \\ -2x_5 & -x_6 & x_7 & 2x_8 \\ -2x_9 & -x_{10} & x_{11} & 2x_{12} \\ -2x_{13} & -x_{14} & x_{15} & 2x_{16} \end{pmatrix} \\
& \Leftrightarrow & \left\{ \begin{array}{l} -2x_1 = -2x_1 \\ -2x_2 = -x_2 \\ -2x_3 = x_3 \\ -2x_4 = 2x_4 \\ -x_5 = -2x_5 \\ -x_6 = -x_6 \\ -x_7 = x_7 \\ -x_8 = 2x_8 \end{array} \right. \quad \texttt{ET} \quad \left\{ \begin{array}{l} x_9 = -2x_9 \\ x_{10} = -x_{10} \\ x_{11} = x_{11} \\ x_{12} = 2x_{12} \\ 2x_{13} = -2x_{13} \\ 2x_{14} = -x_{14} \\ 2x_{15} = x_{15} \\ 2x_{16} = 2x_{16} \end{array} \right. \quad \Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} x_2 = x_3 = x_4 = 0 \\ x_5 = x_7 = x_8 = 0 \\ x_9 = x_{10} = x_{12} = 0 \\ x_{13} = x_{14} = x_{15} = 0 \end{array} \right.
\end{array}$$

On en déduit :

$$\begin{array}{rcl} C_D & = & \left\{ \begin{pmatrix} x_1 & x_6 & x_3 & x_4 \\ x_5 & x_6 & x_7 & x_8 \\ x_9 & x_{10} & x_{11} & x_{12} \\ x_{13} & x_{14} & x_{15} & x_{16} \end{pmatrix} \mid \left\{ \begin{array}{l} x_2 = x_3 = x_4 = 0 \\ x_5 = x_7 = x_8 = 0 \\ x_9 = x_{10} = x_{12} = 0 \\ x_{13} = x_{14} = x_{15} = 0 \end{array} \right. \right\} \\ & = & \left\{ \begin{pmatrix} x_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x_6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x_{11} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x_{16} \end{pmatrix} \mid (x_1, x_6, x_{11}, x_{16}) \in \mathbb{R}^4 \right\} \end{array}$$

$$\boxed{\text{Le commutant de } D \text{ est constitué de l'ensemble des matrices diagonales.}}$$

Commentaire

- L'énoncé suggère d'utiliser les « coefficients des matrices ». L'idée est donc de considérer une matrice $N \in \mathscr{M}_4(\mathbb{R})$ quelconque et de comprendre comment l'appartenance de N à C_D contraint les coefficients de N.
- En regardant de plus près le calcul, on s'aperçoit que :
  × multiplier à gauche par une matrice diagonale permet d'agir sur les lignes (la ligne i est multipliée par $D_{i,i}$),
  × multiplier à droite par une matrice diagonale permet d'agir sur les colonnes (la colonne j est multipliée par $D_{j,j}$).

  Les coefficients diagonaux de D étant différents, les seuls coefficients qui se retrouvent multipliés par le même nombre sont les coefficients diagonaux.
- Formalisons l'idée décrite dans le point précédent.
  On considère une matrice $N \in \mathscr{M}_4(\mathbb{R})$. Pour tout $(i, j) \in [\![1, 4]\!]^2$:

$$\begin{array}{rcccll} (DN)_{i,j} & = & \sum\limits_{k=1}^{4} D_{i,k} N_{k,j} & = & D_{i,i} N_{i,j} & \textit{(car } D_{i,k} = 0 \textit{ si } k \neq i\textit{)} \\ (ND)_{i,j} & = & \sum\limits_{k=1}^{4} N_{i,k} D_{k,j} & = & N_{i,j} D_{j,j} & \textit{(car } D_{k,j} = 0 \textit{ si } k \neq j\textit{)} \end{array}$$

  Ainsi :

$$\begin{array}{rcll} (DN)_{i,j} = (ND)_{i,j} & \Leftrightarrow & D_{i,i} N_{i,j} = N_{i,j} D_{j,j} & \\ & \Leftrightarrow & \big(D_{i,i} - D_{j,j}\big)\ N_{i,j} = 0 & \\ & \Leftrightarrow & D_{i,i} = D_{j,j} \ \texttt{OU} \ N_{i,j} = 0 & \\ & \Leftrightarrow & i = j \ \texttt{OU} \ N_{i,j} = 0 & \textit{(car les coefficients diagonaux de la matrice } D \textit{ sont tous différents)} \end{array}$$

  Ainsi les matrices N qui commutent avec D vérifient toutes :

$$\forall (i, j) \in [\![1, 4]\!]^2,\ i \neq j \ \Rightarrow \ N_{i,j} = 0$$

- Cette démonstration est bien plus élégante que la précédente. Elle permet de démontrer que si D est une matrice carrée (d'ordre n quelconque) diagonale dont les coefficients diagonaux sont tous différents alors D ne commute qu'avec les matrices diagonales.

□

7. En déduire :

$$C_A = \{ \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & b \\ 0 & c & d & 0 \\ 0 & d & c & 0 \\ b & 0 & 0 & a \end{pmatrix} \mid (a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4 \}$$

Démonstration.
Soit $M \in \mathscr{M}_4(\mathbb{R})$.

- Tout d'abord :

$$\begin{array}{ll} & M \in C_A \\ \Leftrightarrow & N = P^{-1}MP \in C_D \qquad \textit{(d'après la question } \textbf{5.}\textit{)} \\ \Leftrightarrow & \exists (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4) \in \mathbb{R}^4,\ N = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_4 \end{pmatrix} \qquad \textit{(d'après la question } \textbf{6.}\textit{)} \\ \Leftrightarrow & \exists (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4) \in \mathbb{R}^4,\ P^{-1}MP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_4 \end{pmatrix} \\ \Leftrightarrow & \exists (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4) \in \mathbb{R}^4,\ M = P \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_4 \end{pmatrix} P^{-1} \end{array}$$

$$\boxed{\text{Ainsi : } C_A = \{ P \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_4 \end{pmatrix} P^{-1} \mid (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4) \in \mathbb{R}^4 \}.}$$

- On s'intéresse alors à la forme des matrices de cet ensemble.
  Soit $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4) \in \mathbb{R}^4$.

$$\begin{aligned} P \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_4 \end{pmatrix} P^{-1} &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \lambda_4 \\ 0 & \lambda_2 & \lambda_3 & 0 \\ 0 & -\lambda_2 & \lambda_3 & 0 \\ -\lambda_1 & 0 & 0 & \lambda_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \lambda_1 + \lambda_4 & 0 & 0 & -\lambda_1 + \lambda_4 \\ 0 & \lambda_2 + \lambda_3 & -\lambda_2 + \lambda_3 & 0 \\ 0 & -\lambda_2 + \lambda_3 & \lambda_2 + \lambda_3 & 0 \\ -\lambda_1 + \lambda_4 & 0 & 0 & \lambda_1 + \lambda_4 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

  En notant $a = \frac{1}{2}(\lambda_1 + \lambda_4)$, $b = \frac{1}{2}(-\lambda_1 + \lambda_4)$, $c = \frac{1}{2}(\lambda_2 + \lambda_3)$ et $d = \frac{1}{2}(-\lambda_2 + \lambda_3)$, on obtient une matrice de la forme annoncée.

$$\boxed{\text{Cela démontre : } C_A \subseteq \{ \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & b \\ 0 & c & d & 0 \\ 0 & d & c & 0 \\ b & 0 & 0 & a \end{pmatrix} \mid (a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4 \}.}$$

- Il reste alors à démontrer l'inclusion réciproque.
  Soit $(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4$.
  × Tout d'abord :
$$A \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & b \\ 0 & c & d & 0 \\ 0 & d & c & 0 \\ b & 0 & 0 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & b \\ 0 & c & d & 0 \\ 0 & d & c & 0 \\ b & 0 & 0 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2b & 0 & 0 & 2a \\ 0 & d & c & 0 \\ 0 & c & d & 0 \\ 2a & 0 & 0 & 2b \end{pmatrix}$$
  × Ensuite :
$$\begin{pmatrix} a & 0 & 0 & b \\ 0 & c & d & 0 \\ 0 & d & c & 0 \\ b & 0 & 0 & a \end{pmatrix} A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & b \\ 0 & c & d & 0 \\ 0 & d & c & 0 \\ b & 0 & 0 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2b & 0 & 0 & 2a \\ 0 & d & c & 0 \\ 0 & c & d & 0 \\ 2a & 0 & 0 & 2b \end{pmatrix}$$
  On en déduit : $\begin{pmatrix} a & 0 & 0 & b \\ 0 & c & d & 0 \\ 0 & d & c & 0 \\ b & 0 & 0 & a \end{pmatrix} \in C_A$.

$$\boxed{\text{Et ainsi : } C_A \supseteq \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & b \\ 0 & c & d & 0 \\ 0 & d & c & 0 \\ b & 0 & 0 & a \end{pmatrix} \mid (a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4 \right\}.}$$

Commentaire

- La première partie de la question illustre un procédé fréquent en mathématiques. On cherche à obtenir l'ensemble C_A, le commutant de A. Pour cela, on pourrait procéder comme en question ***6.***, à savoir partir d'une matrice M quelconque et de voir comment l'appartenance de M à C_A (*i.e.* le fait que la propriété $AM = MA$ soit vérifié) contraint les coefficients de M. S'il est possible de procéder ainsi, cette manière de faire peut se révéler longue et fastidieuse pour certaines matrices A. Il est par contre simple de déterminer C_D lorsque D est une matrice diagonale. On cherche donc initialement une matrice diagonale D permettant, en quelque sorte, de représenter la matrice A. Plus précisément, on trouve une matrice D telle que $A = PDP^{-1}$. Puis on détermine C_D. Enfin, on détermine C_A à l'aide de C_D en écrivant :
$$C_A = \left\{ P \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_4 \end{pmatrix} P^{-1} \mid (\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_4) \in \mathbb{R}^4 \right\}$$
- La deuxième partie de la résolution n'a que peu d'intérêt. Il aurait été préférable que l'énoncé demande de démontrer que C_A s'écrit :
$$C_A = \left\{ \frac{1}{2} \begin{pmatrix} a+d & 0 & 0 & -a+d \\ 0 & b+c & -b+c & 0 \\ 0 & -b+c & b+c & 0 \\ -a+d & 0 & 0 & a+d \end{pmatrix} \mid (a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4 \right\}$$
  L'énoncé choisit une autre forme matricielle. Cela correspond à écrire l'espace vectoriel C_A à l'aide d'une autre base. On reviendra sur ce point à la question suivante.

□

8. Déterminer une base de C_A et la dimension de C_A.

Démonstration.

- D'après la question précédente :

$$\begin{aligned} C_A &= \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & b \\ 0 & c & d & 0 \\ 0 & d & c & 0 \\ b & 0 & 0 & a \end{pmatrix} \mid (a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4 \right\} \\ &= \left\{ a \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + b \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + c \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + d \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \mid (a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4 \right\} \\ &= \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right) \end{aligned}$$

- La famille $\mathcal{F} = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right)$:
  - × engendre C_A,
  - × est une famille libre de $\mathscr{M}_4(\mathbb{R})$. Démontrons ce point.

    Soit $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4) \in \mathbb{R}^4$.

    Supposons : $\lambda_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \lambda_3 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \lambda_4 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0_{\mathscr{M}_4(\mathbb{R})}$.

    Autrement dit :

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \lambda_2 \\ 0 & \lambda_3 & \lambda_4 & 0 \\ 0 & \lambda_4 & \lambda_3 & 0 \\ \lambda_2 & 0 & 0 & \lambda_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

    Par identification, cette égalité est équivalente à : $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 0$.

$$\boxed{\text{La famille } \mathcal{F} \text{ est donc une base de } C_A \text{ et } \dim\big(C_A\big) = \text{Card}\,(\mathcal{F}) = 4.}$$

Commentaire

- Si l'on s'en tient à la première écriture de C_A de la question précédente, on obtient :

$$C_A = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right)$$

  Nommons $\mathcal{G}$ la famille génératrice de C_A correspondant à cette égalité.
  Il est simple de démontrer : $\text{Vect}\,(\mathcal{G}) = \text{Vect}\,(\mathcal{F})$ par des opérations sur les éléments de la famille $\mathcal{G}$ qui laissent inchangées l'espace vectoriel engendré. Par exemple, en ajoutant la deuxième matrice de $\mathcal{G}$ à la première, on obtien la première matrice de $\mathcal{F}$.
- Les familles $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ sont deux bases différentes de C_A. L'énoncé a privilégié la famille $\mathcal{F}$. Mais la famille $\mathcal{G}$ est celle qui apparaît naturellement dans la question ***7.***

□

Problème (ESSEC I 2013)

Toutes les variables aléatoires de ce problème sont définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$.

Introduction

On s'intéresse dans ce problème à la détermination de lois de probabilité composées qui interviennent en particulier dans la gestion du risque en assurance et en théorie de la ruine. On étudie le modèle suivant :

- le nombre de sinistres à prendre en charge par une compagnie d'assurances sur une période donnée est une variable aléatoire N à valeurs dans $\mathbb{N}$;
- les coûts des sinistres successifs sont modélisés par une suite de variables aléatoires $(U_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$. On suppose que les variables U_k sont à valeurs dans $\mathbb{N}$, indépendantes et identiquement distribuées, et sont indépendantes de N ;
- On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $X_n = \sum\limits_{k=1}^{n} U_k$ et X_0 est la variable certaine de valeur 0 ;
- la charge sinistrale totale pour la compagnie d'assurance sur une période est donnée par la variable aléatoire X définie par :
$$X = \sum_{k=1}^{N} U_k$$
et l'on précise que $X = X_0 = 0$ si N prend la valeur 0. **On dit que X suit une loi composée**.
- Pour tout entier naturel j, on pose $p_j = \mathbb{P}([N = j])$, $q_j = \mathbb{P}([U_1 = j])$ et $r_j = \mathbb{P}([X = j])$.

Partie I – Des exemples

Dans cette partie I, on suppose que les variables U_k suivent la loi de Bernoulli de paramètre p, où p est un réel de l'intervalle $]0, 1[$.

1. Pour n dans $\mathbb{N}^*$, quelle est la loi de X_n ?

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
La v.a.r. X_n est une somme de n v.a.r. **indépendantes** de loi $\mathcal{B}(p)$, c'est-à-dire de loi $\mathcal{B}(1, p)$.

$$\boxed{\text{Par stabilité de la loi binomiale : } X_n \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p).}$$

Commentaire

On rappelle la propriété de stabilité de la loi binomiale :
Soit X_1, …, X_k des v.a.r. **indépendantes** telles que $X_1 \hookrightarrow \mathcal{B}(n_1, p)$, …, $X_k \hookrightarrow \mathcal{B}(n_k, p)$.
Alors :
$$\sum_{i=1}^{k} X_i \ \hookrightarrow \ \mathcal{B}\left(\sum_{i=1}^{k} n_i, p\right)$$

□

2. Pour tout entier naturel j, établir : $r_j = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}([X_n = j])\, p_n$.

Démonstration.
La famille $([N = n])_{n\in\mathbb{N}}$ forme un système complet d'événements.
Ainsi, par la formule des probabilités totales, pour tout $j \in \mathbb{N}$:

$$\begin{array}{rcl} r_j = \mathbb{P}([X = j]) & = & \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}([N = n] \cap [X = j]) \\ & = & \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}\left([N = n] \cap \left[\sum\limits_{k=1}^{N} U_k = j\right]\right) \\ & = & \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}\left([N = n] \cap \left[\sum\limits_{k=1}^{n} U_k = j\right]\right) \\ & = & \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}([N = n] \cap [X_n = j]) \\ & = & \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}([N = n]) \times \mathbb{P}([X_n = j]) \\ & = & \sum\limits_{n=0}^{+\infty} p_n \times \mathbb{P}([X_n = j]) \end{array}$$

(car les v.a.r. N et X_n sont indépendantes par lemme des coalitions)

$$\boxed{\forall j \in \mathbb{N},\ r_j = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}([X_n = j])\, p_n}$$

Commentaire

- Détaillons l'utilisation du lemme des coalitions.
  - × D'après l'énoncé, toutes les v.a.r. de la suite $(U_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ sont indépendantes de N.
    En particulier, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, les v.a.r. $U_1, \ldots, U_n$ sont indépendantes de N.
  - × Donc, par le lemme des coalitions, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la v.a.r. $\sum\limits_{k=1}^{n} U_k$ est indépendante de N.
- D'après l'énoncé, la variable aléatoire N est « à valeurs dans $\mathbb{N}$ ». Cela signifie exactement : $N(\Omega) \subset \mathbb{N}$ (et non $N(\Omega) = \mathbb{N}$).
- On ne peut donc pas considérer de plus petit système complet d'événements que la famille $([N = k])_{k\in\mathbb{N}}$. On rappelle que ceci est licite car on autorise un système complet d'événements à contenir l'ensemble vide.

□

3. Dans cette question *3.*, on suppose que N suit la loi binomiale de paramètres m, entier naturel, et π, réel dans $]0, 1[$. Soit j un entier naturel.

a) Justifier que $r_j = 0$ si $j > m$.

Démonstration.
- Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $U_k \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$. Donc $U_k(\Omega) = \{0, 1\}$.
- De plus, $N \hookrightarrow \mathcal{B}(m, \pi)$. Donc $N(\Omega) = [\![0, m]\!]$.
- Or : $X = \sum\limits_{k=1}^{N} U_k$.
  On en déduit :
  × au minimum, la v.a.r. X prend la valeur 0,
  × au maximum, la v.a.r. X prend la valeur $m \times 1 = m$.
  Ainsi : $X(\Omega) \subset [\![0, m]\!]$.

- Donc, si $j > m$, alors : $[X = j] = \varnothing$. D'où :

$$r_j \;=\; \mathbb{P}([X = j]) \;=\; \mathbb{P}(\varnothing) \;=\; 0$$

$$\boxed{\text{Pour tout } j > m : r_j = 0.}$$

□

b) Établir que pour tout $j \in [\![0, m]\!]$: $r_j = \sum\limits_{n=j}^{m} \binom{n}{j} p^j (1-p)^{n-j} \binom{m}{n} \pi^n (1-\pi)^{m-n}$.

Démonstration.
Soit $j \in [\![0, m]\!]$.
La famille $([N = n])_{n \in [\![0,m]\!]}$ forme un système complet d'événements.
En procédant de la même manière qu'en question ***2.***, on obtient :

$$\begin{aligned} r_j &= \sum_{n=0}^{m} \mathbb{P}([X_n = j])\, \mathbb{P}([N = n]) \\ &= \sum_{\substack{n=0 \\ j \in X_n(\Omega)}}^{m} \mathbb{P}([X_n = j])\, \mathbb{P}([N = n]) \\ &\quad + \cancel{\sum_{\substack{n=0 \\ j \notin X_n(\Omega)}}^{m} \mathbb{P}([X_n = j])\, \mathbb{P}([N = n])} \qquad \textit{(car si } j \notin X_n(\Omega) \textit{ alors } [X_n = j] = \varnothing\textit{)} \\ &= \sum_{n=j}^{m} \mathbb{P}([X_n = j])\, \mathbb{P}([N = n]) \end{aligned}$$

La dernière ligne est obtenue en constatant :

$$\left\{\begin{array}{l} n \in [\![0, m]\!] \\ j \in X_n(\Omega) = [\![0, n]\!] \\ j \in [\![0, m]\!] \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 0 \leqslant n \leqslant m \\ 0 \leqslant j \leqslant n \\ j \in [\![0, m]\!] \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 0 \leqslant n \leqslant m \\ j \leqslant n \\ j \in [\![0, m]\!] \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} j \leqslant n \leqslant m \\ \\ j \in [\![0, m]\!] \end{array}\right.$$

On en déduit :

$$\begin{aligned} r_j &= \sum_{n=j}^{m} \mathbb{P}([X_n = j])\, \mathbb{P}([N = n]) \\ &= \sum_{n=j}^{m} \binom{n}{j} p^j (1-p)^{n-j} \binom{m}{n} \pi^n (1-\pi)^{m-n} \qquad \textit{(car } X_n \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p) \textit{ et } N \hookrightarrow \mathcal{B}(m, \pi)\textit{)} \end{aligned}$$

$$\boxed{\forall j \in [\![0, m]\!],\ r_j = \sum_{n=j}^{m} \binom{n}{j} p^j (1-p)^{n-j} \binom{m}{n} \pi^n (1-\pi)^{m-n}}$$

Commentaire

- En question ***2.***, on savait seulement : $N(\Omega) \subset \mathbb{N}$. Le meilleur système complet d'événements que nous pouvions considérer était donc $([N = n])_{n \in \mathbb{N}}$ (contenant potentiellement plusieurs fois l'ensemble vide).
- Ici, d'après la question précédente, nous pouvons considérer le système complet d'événements plus précis $([N = n])_{n \in [\![0,m]\!]}$.

□

c) Vérifier que pour tous entiers j, n, m tels que $0 \leqslant j \leqslant n \leqslant m$: $\displaystyle\binom{n}{j}\binom{m}{n} = \binom{m}{j}\binom{m-j}{n-j}$.

Démonstration.
Soit $(j, n, m) \in \mathbb{N}^3$ tel que $0 \leqslant j \leqslant n \leqslant m$.

- D'une part :

$$\binom{n}{j}\binom{m}{n} = \frac{\cancel{n!}}{j!\,(n-j)!}\,\frac{m!}{\cancel{n!}\,(m-n)!} = \frac{m!}{j!\,(n-j)!\,(m-n)!}$$

- D'autre part :

$$\binom{m}{j}\binom{m-j}{n-j} = \frac{m!}{j!\,\cancel{(m-j)!}}\,\frac{\cancel{(m-j)!}}{(n-j)!\,\big((m-\cancel{j})-(n-\cancel{j})\big)!} = \frac{m!}{j!\,(n-j)!\,(m-n)!}$$

$\boxed{\text{Ainsi, pour tout } (j,n,m) \in \mathbb{N}^3 \text{ tel que } 0 \leqslant j \leqslant n \leqslant m : \displaystyle\binom{n}{j}\binom{m}{n} = \binom{m}{j}\binom{m-j}{n-j}.}$

Commentaire

La relation sur les coefficients binomiaux peut aussi se faire par dénombrement.
Pour ce faire, on considère un ensemble E à m éléments.
(on peut penser à une pièce qui contient m individus)
On souhaite alors construire une partie P à n éléments de cet ensemble contenant j éléments distingués *(on peut penser à choisir dans la pièce un groupe de n individus dans lequel figurent j représentants de ces individus)*.
Pour ce faire, on peut procéder de deux manières :

1) On choisit d'abord la partie à n éléments de E : $\binom{m}{n}$ possibilités.
On distingue ensuite j éléments de cet ensemble P : $\binom{n}{j}$ possibilités.
(on choisit d'abord les n individus et on élit ensuite j représentants de ces individus)
Ainsi, il y a $\binom{n}{j}\binom{m}{n}$ manières de construire P.

2) On choisit d'abord, dans E, les j éléments à distinguer : $\binom{m}{j}$ possibilités.
On choisit ensuite $n-j$ éléments dans E, pour former P, en y ajoutant les j éléments précédents : $\binom{m-j}{n-j}$ possibilités.
(on choisit d'abord les j représentants puis on leur adjoint un groupe de $n-j$ individus)
Ainsi, il y a $\binom{m}{j}\binom{m-j}{n-j}$ manières de construire P.

On retrouve ainsi le résultat.

□

d) En déduire, pour tout $j \in [\![0, m]\!]$: $r_j = \dbinom{m}{j} (p\pi)^j \displaystyle\sum_{\ell=0}^{m-j} \binom{m-j}{\ell} \big((1-p)\pi\big)^\ell (1-\pi)^{m-j-\ell}$.

Démonstration.
Soit $j \in [\![0, m]\!]$.

$$\begin{aligned}
r_j &= \sum_{n=j}^{m} \binom{n}{j} p^j (1-p)^{n-j} \binom{m}{n} \pi^n (1-\pi)^{m-n} && \textit{(d'après \textbf{3.b)})} \\
&= \sum_{n=j}^{m} \binom{n}{j} \binom{m}{n} p^j (1-p)^{n-j}\, \pi^n (1-\pi)^{m-n} \\
&= \sum_{n=j}^{m} \binom{m}{j} \binom{m-j}{n-j} p^j (1-p)^{n-j}\, \pi^n (1-\pi)^{m-n} && \textit{(d'après \textbf{3.c)})} \\
&= \binom{m}{j} p^j \sum_{n=j}^{m} \binom{m-j}{n-j} (1-p)^{n-j}\, \pi^n (1-\pi)^{m-n} \\
&= \binom{m}{j} p^j \sum_{\ell=0}^{m-j} \binom{m-j}{\ell} (1-p)^\ell\, \pi^{\ell+j}\, (1-\pi)^{m-(\ell+j)} && \textit{(avec le décalage d'indice } \ell = n-j\textit{)} \\
&= \binom{m}{j} p^j\, \pi^j \sum_{\ell=0}^{m-j} \binom{m-j}{\ell} (1-p)^\ell\, \pi^\ell\, (1-\pi)^{m-j-\ell}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{On en déduit, pour tout } j \in [\![0, m]\!] : r_j = \binom{m}{j} (p\,\pi)^j \sum_{\ell=0}^{m-j} \binom{m-j}{\ell} \big((1-p)\,\pi\big)^\ell (1-\pi)^{m-j-\ell}.}$$

□

e) Montrer finalement que X suit une loi binomiale et préciser ses paramètres en fonction de m, p et π.

Démonstration.

- D'après la question ***3.a)*** : $X(\Omega) \subset [\![0, m]\!]$.
- Soit $j \in [\![0, m]\!]$. D'après la question précédente :

$$\begin{aligned}
r_j &= \binom{m}{j} (p\,\pi)^j \sum_{\ell=0}^{m-j} \binom{m-j}{\ell} \big((1-p)\,\pi\big)^\ell (1-\pi)^{m-j-\ell} \\
&= \binom{m}{j} (p\,\pi)^j \big((1-p)\,\pi + (1-\pi)\big)^{m-j} && \textit{(par la formule du binôme de Newton)} \\
&= \binom{m}{j} (p\,\pi)^j \big(\cancel{\pi} - p\,\pi + 1 - \cancel{\pi}\big)^{m-j} \\
&= \binom{m}{j} (p\,\pi)^j\ (1 - p\,\pi)^{m-j}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{On en déduit : } X \hookrightarrow \mathcal{B}(m, p\,\pi).}$$

□

4. On suppose dans cette question *4.* que N suit la loi de Poisson de paramètre λ, réel strictement positif.

a) Montrer que pour tout entier naturel j, on a :

$$r_j = \mathrm{e}^{-j} \, \frac{(\lambda\, p)^j}{j!} \sum_{n=j}^{+\infty} \frac{1}{(n-j)!} \big(\lambda(1-p)\big)^{n-j}$$

Démonstration.
Soit $j \in \mathbb{N}$. D'après la question *2.* :

$$\begin{array}{rcl} r_j & = & \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}([X_n = j])\, p_n \\ & = & \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}([X_n = j])\, \mathbb{P}([N = n]) \\ & = & \displaystyle\sum_{\substack{n=0 \\ j \in X_n(\Omega)}}^{+\infty} \mathbb{P}([X_n = j])\, \mathbb{P}([N = n]) + \cancel{\sum_{\substack{n=0 \\ j \notin X_n(\Omega)}}^{+\infty} \mathbb{P}([X_n = j])\, \mathbb{P}([N = n])} \qquad \textit{(car si } j \notin X_n(\Omega) \textit{ alors } [X_n = j] = \varnothing\textit{)} \\ & = & \displaystyle\sum_{n=j}^{+\infty} \mathbb{P}([X_n = j])\, \mathbb{P}([N = n]) \end{array}$$

Comme $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$ d'après la question *1.*, alors $X_n(\Omega) = [\![0, n]\!]$.
Donc la dernière ligne est obtenue en constatant :

$$\left\{\begin{array}{l} n \in [\![0, +\infty[\![\\ j \in X_n(\Omega) = [\![0, n]\!] \\ j \in \mathbb{N} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 0 \leqslant n \\ 0 \leqslant j \leqslant n \\ j \in \mathbb{N} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 0 \leqslant n \\ j \leqslant n \\ j \in \mathbb{N} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} j \leqslant n \\ \\ j \in \mathbb{N} \end{array}\right.$$

On en déduit :

$$\begin{array}{rcl} r_j & = & \displaystyle\sum_{n=j}^{+\infty} \mathbb{P}([X_n = j])\, \mathbb{P}([N = n]) \\ & = & \displaystyle\sum_{n=j}^{+\infty} \binom{n}{j} p^j (1-p)^{n-j} \, \frac{\lambda^n}{n!} \, \mathrm{e}^{-\lambda} \qquad \textit{(car } X_n \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p) \textit{ et } N \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)\textit{)} \\ & = & \mathrm{e}^{-\lambda}\, p^j \displaystyle\sum_{n=j}^{+\infty} \binom{n}{j} \frac{1}{n!} (1-p)^{n-j} \lambda^n \end{array}$$

Or : $\displaystyle\binom{n}{j} \frac{1}{n!} = \frac{\cancel{n}!}{j!\,(n-j)!} \, \frac{1}{\cancel{n}!} = \frac{1}{j!\,(n-j)!}$.
On obtient :

$$\begin{array}{rcl} r_j & = & \mathrm{e}^{-\lambda}\, p^j \displaystyle\sum_{n=j}^{+\infty} \frac{1}{j!\,(n-j)!} (1-p)^{n-j} \lambda^n \\ & = & \mathrm{e}^{-\lambda}\, \dfrac{p^j}{j!} \displaystyle\sum_{n=j}^{+\infty} \frac{1}{(n-j)!} (1-p)^{n-j} \lambda^{(n-j)+j} \\ & = & \mathrm{e}^{-\lambda}\, \dfrac{(\lambda\, p)^j}{j!} \displaystyle\sum_{n=j}^{+\infty} \frac{1}{(n-j)!} (1-p)^{n-j} \lambda^{n-j} \end{array}$$

$$\boxed{\text{Finalement, pour tout } j \in \mathbb{N} : r_j = \mathrm{e}^{-\lambda}\, \frac{(\lambda\, p)^j}{j!} \sum_{n=j}^{+\infty} \frac{1}{(n-j)!} \big(\lambda\,(1-p)\big)^{n-j}.}$$

□

b) En déduire que X suit une loi de Poisson, et préciser son paramètre en fonction de p et λ.

Démonstration.

- Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $U_k \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$. Donc : $U_k(\Omega) = \{0, 1\}$.
  De plus, comme $N \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$: $N(\Omega) = \mathbb{N}$.

$$\boxed{\text{La v.a.r. } X \text{ s'écrit comme une somme de v.a.r. à valeurs entières. On en déduit : } X(\Omega) \subset \mathbb{N}.}$$

- Soit $j \in \mathbb{N}$. D'après la question précédente :

$$\begin{aligned} r_j &= \mathrm{e}^{-\lambda} \, \frac{(\lambda\, p)^j}{j!} \sum_{n=j}^{+\infty} \frac{1}{(n-j)!} \big(\lambda\,(1-p)\big)^{n-j} \\ &= \mathrm{e}^{-\lambda} \, \frac{(\lambda\, p)^j}{j!} \sum_{\ell=0}^{+\infty} \frac{1}{\ell!} \, \big(\lambda\,(1-p)\big)^{\ell} && \textit{(avec le décalage d'indice } \ell = n - j\textit{)} \\ &= \mathrm{e}^{-\lambda} \, \frac{(\lambda\, p)^j}{j!} \, \mathrm{e}^{\lambda\,(1-p)} && \textit{(car on reconnaît la série exponentielle de paramètre } \lambda\,(1-p)\textit{)} \\ &= \frac{(\lambda\, p)^j}{j!} \, \mathrm{e}^{-\lambda + \lambda(1-p)} \\ &= \frac{(\lambda\, p)^j}{j!} \mathrm{e}^{-\lambda\, p} \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{On en déduit : } X(\Omega) \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda\, p)}$$

□

Partie II – La loi binomiale négative

On généralise la définition des coefficients binomiaux aux nombres réels en posant, pour tout y réel et tout entier $k \in \mathbb{N}^*$: $\dbinom{y}{k} = \dfrac{1}{k!} \displaystyle\prod_{i=0}^{k-1} (y - i)$, et $\dbinom{y}{0} = 1$.

5. Écrire une fonction en **Scilab** d'entête `function c = CoeffBin(y, k)` qui calcule $\dbinom{y}{k}$.

Démonstration.

```
1 function c = CoeffBin(y, k)
2   c = 1
3   if k >= 1 then
4     for i = 0:(k-1)
5       c = c * (y - i) / (i + 1)
6     end
7   end
8 endfunction
```

Détaillons les différents éléments de ce code :

× en ligne 2, on initialise la variable `c` dont le but est de contenir en fin de programme :

$$\begin{cases} 1 & \text{si } k = 0 \\ \frac{1}{k!} \displaystyle\prod_{i=0}^{k-1} (y - i) & \text{si } k \geqslant 1 \end{cases}$$

Cette variable `c` est donc initialisée à 1.

× seux cas se présentent alors.

- Si $k = 0$, alors la variable `c` contient déjà le bon résultat : 1.
  Aucune opération n'est donc nécessaire.
- Si $k \geqslant 1$, alors on met à jour la variable `c` à l'aide d'une structure itérative (boucle `for`).
  Pour ce faire, on multiplie au $i^{\text{ème}}$ tour de boucle par la quantité $\frac{y-i}{i+1}$.
  Ainsi, `c` contient bien $\frac{1}{k!} \prod\limits_{i=0}^{k-1} (y-i)$ en sortie de boucle. En effet :

$$\binom{y}{k+1} = \frac{1}{(k+1)!} \prod_{i=0}^{k} (y-i) = \frac{1}{k+1} \frac{1}{k!} \times (y-k) \prod_{i=0}^{k-1} (y-i) = \frac{y-k}{k+1} \binom{y}{k}$$

Commentaire

Notons que le choix d'initialiser `c` à 1 n'est pas annodin. La variable `c` étant un produit, on choisit le réel 1 car il s'agit de l'élément neutre pour le produit.
De même, pour initialiser une variable contenant une somme, on choisira plutôt l'élément neutre pour la somme, c'est-à-dire le réel 0.

□

6. *La formule du binôme négatif.*
Soit c un réel strictement positif, et x un réel de $[0, 1[$.

Pour tout entier naturel n, on pose $I_n = \displaystyle\int_0^x \frac{(x-t)^n}{(1-t)^{c+n+1}} \, dt$.

On admet le résultat suivant :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \frac{1}{(1-x)^c} = \sum_{k=0}^{n} \binom{c+k-1}{k} x^k + c \binom{c+n}{n} I_n$$

a) Vérifier que pour tout $t \in [0, x]$: $0 \leqslant \dfrac{x-t}{1-t} \leqslant x$.

En déduire l'encadrement : $0 \leqslant I_n \leqslant \dfrac{x^{n+1}}{(1-x)^{c+1}}$.

Démonstration.

- Soit $t \in [0, x]$.

$$\begin{aligned} 0 \leqslant \frac{x-t}{1-t} \leqslant x \quad & \Leftrightarrow \quad 0 \leqslant x-t \leqslant x(1-t) && \textit{(car, comme } t \leqslant x < 1, \textit{ alors : } 1-t > 0\textit{)} \\ & \Leftrightarrow \quad 0 \leqslant x-t \leqslant x-xt \\ & \Leftrightarrow \quad -x \leqslant -t \leqslant -x\,t \\ & \Leftrightarrow \quad x \geqslant t \geqslant x\,t \end{aligned}$$

Or on sait déjà : $t \leqslant x$.
De plus, comme $x \in [0, 1[$, on a : $x\,t \leqslant t$.
Le dernier encadrement est donc vérifié.

$$\boxed{\text{Par équivalence : } \forall t \in [0, x],\ 0 \leqslant \frac{x-t}{1-t} \leqslant x.}$$

- Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $t \in [0, x]$.

$$\begin{aligned} 0 \leqslant \frac{x-t}{1-t} \leqslant x \quad & \Leftrightarrow \quad 0^n \leqslant \left(\frac{x-t}{1-t}\right)^n \leqslant x^n && \textit{(car la fonction } t \mapsto t^n \textit{ est strictement croissante sur } [0,+\infty[\textit{)} \\ & \Leftrightarrow \quad 0 \leqslant \frac{(x-t)^n}{(1-t)^n} \leqslant x^n \\ & \Leftrightarrow \quad 0 \leqslant \frac{(x-t)^n}{(1-t)^{n+c+1}} \leqslant \frac{x^n}{(1-t)^{c+1}} && \textit{(car } \frac{1}{(1-t)^{c+1}} > 0\textit{)} \end{aligned}$$

Or : $t \leqslant x$. Donc : $1 - t \geqslant 1 - x$.
Par stricte croissance de la fonction $t \mapsto t^{c+1}$ sur $[0, +\infty[$: $(1-t)^{c+1} \geqslant (1-x)^{c+1}$. Ainsi :

$$0 \leqslant \frac{(x-t)^n}{(1-t)^{n+c+1}} \leqslant \frac{x^n}{(1-x)^{c+1}}$$

Par croissance de l'intégration, les bornes étant dans l'ordre croissant ($0 \leqslant x$) :

$$0 \leqslant \int_0^x \frac{(x-t)^n}{(1-t)^{c+n+1}}\, dt \leqslant \int_0^x \frac{x^n}{(1-x)^{c+1}}\, dt$$

Donc :

$$0 \leqslant I_n \leqslant \frac{x^n}{(1-x)^{c+1}} \int_0^x dt = \frac{x^n}{(1-x)^{c+1}} \big[\, t \,\big]_0^x = \frac{x^n}{(1-x)^{c+1}}\, x$$

$$\boxed{\text{Ainsi : } \forall n \in \mathbb{N}^*,\ 0 \leqslant I_n \leqslant \frac{x^{n+1}}{(1-x)^{c+1}}.}$$

- Si $n = 0$. On a déjà montré : $(1-t)^{c+1} \geqslant (1-x)^{c+1}$. Donc, par stricte décroissance de la fonction inverse sur $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ sur $]0, +\infty[$:

$$\frac{1}{(1-t)^{c+1}} \leqslant \frac{1}{(1-x)^{c+1}}$$

Comme $t < 1$, on a :

$$0 \leqslant \frac{1}{(1-t)^{c+1}} \leqslant \frac{1}{(1-x)^{c+1}}$$

Par croissance de l'intégration, les bornes étant dans l'ordre croissant ($0 \leqslant x$) :

$$0 \leqslant \int_0^x \frac{1}{(1-t)^{c+1}}\, dt \leqslant \int_0^x \frac{1}{(1-x)^{c+1}}\, dt$$

Donc :

$$0 \leqslant I_0 \leqslant \frac{1}{(1-x)^{c+1}} \int_0^x dt = \frac{1}{(1-x)^{c+1}} \big[\, t \,\big]_0^x = \frac{1}{(1-x)^{c+1}}\, x$$

$$\boxed{\text{Ainsi : } 0 \leqslant I_0 \leqslant \frac{x}{(1-x)^{c+1}}.}$$

Commentaire

On isole ici le cas $n = 0$, car l'argument « la fonction $t \mapsto t^n$ est strictement croissante sur $[0, +\infty[$ » est faux si $n = 0$. On traite donc ce cas à part. □

b) (i) Montrer, pour tout n dans $\mathbb{N}^*$: $\displaystyle\binom{c+n}{n} = \prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{c}{k}\right)$.

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
Par définition du coefficient binomial :

$$\begin{aligned}
\binom{c+n}{n} &= \frac{1}{n!} \prod_{i=0}^{n-1} \big((c+n) - i\big) \\
&= \frac{1}{n!} \prod_{k=1}^{n} (c+k) && \textit{(avec le changement d'indice } k = n - i\textit{)} \\
&= \frac{\prod\limits_{k=1}^{n} (c+k)}{\prod\limits_{k=1}^{n} k} = \prod_{k=1}^{n} \frac{c+k}{k} \\
&= \prod_{k=1}^{n} \left(\frac{c}{k} + 1\right)
\end{aligned}$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \binom{c+n}{n} = \prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{c}{k}\right)}$$

□

(ii) Montrer que pour tout réel t positif, $\ln(1+t) \leqslant t$.

Démonstration.
La fonction $x \mapsto \ln(1+x)$ est concave sur $]-1, +\infty[$. Sa courbe représentative est donc située sous ses tangentes, notamment celle au point d'abscisse 0, droite d'équation :

$$y = x$$

$$\boxed{\text{On en déduit : } \forall t \in\ ]-1, +\infty[,\ \ln(1+t) \leqslant t.}$$

Commentaire

L'énoncé demande seulement de montrer que cette inégalité est vraie pour tout $t \in [0, +\infty[$. Bien évidemment, celle-ci étant vraie sur $]-1, +\infty[$, elle l'est en particulier sur $[0, +\infty[$. □

(iii) Établir, pour tout entier naturel $k \geqslant 2$: $\dfrac{1}{k} \leqslant \ln(k) - \ln(k-1)$.

En déduire : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k} \leqslant 1 + \ln(n)$.

Démonstration.

- Soit $k \geqslant 2$.

$$\begin{aligned}\frac{1}{k} \leqslant \ln(k) - \ln(k-1) \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{1}{k} \leqslant \ln\left(\frac{k}{k-1}\right) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{k} \leqslant -\ln\left(\frac{k-1}{k}\right) \\ &\Leftrightarrow \quad -\frac{1}{k} \geqslant \ln\left(\frac{k-1}{k}\right) \quad \Leftrightarrow \quad -\frac{1}{k} \geqslant \ln\left(1 - \frac{1}{k}\right)\end{aligned}$$

Or, comme $k \geqslant 2$: $-\dfrac{1}{k} \in \,]-1, +\infty[$.
On peut donc appliquer la question précédente et ainsi la dernière inégalité est vraie.

$$\boxed{\text{Par équivalence : } \forall k \geqslant 2,\ \frac{1}{k} \leqslant \ln(k) - \ln(k-1).}$$

Commentaire

- La démonstration présentée nécessite d'avoir démontré l'inégalité de la question précédente pour tout $t \in \,]-1, +\infty[$.
- On pouvait également utiliser l'inégalité des accroissements finis.
  On note $g : t \mapsto \ln(t)$. On sait :
  - $\times$ g est dérivable sur $[k-1, k]$,
  - $\times$ $\forall t \in [k-1, k]$, $\dfrac{1}{k} \leqslant g'(t)$.

  On en déduit, par inégalités des accroissements finis :

$$\forall (x, y) \in [k-1, k]^2,\ \frac{1}{k}(y - x) \leqslant g(y) - g(x)$$

  En appliquant cette inégalité à $y = k$ et $x = k-1$, on obtient :

$$\frac{1}{k} \leqslant \ln(k) - \ln(k-1)$$

- On pouvait également procéder par intégration.
  Tout d'abord : $\forall t \in [k-1, k]$, $\dfrac{1}{k} \leqslant \dfrac{1}{t}$.
  Par croissance de l'intégration, les bornes étant dans l'ordre croissant $(k-1 \leqslant k)$:

$$\frac{1}{k} \leqslant \int_{k-1}^{k} \frac{1}{t}\, dt = \left[\ \ln(t)\ \right]_{k-1}^{k} = \ln(k) - \ln(k-1)$$

- Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
  On somme l'inégalité précédente pour k variant de 2 à n. On obtient :

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} \leqslant \sum_{k=2}^{n} \big(\ln(k) - \ln(k-1)\big) = \ln(n) - \cancel{\ln(1)}$$

On ajoute 1 de chaque côté de l'inégalité :

$$\begin{array}{ccc} 1 + \sum\limits_{k=2}^{n} \dfrac{1}{k} & \leqslant & 1 + \ln(n) \\ \shortparallel & & \\ \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k} & & \end{array}$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \ \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \leqslant 1 + \ln(n)}$$

□

(iv) Montrer que pour tout n dans $\mathbb{N}^*$: $\ln\left(\dbinom{c+n}{n}\right) \leqslant c\,(1 + \ln(n))$.

En déduire : $\lim\limits_{n \to +\infty} \dbinom{c+n}{n} x^{n+1} = 0$.

Démonstration.

- Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{array}{rcll} \ln\left(\dbinom{c+n}{n}\right) & = & \ln\left(\prod\limits_{k=1}^{n} \left(1 + \dfrac{c}{k}\right)\right) & \textit{(d'après } \textbf{\textit{6.b)(i)}}\textit{)} \\ & = & \sum\limits_{k=1}^{n} \ln\left(1 + \dfrac{c}{k}\right) & \\ & \leqslant & \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{c}{k} & \textit{(d'après } \textbf{\textit{6.b)(ii)}}\textit{)} \\ & \leqslant & c \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k} & \\ & \leqslant & c\big(1 + \ln(n)\big) & \textit{(d'après } \textbf{\textit{6.b)(iii)}}\textit{)} \end{array}$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \ \ln\left(\binom{c+n}{n}\right) \leqslant c\big(1 + \ln(n)\big)}$$

- Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
  Par croissance de la fonction exp sur $\mathbb{R}$, on déduit de l'inégalité précédente :

$$\binom{c+n}{n} \leqslant \exp\big(c(1 + \ln(n))\big)$$

$$\boxed{\text{De plus } x^{n+1} \geqslant 0, \text{ donc : } 0 \ \leqslant \ \binom{c+n}{n} x^{n+1} \ \leqslant \ \exp(c + c\,\ln(n))\, x^{n+1}.}$$

- Or :

$$\begin{array}{rcl} \exp(c + c\,\ln(n))\, x^{n+1} & = & \exp(c + c\,\ln(n))\, \exp((n+1)\ln(x)) \\ & = & \exp\big(c + c\,\ln(n) + (n+1)\ln(x)\big) \\ & = & \exp\big(c + \ln(x) + c\,\ln(n) + n\,\ln(x)\big) \\ & = & \exp\left(n\,\ln(x)\left(\dfrac{c + \ln(x)}{n\,\ln(x)} + \dfrac{c\,\ln(n)}{n\,\ln(x)} + 1\right)\right) \end{array}$$

  De plus : $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{c + \ln(x)}{n\,\ln(x)} = 0$ et, par croissances comparées, $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{c}{\ln(x)} \dfrac{\ln(n)}{n} = 0$.

  Ainsi : $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{c + \ln(x)}{n\,\ln(x)} + \dfrac{c\,\ln(n)}{n\,\ln(x)} + 1 = 1$.

Comme $x \in [0,1[$, alors $\ln(x) < 0$. D'où : $\lim\limits_{n \to +\infty} n \ln(x) = -\infty$.

On a donc : $\lim\limits_{n \to +\infty} n \ln(x) \left(\dfrac{c + \ln(x)}{n \ln(x)} + \dfrac{c \ln(n)}{n \ln(x)} + 1 \right) = -\infty$.

Par composition par la fonction exp, on en déduit :

$$\lim_{n \to +\infty} \exp\left(n \ln(x) \left(\frac{c + \ln(x)}{n \ln(x)} + \frac{c \ln(n)}{n \ln(x)} + 1 \right) \right) \; = \; 0$$

- Finalement :

  × $\lim\limits_{n \to +\infty} 0 = 0$

  × $\lim\limits_{n \to +\infty} \exp(c + c \ln(n))\, x^{n+1} = 0$

$$\boxed{\text{Par théorème d'encadrement : } \lim_{n \to +\infty} \binom{c+n}{n} x^{n+1} = 0.}$$

□

c) En conclure que la série $\sum\limits_{k \geqslant 0} \dbinom{c+k-1}{k} x^k$ est convergente, et établir la formule du binôme négatif :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \binom{c+k-1}{k} x^k = \frac{1}{(1-x)^c}$$

Démonstration.

- D'après l'énoncé, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{c+k-1}{k} x^k \; = \; \frac{1}{(1-x)^c} - c \binom{c+n}{n} I_n$$

  Pour démontrer que la série $\sum\limits_{k \geqslant 0} \dbinom{c+k-1}{k} x^k$ est convergente et que sa somme vaut $\dfrac{1}{(1-x)^c}$, on va donc démontrer :

$$\lim_{n \to +\infty} c \binom{c+n}{n} I_n = 0$$

- Soit $n \in \mathbb{N}^*$. D'après la question ***6.a)*** :

$$0 \; \leqslant \; I_n \; \leqslant \; \frac{x^{n+1}}{(1-x)^{c+1}}$$

  On en déduit :

$$0 \; \leqslant \; c \binom{c+n}{n} I_n \; \leqslant \; \frac{c}{(1-x)^{c+1}} \binom{c+n}{n} x^{n+1}$$

  Or, d'après la question précédente : $\lim\limits_{n \to +\infty} \dbinom{c+n}{n} x^{n+1} = 0$.

  Ainsi :

  × $\lim\limits_{n \to +\infty} 0 = 0$

  × $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{c}{(1-x)^{c+1}} \dbinom{c+n}{n} x^{n+1} = 0$

$$\boxed{\text{Par théorème d'encadrement : } \lim_{n \to +\infty} c \binom{c+n}{n} I_n = 0.}$$

$$\boxed{\text{On en conclut que la série } \sum_{k \geqslant 0} \binom{c+k-1}{k} x^k \text{ converge et : } \sum_{k=0}^{+\infty} \binom{c+k-1}{k} x^k \; = \; \frac{1}{(1-x)^c}.}$$

□

7. Soit p un réel de $]0,1[$ et r un réel strictement positif. Montrer que la suite de nombres $(p_k)_{k\in\mathbb{N}}$ définie par $p_k = \binom{r+k-1}{k}(1-p)^k\,p^r$ définit une loi de probabilité d'une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$. On l'appelle *loi binomiale négative* de paramètres r et p.

Démonstration.

- Comme $p \in\,]0,1[$, alors :
$$p_k = \binom{r+k-1}{k}(1-p)^k p^r \ \geqslant\ 0$$
- Montrons que la série $\sum\limits_{k\geqslant 0} p_k$ converge et que sa somme vaut 1.
Soit $n \in \mathbb{N}$.
$$\sum_{k=0}^{n} p_k \ = \ \sum_{k=0}^{n}\binom{r+k-1}{k}(1-p)^k\,p^r \ = \ p^r\sum_{k=0}^{n}\binom{r+k-1}{k}(1-p)^k$$
On applique la question précédente à $c = r$ et $x = 1-p$ (on a bien $c > 0$ et $x \in [0,1[$. On obtient que la série $\sum\limits_{k\geqslant 0}\binom{r+k-1}{k}(1-p)^k$ converge et :
$$\sum_{k=0}^{+\infty}\binom{r+k-1}{k}(1-p)^k \ = \ \frac{1}{(\cancel{1}-(\cancel{1}-p))^r} \ = \ \frac{1}{p^r}$$
On en déduit que la série $\sum\limits_{k\geqslant 0} p_k$ converge et :
$$\sum_{k=0}^{+\infty} p_k \ = \ \cancel{p^r}\,\frac{1}{\cancel{p^r}} \ = \ 1$$

$$\boxed{\text{On en conclut que la suite } (p_k)_{k\in\mathbb{N}} \text{ définit une loi de probabilité.}}$$

□

8. Si Y est une variable aléatoire suivant la loi binomiale négative de paramètres 1 et p, reconnaître la loi de $Y+1$.

Démonstration.
On note $V = Y+1$.

- Tout d'abord, comme $Y(\Omega) = \mathbb{N}$, on a : $V(\Omega) = \mathbb{N}^*$.
- Soit $k \in \mathbb{N}^*$.
$$[V = k] \ = \ [Y+1 = k] \ = \ [Y = k-1]$$
On en déduit :
$$\begin{array}{rcll} \mathbb{P}([V=k]) & = & \mathbb{P}([Y=k-1]) \ = \ p_{k-1} & \\ & = & \dbinom{1+(k-1)-1}{k-1}(1-p)^{k-1}\,p^1 & \textit{(car } Y \textit{ suit la loi binomiale négative de paramètres 1 et } p\textit{)} \\ & = & (1-p)^{k-1}\,p & \end{array}$$

$$\boxed{\text{On reconnaît la loi géométrique de paramètre } p : V \hookrightarrow \mathcal{G}(p).}$$

□

9. *Espérance et variance.*
Soit Z une variable aléatoire suivant la loi binomiale négative de paramètres r réel strictement positif et $p \in]0,1[$.

a) Montrer que pour tout entier $k \geqslant 1$: $k \dbinom{r+k-1}{k} = r \dbinom{r+k-1}{k-1}$.

Démonstration.
Soit $k \geqslant 1$.

- D'une part :

$$k \binom{r+k-1}{k} = k \, \frac{(r+k-1)!}{k!\,(r+k-1-k)!} = \cancel{k} \, \frac{(r+k-1)!}{\cancel{k}\,(k-1)!\,(r-1)!} = \frac{(r+k-1)!}{(k-1)!\,(r-1)!}$$

- D'autre part :

$$r \binom{r+k-1}{k-1} = r \, \frac{(r+k-1)!}{(k-1)!\,(r+k-1-(k-1))!} = \cancel{r} \, \frac{(r+k-1)!}{(k-1)!\,\cancel{r}\,(r-1)!} = \frac{(r+k-1)!}{(k-1)!\,(r-1)!}$$

$$\boxed{\text{On en déduit : } \forall k \geqslant 1,\ k \binom{r+k-1}{k} = r \binom{r+k-1}{k-1}.}$$

Commentaire

La relation sur les coefficients binomiaux peut aussi se faire par dénombrement.
Pour ce faire, on considère un ensemble E à $r+k-1$ éléments.
(on peut penser à une pièce qui contient $r+k-1$ individus)
On souhaite alors construire une partie P à k éléments de cet ensemble contenant 1 élément distingué *(on peut penser à choisir dans la pièce un groupe de k individus dans lequel figure 1 représentant de ces individus)*.
Pour ce faire, on peut procéder de deux manières :

1) On choisit d'abord la partie à k éléments de E : $\binom{r+k-1}{k}$ possibilités.
On distingue ensuite 1 élément de cet ensemble P : $\binom{k}{1} = k$ possibilités.
(on choisit d'abord les k individus et on élit ensuite 1 représentant de ces individus)
Ainsi, il y a $k \binom{r+k-1}{k}$ manières de construire P.

2) On choisit d'abord, dans E, une partie à $(k-1)$ éléments : $\binom{r+k-1}{k-1}$ possibilités.
On forme alors P en ajoutant à ces $k-1$ éléments, l'élément à distinguer. Cet élément est choisi parmi les $r+k-1-(k-1) = r$ éléments restants dans E : $\binom{r}{1} = r$ possibilités.
(on choisit d'abord $k-1$ individus puis on leur adjoint 1 individu parmi les r restants dans E)
Ainsi, il y a $\binom{r+k-1}{k-1}\, r$ manières de construire P.

On retrouve ainsi le résultat. □

b) Montrer que Z admet une espérance et que l'on a : $\mathbb{E}(Z) = \dfrac{r(1-p)}{p}$.

Démonstration.

- La v.a.r. Z admet une espérance si et seulement si la série $\sum\limits_{n \geqslant 0} n\,\mathbb{P}([Z=n])$ est absolument convergente. Cette série étant à termes positifs, cela revient à démontrer qu'elle est convergente.
- Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{array}{rll}
& \sum\limits_{k=0}^{n} k\,\mathbb{P}([Z=k]) & \\
= & \sum\limits_{k=0}^{n} k \dbinom{r+k-1}{k} (1-p)^k\, p^r & \\
= & p^r \sum\limits_{k=1}^{n} k \dbinom{r+k-1}{k} (1-p)^k & \\
= & p^r \sum\limits_{k=1}^{n} r \dbinom{r+k-1}{k-1} (1-p)^k & \textit{(d'après la question précédente)} \\
= & r\,p^r \sum\limits_{k=0}^{n-1} \dbinom{r+k}{k} (1-p)^{k+1} & \textit{(par décalage d'indice)} \\
= & r\,\dfrac{1-p}{p} \sum\limits_{k=0}^{n-1} \dbinom{(r+1)+k-1}{k} (1-p)^k\, p^{r+1} & \\
= & r\,\dfrac{1-p}{p} \sum\limits_{k=0}^{n-1} \mathbb{P}([W=k]) & \textit{(où } W \textit{ suit la loi binomiale négative de paramètres } r+1 \textit{ et } p\textit{)}
\end{array}$$

Or la famille $([W=k])_{k \in \mathbb{N}}$ forme un système complet d'événements. Donc la série $\sum\limits_{n \geqslant 0} \mathbb{P}([W=n])$ converge et sa somme vaut 1.

$$\boxed{\text{On en déduit que } Z \text{ admet une espérance.}}$$

De plus :

$$\mathbb{E}(Z) \;=\; r\,\dfrac{1-p}{p} \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}([W=k]) \;=\; r\,\dfrac{1-p}{p}\,1$$

$$\boxed{\mathbb{E}(Z) \;=\; r\,\dfrac{1-p}{p}}$$

□

c) Montrer que Z admet une variance et que l'on a : $\mathbb{V}(Z) = \dfrac{r(1-p)}{p^2}$.
On pourra commencer par calculer l'espérance de $Z(Z-1)$.

Démonstration.

- La v.a.r. $Z(Z-1)$ admet une espérance si et seulement si la série $\sum\limits_{n \geqslant 0} n(n-1)\,\mathbb{P}([Z=n])$ est absolument convergente. Cette série étant à termes positifs, cela revient à démontrer qu'elle est convergente.

- Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{array}{rl}
& \sum\limits_{k=0}^{n} k(k-1)\, \mathbb{P}([Z=k]) \\
= & \sum\limits_{k=2}^{n} k(k-1)\, \mathbb{P}([Z=k]) \\
= & \sum\limits_{k=2}^{n} (k-1)k \dbinom{r+k-1}{k} (1-p)^k\, p^r \\
= & p^r \sum\limits_{k=2}^{n} (k-1)\, r \dbinom{r+k-1}{k-1} (1-p)^k \qquad \textit{(d'après la question \textbf{9.a)})} \\
= & r\, p^r \sum\limits_{k=1}^{n-1} k \dbinom{r+k}{k} (1-p)^{k+1} \qquad \textit{(par décalage d'indice)} \\
= & r\, \dfrac{1-p}{p} \sum\limits_{k=1}^{n-1} k \dbinom{(r+1)+k-1}{k} (1-p)^k p^{r+1} \\
= & r\, \dfrac{1-p}{p} \sum\limits_{k=0}^{n-1} k \dbinom{(r+1)+k-1}{k} (1-p)^k p^{r+1} \\
= & r\, \dfrac{1-p}{p} \sum\limits_{k=0}^{n-1} k\, \mathbb{P}([W=k]) \qquad \textit{(où W suit la loi binomiale négative de paramètres $r+1$ et p)}
\end{array}$$

Or, d'après la question précédente, la v.a.r. W admet une espérance et $\mathbb{E}(W) = (r+1)\, \dfrac{1-p}{p}$.

$$\boxed{\text{On en déduit que la v.a.r. } Z(Z-1) \text{ admet une espérance.}}$$

De plus :

$$\mathbb{E}\big(Z(Z-1)\big) \ = \ r\, \frac{1-p}{p}\, \mathbb{E}(W) \ = \ r\, \frac{1-p}{p}\, (r+1)\, \frac{1-p}{p}$$

$$\boxed{\mathbb{E}\big(Z(Z-1)\big) \ = \ (r+1) r \left(\frac{1-p}{p}\right)^2}$$

- D'autre part :

$$Z^2 \ = \ Z(Z-1) + Z$$

Ainsi, Z^2 admet une espérance comme somme de v.a.r. qui admettent une espérance.

$$\boxed{\text{On en conclut que la v.a.r. } Z \text{ admet une variance.}}$$

- De plus, par linéarité de l'espérance :

$$\mathbb{E}(Z^2) \ = \ \mathbb{E}\big(Z(Z-1)\big) + \mathbb{E}(Z) \ = \ (r+1) r \left(\frac{1-p}{p}\right)^2 + r\, \frac{1-p}{p}$$

Enfin, d'après la formule de Kœnig-Huygens :

$$\begin{aligned}
\mathbb{V}(Z) &= \mathbb{E}(Z^2) - (\mathbb{E}(Z))^2 \\
&= (r+1)r\left(\frac{1-p}{p}\right)^2 + r\,\frac{1-p}{p} - r^2\left(\frac{1-p}{p}\right)^2 \\
&= r\left(\frac{1-p}{p}\right)^2 (\cancel{r} + 1 - \cancel{r}) + r\,\frac{1-p}{p} \\
&= r\left(\frac{1-p}{p}\right)\left(\frac{1-p}{p}+1\right) \;=\; r\left(\frac{1-p}{p}\right)\left(\frac{1-\cancel{p}+\cancel{p}}{p}\right) \\
&= r\,\frac{1-p}{p^2}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathbb{V}(Z) = r\,\frac{1-p}{p^2}}$$

□

Partie III – Les lois de Panjer

On reprend les notations du début du problème : la variable aléatoire N à valeurs dans $\mathbb{N}$ a sa loi donnée par $p_k = \mathbb{P}([N=k])$ pour $k \in \mathbb{N}$.
On suppose dans toute la suite du sujet que la loi de N vérifie la relation de Panjer : il existe deux réels a et b, avec $a < 1$ et $a + b > 0$, tels que :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad p_k = \left(a + \frac{b}{k}\right) p_{k-1}$$

On dira alors que N suit la loi $\mathcal{P}(a,b)$.

10. *Détermination des lois de Panjer.*

a) Montrer que pour tout entier k strictement positif, on a : $p_k = p_0 \displaystyle\prod_{i=1}^{k}\left(a+\frac{b}{i}\right)$.

Démonstration. Démontrons par récurrence : $\forall k \in \mathbb{N}^*, \mathcal{P}(k)$ où $\mathcal{P}(k) : p_k = p_0 \displaystyle\prod_{i=1}^{k}\left(a+\frac{b}{i}\right)$.

- **Initialisation** :

$$p_0 \prod_{i=1}^{1}\left(a+\frac{b}{i}\right) = p_0\left(a+\frac{b}{1}\right) = \left(a+\frac{b}{1}\right)p_{1-1} = p_1$$

D'où $\mathcal{P}(1)$.

- **Hérédité** : soit $k \in \mathbb{N}^*$.

Supposons $\mathcal{P}(k)$ et démontrons $\mathcal{P}(k+1)$ (*i.e.* $p_{k+1} = p_0 \displaystyle\prod_{i=1}^{k+1}\left(a+\frac{b}{i}\right)$).

$$\begin{aligned}
p_{k+1} &= \left(a+\frac{b}{k+1}\right)p_k && \textit{(d'après l'énoncé)} \\
&= \left(a+\frac{b}{k}\right) \times p_0 \prod_{i=1}^{k}\left(a+\frac{b}{i}\right) && \textit{(par hypothèse de récurrence)} \\
&= p_0 \prod_{i=1}^{k+1}\left(a+\frac{b}{i}\right)
\end{aligned}$$

D'où $\mathcal{P}(k+1)$.

$$\boxed{\text{Ainsi, par principe de récurrence : } \forall k \in \mathbb{N}^*,\ p_k = p_0 \prod_{i=1}^{k}\left(a+\frac{b}{i}\right).}$$

□

b) Dans cette question, on suppose que $a = 0$.
Montrer que N suit une loi de Poisson de paramètre b.

Démonstration.

- On a déjà : $N(\Omega) \subset \mathbb{N}$
- Soit $k \in \mathbb{N}^*$.
  Si $a = 0$, alors, d'après la question précédente :

$$p_k \;=\; p_0 \prod_{i=1}^{k} \frac{b}{i} \;=\; p_0 \, \frac{\prod\limits_{i=1}^{k} b}{\prod\limits_{i=1}^{k} i} \;=\; p_0 \, \frac{b^k}{k!}$$

- On sait de plus que la famille $([N = k])_{k \in \mathbb{N}}$ est un système complet d'événements, donc :

$$1 \;=\; \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}([N = k]) \;=\; \mathbb{P}([N = 0]) + \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}([N = k]) \;=\; p_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} p_k$$

  Or, en reconnaissant une série exponentielle de paramètre b :

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{+\infty} p_k \;&=\; \sum_{k=1}^{+\infty} p_0 \frac{b^k}{k!} \;=\; p_0 \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{b^k}{k!} \\ &=\; p_0 \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{b^k}{k!} - 1 \right) \;=\; p_0 \left(\mathrm{e}^b - 1 \right) \end{aligned}$$

  On en déduit :

$$\begin{aligned} & 1 = p_0 + p_0(\mathrm{e}^b - 1) \\ \text{donc} \qquad & 1 = \mathrm{e}^b \, p_0 \\ \text{d'où} \qquad & \mathrm{e}^{-b} = p_0 \end{aligned}$$

  Finalement :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \; \mathbb{P}([N = k]) = \mathrm{e}^{-b} \, \frac{b^k}{k!}$$

$$\boxed{\text{On reconnaît une loi de Poisson de paramètre } b : N \hookrightarrow \mathcal{P}(b).}$$

Commentaire

D'après l'énoncé, la variable aléatoire N est « à valeurs dans $\mathbb{N}$ ». Cela signifie exactement : $N(\Omega) \subset \mathbb{N}$ (et non $N(\Omega) = \mathbb{N}$).

□

c) Dans cette question, on suppose que $a < 0$.

(i) Montrer qu'il existe un unique entier naturel r, tel que : $\forall k > r$, $p_k = 0$ et $\forall k \leqslant r$, $p_k \neq 0$.
On pourra raisonner par l'absurde, et supposer les p_k tous strictement positifs.

Démonstration.
Raisonnons par l'absurde. Supposons : $\forall k \in \mathbb{N}$, $p_k > 0$.

- Soit $k \in \mathbb{N}$. On sait :

$$p_{k+1} \;=\; \left(a + \frac{b}{k+1} \right) p_k$$

  On va donc chercher à démontrer qu'il existe un entier k_0 tel que :

$$a + \frac{b}{k_0 + 1} < 0$$

En effet, si c'est le cas, on aura :

× d'une part $p_{k_0+1} > 0$ par hypothèse,

× d'autre part, comme $p_{k_0} > 0$ et $a + \dfrac{b}{k_0+1} < 0$: $p_{k_0+1} = \left(a + \dfrac{b}{k_0+1}\right) p_{k_0} < 0$.

Ce qui est absurde.

- On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} a + \frac{b}{k+1} < 0 \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{b}{k+1} < -a \ \Leftrightarrow \ \frac{1}{k+1} < -\frac{a}{b} \\ &\Leftrightarrow \quad k+1 > -\frac{b}{a} && \textit{(par stricte décroissance de la fonction inverse sur }]0,+\infty[, \textit{ avec } -\frac{b}{a} > 0) \\ &\Leftrightarrow \quad k > -\frac{b}{a} - 1 \end{aligned}$$

On choisit alors : $k_0 = \left\lceil -\dfrac{b}{a} - 1 \right\rceil$ pour obtenir la contradiction voulue.

$$\boxed{\text{On en déduit qu'il existe } i_0 \in \mathbb{N} \text{ tel que } p_{i_0} = 0.}$$

- On note alors : $s = \min(i \in \mathbb{N} \mid p_i = 0)$.
L'entier s existe car l'ensemble $\{i \in \mathbb{N} \mid p_i = 0\}$ est un sous-ensemble de $\mathbb{N}$ non vide (l'entier k_0 appartient à cet ensemble).
Soit $k \in \mathbb{N}$. Deux cas se présentent.

× si $k < s$ (*i.e.* $k \leqslant s-1$), alors, par définition de s : $p_k > 0$.

× si $k \geqslant s$, alors : $p_k = 0$.
En effet, on sait, par définition de s : $p_s = 0$.
De plus, d'après la question ***10.a)*** :

$$p_k \ = \ p_0 \prod_{i=1}^{k} \left(a + \frac{b}{i}\right) \ = \ p_0 \prod_{i=1}^{s} \left(a + \frac{b}{i}\right) \prod_{i=s+1}^{k} \left(a + \frac{b}{i}\right) \ = \ p_s \prod_{i=s+1}^{k} \left(a + \frac{b}{i}\right) \ = \ 0$$

$$\boxed{\text{En choisissant } r = s-1, \text{ on a bien : } \forall k \leqslant r,\ p_k > 0 \text{ et } \forall k > r,\ p_k = 0.}$$

□

(ii) Montrer : $b = -a(r+1)$.

Démonstration.
Par définition de r :

× $p_r > 0$,

× $p_{r+1} = 0$.

Or : $p_{r+1} \ = \ \left(a + \dfrac{b}{r+1}\right) p_r$. On en déduit :

$$\begin{aligned} & a + \frac{b}{r+1} = 0 \\ \text{donc} \quad & \frac{b}{r+1} = -a \\ \text{d'où} \quad & b = -a(r+1) \end{aligned}$$

$$\boxed{b = -a(r+1)}$$

□

(iii) Établir que pour tout $k \in [\![0, r]\!]$, $p_k = (-a)^k \binom{r}{k} p_0$.

En déduire que $p_0 = \dfrac{1}{(1-a)^r}$.

Démonstration.

- Soit $k \in [\![1, r]\!]$. D'après les questions ***10.a)*** et ***10.c)(ii)*** :

$$\begin{aligned}
p_k &= p_0 \prod_{i=1}^{k} \left(a - \frac{a(r+1)}{i} \right) = p_0 \prod_{i=1}^{k} \left(-a \left(-1 + \frac{r+1}{i} \right) \right) \\
&= p_0 \, (-a)^k \prod_{i=1}^{k} \frac{r+1-i}{i} = p_0 \, (-a)^k \frac{\prod\limits_{i=1}^{k} (r+1-i)}{\prod\limits_{i=1}^{k} i} \\
&= p_0 \, (-a)^k \, \frac{r \, (r-1) \cdots (r+1-k)}{k!} \\
&= p_0 \, (-a)^k \, \frac{\frac{r!}{(r-k)!}}{k!} = p_0 \, (-a)^k \, \frac{r!}{k! \, (r-k)!} \\
&= p_0 \, (-a)^k \binom{r}{k}
\end{aligned}$$

- De plus : $(-a)^0 \binom{r}{0} p_0 = p_0$.

$$\boxed{\text{Finalement : } \forall k \in [\![0, r]\!],\ p_k = (-a)^k \binom{r}{k} p_0.}$$

- La famille $([N = k])_{k \in \mathbb{N}}$ forme un système complet d'événements. Donc :

$$\begin{aligned}
1 &= \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}([N = k]) = \mathbb{P}([N = 0]) + \sum_{k=1}^{r} \mathbb{P}([N = k]) + \sum_{k=r+1}^{+\infty} \mathbb{P}([N = k]) \\
&= p_0 + \sum_{k=1}^{r} (-a)^k \binom{r}{k} p_0 + 0 && \textit{(d'après ce qui précède)} \\
&= p_0 \left(1 + \sum_{k=1}^{r} \binom{r}{k} (-a)^k \right)
\end{aligned}$$

Or :

$$\begin{aligned}
1 + \sum_{k=1}^{r} \binom{r}{k} (-a)^k &= \binom{r}{0} (-a)^0 + \sum_{k=1}^{r} \binom{r}{k} (-a)^k \\
&= \sum_{k=0}^{r} \binom{r}{k} (-a)^k = \sum_{k=0}^{r} \binom{r}{k} (-a)^k 1^{r-k} \\
&= (-a+1)^r && \textit{(d'après la formule du binôme de Newton)}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{On en déduit : } p_0 = \frac{1}{(1-a)^r}.}$$

Commentaire

- Dans cette partie, on a seulement l'inclusion : $N(\Omega) \subset \mathbb{N}$. On ne peut donc pas considérer de plus petit système complet d'événements que la famille $([N = k])_{k\in\mathbb{N}}$.
- On rappelle que ceci est licite car on autorise un système complet d'événements à contenir l'ensemble vide.

(iv) En conclure que N suit une loi binomiale et préciser les paramètres en fonction de a et b.

Démonstration.

- Tout d'abord : $N(\Omega) \subset \mathbb{N}$.
- Soit $k \in \mathbb{N}$. Deux cas se présentent :

  × si $k \in [\![0, r]\!]$, alors, d'après la question précédente :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}([N = k]) \ &= \ p_k \ = \ (-a)^k \binom{r}{k} \frac{1}{(1-a)^r} \\ &= \binom{r}{k} (-a)^k \left(\frac{1}{1-a}\right)^r \\ &= \binom{r}{k} \left(-\frac{a}{1-a}\right)^k \left(\frac{1}{1-a}\right)^{r-k} \end{aligned}$$

  De plus, on a bien : $1 - \dfrac{1}{1-a} \ = \ \dfrac{1-a-1}{1-a} \ = \ -\dfrac{a}{1-a}$.

  × si $k \geqslant r + 1$, alors, par définition de r :

$$\mathbb{P}([N = k]) \ = \ p_k \ = \ 0$$

  On reconnaît alors la loi binomiale de paramètres r et $-\dfrac{a}{1-a}$.

- On cherche enfin à exprimer r en fonction de a et b.
  D'après la question ***10.c)(ii)*** :

$$b = -a(r+1) \ \Leftrightarrow \ -\frac{b}{a} = r + 1 \ \Leftrightarrow \ -\frac{b}{a} - 1 = r$$

$$\boxed{\text{Finalement : } N \hookrightarrow \mathcal{B}\left(-\frac{b}{a} - 1, -\frac{a}{1-a}\right).}$$

Commentaire

Cette question amène une remarque sur la notation $X(\Omega)$ lorsque X est une v.a.r.

- Rappelons qu'une v.a.r. X est une application $X : \Omega \to \mathbb{R}$.
Comme la notation le suggère, $X(\Omega)$ est l'image de Ω par l'application X.
Ainsi, $X(\Omega)$ n'est rien d'autre que l'ensemble des valeurs prises par la v.a.r. X :
$$\begin{array}{rcl} X(\Omega) & = & \{X(\omega) \mid \omega \in \Omega\} \\ & = & \{x \in \mathbb{R} \mid \exists \omega \in \Omega,\ X(\omega) = x\} \end{array}$$
- Il faut bien noter que, dans la définition de $X(\Omega)$, aucune application probabilité $\mathbb{P}$ n'apparaît. Même si cela ne correspond pas directement à la définition, il est d'usage courant de confondre, dans le cas des v.a.r. discrètes, l'ensemble de valeurs possibles de la v.a.r. X (*i.e.* l'ensemble $X(\Omega)$) et l'ensemble des valeurs que X prend avec probabilité non nulle (dans le cas où X est une v.a.r. discrète, cet ensemble est appelé support de X et est noté $\mathrm{Supp}(X)$).
- Ainsi, s'il est fréquent de considérer qu'une v.a.r. X suit une loi binomiale de paramètres n et p si et seulement si :
  × $X(\Omega) = [\![0, n]\!]$,
  × $\forall k \in [\![0, n]\!]$, $\mathbb{P}([X = k]) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$

  on trouvera aussi :
  × $X(\Omega) \subset \mathbb{N}$,
  × $\forall k \in [\![0, n]\!]$, $\mathbb{P}([X = k]) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$
  × $\forall k \in [\![r+1, +\infty[\![$, $\mathbb{P}([X = k]) = 0$.

  La première définition est axée sur l'ensemble image et la seconde sur le support de X. □

d) Dans cette question, on suppose que $a > 0$.

(i) Montrer que pour tout entier naturel k, on a : $p_k = \binom{\frac{b}{a} + k}{k} a^k \, p_0$.

Démonstration.
Soit $k \in \mathbb{N}$.
Par définition des coefficients binomiaux donnée en partie II :

$$\begin{array}{rcll} \binom{\frac{b}{a} + k}{k} & = & \dfrac{1}{k!} \displaystyle\prod_{i=0}^{k-1} \left(\dfrac{b}{a} + k - i\right) & \\ & = & \dfrac{1}{k!} \displaystyle\prod_{j=1}^{k} \left(\dfrac{b}{a} + j\right) & \textit{(avec le changement d'indice } j = k - i\textit{)} \\ & = & \dfrac{1}{\displaystyle\prod_{j=1}^{k} j} \displaystyle\prod_{j=1}^{k} \left(\dfrac{b}{a} + j\right) & \\ & = & \displaystyle\prod_{j=1}^{k} \dfrac{\frac{b}{a} + j}{j} \ = \ \displaystyle\prod_{j=1}^{k} \left(\dfrac{b}{a\,j} + 1\right) & \end{array}$$

On en déduit :

$$\binom{\frac{b}{a}+k}{k} a^k \ = \ \left(\prod_{j=1}^{k} \left(\frac{b}{a\,j}+1\right)\right) \left(\prod_{j=1}^{k} a\right) \ = \ \prod_{j=1}^{k} \left(\left(\frac{b}{a\,j}+1\right) a\right) \ = \ \prod_{j=1}^{k} \left(\frac{b}{j}+a\right)$$

$$\boxed{\text{Ainsi : } \forall k \in \mathbb{N},\ p_k = p_0 \prod_{i=1}^{k} \left(a+\frac{b}{i}\right) = p_0 \binom{\frac{b}{a}+k}{k} a^k.}$$

□

(ii) En déduire que N suit une loi binomiale négative et préciser ses paramètres en fonction de a et b.

Démonstration.

- Commençons par déterminer p_0.
  La famille $([N=k])_{k\in\mathbb{N}}$ est un système complet d'événements. Donc :

$$\begin{aligned} 1 \ &= \ \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}([N=k]) \ = \ \mathbb{P}([N=0]) + \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}([N=k]) \\ &= \ p_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} p_0 \binom{\frac{b}{a}+k}{k} a^k \ = \ p_0 \left(1 + \sum_{k=1}^{+\infty} \binom{\frac{b}{a}+k}{k} a^k\right) \end{aligned}$$

  Or :

$$\begin{aligned} 1 + \sum_{k=1}^{+\infty} \binom{\frac{b}{a}+k}{k} a^k \ &= \ \binom{\frac{b}{a}+0}{0} a^0 + \sum_{k=1}^{+\infty} \binom{\frac{b}{a}+k}{k} a^k \\ &= \ \sum_{k=0}^{+\infty} \binom{\frac{b}{a}+k}{k} a^k \\ &= \ \frac{1}{(1-a)^{\frac{b}{a}+1}} && \textit{d'après } \textbf{\textit{6.c)}} \textit{ appliquée à } c = \frac{b}{a}+1 \textit{ et } x = a) \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{On en déduit : } p_0 = (1-a)^{\frac{b}{a}+1}.}$$

- Ensuite : $N(\Omega) \subset \mathbb{N}$.
- Soit $k \in \mathbb{N}$. D'après la question précédente :

$$p_k \ = \ \binom{\frac{b}{a}+k}{k} a^k (1-a)^{\frac{b}{a}+1} \ = \ \binom{(\frac{b}{a}+1)+k-1}{k} a^k (1-a)^{\frac{b}{a}+1}$$

$$\boxed{\text{On obtient que } N \text{ suit la loi binomiale négative de paramètres } \frac{b}{a}+1 \text{ et } 1-a.}$$

□

11. Montrer que, dans tous les cas, N admet une espérance et une variance, et qu'elles sont données par : $\mathbb{E}(N) = \dfrac{a+b}{1-a}$ et $\mathbb{V}(N) = \dfrac{a+b}{(1-a)^2}$.

Démonstration.
Trois cas se présentent.

- si $a=0$: $N \hookrightarrow \mathcal{P}(b)$.

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{La v.a.r. } N \text{ admet donc une espérance et une variance et :} \\ \mathbb{E}(N) = b = \dfrac{0+b}{1-0} \text{ et } \mathbb{V}(N) = b = \dfrac{0+b}{(1-0)^2}.\end{array}}$$

- si $a < 0$: $N \hookrightarrow \mathcal{B}\left(-\dfrac{b}{a} - 1, -\dfrac{a}{1-a}\right)$.

$$\boxed{\text{La v.a.r. } N \text{ admet donc une espérance et une variance.}}$$

De plus :

$$\mathbb{E}(N) \ = \ \left(-\frac{b}{a} - 1\right)\left(-\frac{a}{1-a}\right) \ = \ \frac{b+a}{\cancel{a}}\ \frac{\cancel{a}}{1-a} \ = \ \frac{b+a}{1-a}$$

Enfin :

$$\mathbb{V}(N) \ = \ \left(-\frac{b}{a} - 1\right)\left(-\frac{a}{1-a}\right)\left(1 + \frac{a}{1-a}\right) \ = \ \frac{b+a}{1-a}\ \frac{1}{1-a} \ = \ \frac{b+a}{(1-a)^2}$$

$$\boxed{\mathbb{E}(N) = \frac{a+b}{1-a} \text{ et } \mathbb{V}(N) = \frac{a+b}{(1-a)^2}}$$

- si $a > 0$: N suit une loi binomiale négative de paramètres $\dfrac{b}{a} + 1$ et $1 - a$.

$$\boxed{\text{D'après les questions } \textbf{\textit{9.b)}} \text{ et } \textbf{\textit{9.c)}}, \text{ la v.a.r. } N \text{ admet une espérance et une variance.}}$$

De plus :

$$\mathbb{E}(N) \ = \ \frac{\left(\frac{b}{a} + 1\right) a}{1-a} \ = \ \frac{b+a}{1-a}$$

Enfin :

$$\mathbb{V}(N) \ = \ \frac{\left(\frac{b}{a} + 1\right) a}{(1-a)^2} \ = \ \frac{b+a}{(1-a)^2}$$

$$\boxed{\mathbb{E}(N) = \frac{a+b}{1-a} \text{ et } \mathbb{V}(N) = \frac{a+b}{(1-a)^2}}$$

□