DS2 (version A) /188

Exercice 1 /43

Partie I : Étude d'une suite récurrente /27

On considère une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 \in \mathbb{R}$ et : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \dfrac{u_n^2}{n+1}$.
On suppose : $u_0 > 0$.
On pose : $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = \dfrac{\ln(u_n)}{2^n}$.

1. Montrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie et : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n > 0$.

- **1 pt : initialisation**
- **2 pts : hérédité**
- **0 pt à la question en cas de faute flagrante ($\mathcal{P}(n)$ mal défini => récurrence non lue OU oubli de l'introduction du n OU supposition de $\forall n$, $\mathcal{P}(n)$ au lieu de $\mathcal{P}(n)$ ...)**

2. ***a)*** Montrer que la série $\sum\limits_{k\geqslant 1} \dfrac{\ln(k)}{2^k}$ converge. Dans la suite, on note : $\sigma = -\sum\limits_{k=1}^{+\infty} \dfrac{\ln(k)}{2^k}$.

- **1 pt : $\dfrac{\ln(n)}{2^n} \geqslant 0$ et $\dfrac{1}{n^2} \geqslant 0$**
- **2 pts : $\dfrac{\ln(n)}{2^n} \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$**
- **1 pt : $\sum \dfrac{1}{n^2}$ converge**
- **1 pt : citation du critère de comparaison**

b) (i) Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, exprimer $v_k - v_{k-1}$ en fonction de k.
Puis déterminer la nature de la série $\sum\limits_{k\geqslant 1} (v_k - v_{k-1})$.

- **1 pt : $v_k - v_{k-1} = -\dfrac{\ln(k)}{2^k}$**
- **1 pt : utilisation de la question précédente et multiplication par (-1)**

(ii) En déduire que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge. Exprimer sa limite ℓ en fonction de u_0 et σ.

- **1 pt : télescopage $\sum\limits_{k=1}^{n} (v_k - v_{k-1}) = v_n - v_0$**
- **1 pt : (v_n) converge d'après la question précédente**
- **1 pt : $\ell = \sigma + v_0$**

3. On suppose dans cette question que $u_0 \neq \mathrm{e}^{-\sigma}$.

a) Déterminer le signe de ℓ
On pourra distinguer les cas $u_0 > e^{-\sigma}$ et $u_0 < e^{-\sigma}$.

- **2 pts : $u_0 > \mathrm{e}^{-\sigma} \Leftrightarrow \ell > 0$ (1 pt pour la stricte croissance de $\exp$ sur $\mathbb{R}$, 1 pt pour résultat)**
- **1 pt : $u_0 < \mathrm{e}^{-\sigma} \Leftrightarrow \ell < 0$**

b) En déduire la limite de $\big(\ln(u_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$, puis étudier le comportement en $+\infty$ de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

- 1 pt : si $u_0 > \mathrm{e}^{-\sigma}$, alors $\ln(u_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$

- 1 pt : si $u_0 > \mathrm{e}^{-\sigma}$, alors $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$

- 1 pt : si $u_0 < \mathrm{e}^{-\sigma}$, alors $\ln(u_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty$ et $u_0 < \mathrm{e}^{-\sigma}$, alors $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$

4. On suppose dans cette question : $u_0 = \mathrm{e}^{-\sigma}$.

a) Vérifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $v_n = \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} \dfrac{\ln(k)}{2^k}$.

- 1 pt : $v_0 = -\sigma = \sum\limits_{k=1}^{+\infty} \dfrac{\ln(k)}{2^k}$

- 1 pt : $v_n = -\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{\ln(k)}{2^k} + v_0$

- 1 pt : $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} \dfrac{\ln(k)}{2^k} = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{\ln(k)}{2^k} + \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} \dfrac{\ln(k)}{2^k}$

b) En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

- 1 pt : $\ln(u_n) = \dfrac{\ln(n+1)}{2} + 2^n \sum\limits_{k=n+2}^{+\infty} \dfrac{\ln(k)}{2^k}$

- 1 pt : $\ln(u_n) \geqslant \dfrac{\ln(n+1)}{2}$ car $\sum\limits_{k=n+2}^{+\infty} \dfrac{\ln(k)}{2^k} \geqslant 0$

- 1 pt : $u_n \geqslant \exp\left(\dfrac{\ln(n+1)}{2}\right)$ et $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ par théorème de comparaison

Partie II : Approximation de σ /19

5. *a)* Montrer : $\forall x \in\,]0,+\infty[$, $\ln(x) \leqslant x$.

- 3 pts (1 pt pour concavité de $\ln$ sur $]0,+\infty[$, 1 pt pour l'équation de la tangente en 1 : $y = x-1$, 1 pt pour $x - 1 \leqslant x$)

b) En déduire : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} \dfrac{\ln(k)}{2^k} \leqslant \dfrac{n+1}{2^{n-1}}$.

- 1 pt : $\sum\limits_{k=n+1}^{m} \dfrac{\ln(k)}{2^k} \leqslant \sum\limits_{k=n+1}^{m} \dfrac{k}{2^k}$

- 1 pt : $\sum\limits_{k=n+1}^{m} k \left(\dfrac{1}{2}\right)^k = \sum\limits_{k=1}^{m-n} (k+n) \left(\dfrac{1}{2}\right)^{k+n}$

- 1 pt : $\sum\limits_{k=1}^{m-n} (k+n) \left(\dfrac{1}{2}\right)^{k+n} = \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n+1} \sum\limits_{k=1}^{m-n} k \left(\dfrac{1}{2}\right)^{k-1} + n \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n} \sum\limits_{k=1}^{m-n} \left(\dfrac{1}{2}\right)^{k}$

- 2 pts : $\sum\limits_{k\geqslant 1} k \left(\dfrac{1}{2}\right)^{k-1}$ série géométrique dérivée (1 pt pour $\dfrac{1}{2} \in\,]-1,1[$, 1 pt pour $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} k \left(\dfrac{1}{2}\right)^{k-1} = 4$)

- 1 pt : $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} \left(\dfrac{1}{2}\right)^{k-1} = 1$

- 1 pt : $\sum\limits_{k=n+1}^{m} \dfrac{k}{2^k} \underset{m\to+\infty}{\longrightarrow} \dfrac{n+2}{2^n}$

6. Montrer alors : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\left| \sigma - \left(- \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{\ln(k)}{2^k} \right) \right| \leqslant \dfrac{n+1}{2^{n-1}}$.

- **2 pts :** $\left| \sigma - \left(- \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{\ln(k)}{2^k} \right) \right| = \left| - \sum\limits_{k=1}^{+\infty} \dfrac{\ln(k)}{2^k} + \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{\ln(k)}{2^k} \right| = \left| \sum\limits_{k=1}^{+\infty} \dfrac{\ln(k)}{2^k} - \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{\ln(k)}{2^k} \right|$

- **1 pt :** $\left| \sum\limits_{k=1}^{+\infty} \dfrac{\ln(k)}{2^k} - \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{\ln(k)}{2^k} \right| = \left| \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} \dfrac{\ln(k)}{2^k} \right| = \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} \dfrac{\ln(k)}{2^k} \leqslant \dfrac{n+2}{2^n}$

7. Écrire une fonction **Scilab** d'entête `function sigma = approx(epsilon)` qui, prenant en argument un réel ε strictement positif, renvoie une valeur approchée de σ à ε près.

- **5 pts (1 pt pour structure `function`, 1 pt pour initialisation, 2 pts pour boucle `while`, 1 pt pour sortie)**

```
function sigma = approx(eps)
    N = 1
    S = 0
    while (N+2) / 2 ^ N > eps
      S = S + log(N) / 2 ^ N
      N = N + 1
    end
    sigma = -S
endfunction
```

Exercice 2 /44

On note $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_4(\mathbb{R})$.

1. a) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Montrer :

$$A - \lambda \cdot I_4 \text{ non inversible} \quad \Leftrightarrow \quad \lambda \in \{-2, -1, 1, 2\}$$

- **3 pts :** $\text{rg}(A - \lambda \cdot I_4) = \text{rg}\left(\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & -\lambda \\ 0 & 1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4-\lambda^2 \end{pmatrix}\right)$
- **1 pt : réduite triangulaire donc non inversible ssi au moins l'un de ses coeff est nul**
- **1 pt :** $A - \lambda \cdot I_4$ **non inversible ssi** $\lambda \in \{-2, -1, 1, 2\}$

b) On définit les ensembles suivants :

$$\begin{array}{rcl} E_{-2}(A) & = & \{X \in \mathscr{M}_{4,1}(\mathbb{R}) \mid AX = -2X\} \\ E_{-1}(A) & = & \{X \in \mathscr{M}_{4,1}(\mathbb{R}) \mid AX = -X\} \\ E_1(A) & = & \{X \in \mathscr{M}_{4,1}(\mathbb{R}) \mid AX = X\} \\ E_2(A) & = & \{X \in \mathscr{M}_{4,1}(\mathbb{R}) \mid AX = 2X\} \end{array}$$

Montrer que ce sont des espaces vectoriels et déterminer une base de chacun d'entre eux.
En déduire leurs dimensions.

- **4 pts :** $E_{-2}(A) = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ **(1 pt pour écriture système** $\left\{\begin{array}{rcrcrcrcl} 2x & & & & & + & 2t & = & 0 \\ & & 2y & + & z & & & = & 0 \\ & & y & + & 2z & & & = & 0 \\ 2x & & & & & + & 2t & = & 0 \end{array}\right.$,
  2 pts pour résolution $\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & & & & & = & -t \\ & & y & & & = & 0 \\ & & & & z & = & 0 \end{array}\right.$ **, 1 pt pour écriture sous forme de sev engendré)**
- **1 pt :** $\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ **base de** $E_{-2}(A)$ **(caractère générateur + caractère libre)**
- **1 pt :** $\dim(E_{-2}(A)) = 1$
- **2 pts :** $E_{-1}(A) = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$**, donner une base et sa dimension**
- **2 pts :** $E_1(A) = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$**, donner une base et sa dimension**
- **2 pts :** $E_2(A) = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$**, donner une base et sa dimension**

2. Montrer que la matrice $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ est inversible et déterminer P^{-1}.

- 3 pts : $P^{-1} = \dfrac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

3. Déterminer la matrice $D = P^{-1}AP$.

- 1 pt : $AP = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ **ou** $P^{-1}A = \dfrac{1}{2} \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

- 1 pt : $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

On appelle commutant de A, et on note C_A, l'ensemble des matrices M de $\mathscr{M}_4(\mathbb{R})$ telles que

$$AM = MA$$

On appelle commutant de D, et on note C_D, l'ensemble des matrices N de $\mathscr{M}_4(\mathbb{R})$ telles que

$$DN = ND$$

4. Montrer que C_A est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_4(\mathbb{R})$.

- 1 pt : $C_A \subset \mathscr{M}_4(\mathbb{R})$

- 1 pt : $0 \in C_A$

- 2 pts : stabilité par combinaison linéaire

5. Soit $M \in \mathscr{M}_4(\mathbb{R})$. On note $N = P^{-1}MP$. Montrer :

$$M \in C_A \Longleftrightarrow N \in C_D$$

- 2 pts

6. Déterminer C_D, en utilisant les coefficients des matrices.

- 1 pt : $DN = \begin{pmatrix} -2x_1 & -2x_2 & -2x_3 & -2x_4 \\ -x_5 & -x_6 & -x_7 & -x_8 \\ x_9 & x_{10} & x_{11} & x_{12} \\ 2x_{13} & 2x_{14} & 2x_{15} & 2x_{16} \end{pmatrix}$

- 1 pt : $ND = \begin{pmatrix} -2x_1 & -x_2 & x_3 & 2x_4 \\ -2x_5 & -x_6 & x_7 & 2x_8 \\ -2x_9 & -x_{10} & x_{11} & 2x_{12} \\ -2x_{13} & -x_{14} & x_{15} & 2x_{16} \end{pmatrix}$

- 1 pt : $N \in C_D \ \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x_2 = x_3 = x_4 = 0 \\ x_5 = x_7 = x_8 = 0 \\ x_9 = x_{10} = x_{12} = 0 \\ x_{13} = x_{14} = x_{15} = 0 \end{array} \right.$

- 1 pt : $C_D = \{ \begin{pmatrix} x_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x_6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x_{11} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x_{16} \end{pmatrix} \mid (x_1, x_6, x_{11}, x_{16}) \in \mathbb{R}^4 \}$

7. En déduire :

$$C_A = \{ \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & b \\ 0 & c & d & 0 \\ 0 & d & c & 0 \\ b & 0 & 0 & a \end{pmatrix} \mid (a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4 \}$$

- 2 pts : $C_A = \{ P \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_4 \end{pmatrix} P^{-1} \mid (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4) \in \mathbb{R}^4 \}$

- 1 pt : $P \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \lambda_4 \\ 0 & \lambda_2 & \lambda_3 & 0 \\ 0 & -\lambda_2 & \lambda_3 & 0 \\ -\lambda_1 & 0 & 0 & \lambda_4 \end{pmatrix}$

- 1 pt : $P \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_4 \end{pmatrix} P^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \lambda_1 + \lambda_4 & 0 & 0 & -\lambda_1 + \lambda_4 \\ 0 & \lambda_2 + \lambda_3 & -\lambda_2 + \lambda_3 & 0 \\ 0 & -\lambda_2 + \lambda_3 & \lambda_2 + \lambda_3 & 0 \\ -\lambda_1 + \lambda_4 & 0 & 0 & \lambda_1 + \lambda_4 \end{pmatrix}$

- 1 pt : $C_A \subseteq \{ \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & b \\ 0 & c & d & 0 \\ 0 & d & c & 0 \\ b & 0 & 0 & a \end{pmatrix} \mid (a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4 \}$

- 1 pt : $A \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & b \\ 0 & c & d & 0 \\ 0 & d & c & 0 \\ b & 0 & 0 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2b & 0 & 0 & 2a \\ 0 & d & c & 0 \\ 0 & c & d & 0 \\ 2a & 0 & 0 & 2b \end{pmatrix}$

- 1 pt : $\begin{pmatrix} a & 0 & 0 & b \\ 0 & c & d & 0 \\ 0 & d & c & 0 \\ b & 0 & 0 & a \end{pmatrix} A = \begin{pmatrix} 2b & 0 & 0 & 2a \\ 0 & d & c & 0 \\ 0 & c & d & 0 \\ 2a & 0 & 0 & 2b \end{pmatrix}$

8. Déterminer une base de C_A et la dimension de C_A.

- 1 pt : $C_A = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right)$

- 1 pt : $\mathcal{F}$ engendre C_A

- 2 pts : $\mathcal{F}$ est libre

- 1 pt : $\dim(C_A) = 4$

Exercice 3 /48

On désigne par n un entier naturel supérieur ou égal à 2.
On lance n fois une pièce équilibrée (cest-à-dire donnant pile avec la probabilité $\frac{1}{2}$ et face également avec la probabilité $\frac{1}{2}$), les lancers étant supposés indépendants.
On note Z la variable aléatoire qui vaut 0 si l'on n'obtient aucun pile pendant ces n lancers et qui, dans le cas contraire, prend pour valeur le rang du premier pile.

1. a) Déterminer, en argumentant soigneusement, l'ensemble $Z(\Omega)$.

- **3 pts : $Z(\Omega) = [\![0, n]\!]$ (1 pt si la réponse est donnée sans argumentation)**

b) Pour tout k de $Z(\Omega)$, calculer $\mathbb{P}([Z = k])$. On distinguera les cas $k = 0$ et $k \geqslant 1$.

- **1 pt : introduction des P_i et F_i**
- **1 pt :** $[Z = 0] = \bigcap\limits_{i=1}^{n} F_i$
- **1 pt :** $\mathbb{P}([Z = 0]) = \left(\frac{1}{2}\right)^n$ **(indépendance des lancers à citer)**
- **1 pt :** $[Z = k] = \left(\bigcap\limits_{i=1}^{k-1} F_i\right) \cap P_k$
- **1 pt :** $\mathbb{P}([Z = k]) = \left(\frac{1}{2}\right)^k$

c) Vérifier que $\sum\limits_{k \in Z(\Omega)} \mathbb{P}([Z = k]) = 1$.

- **3 pts (1 pt pour l'utilisation de la question précédente, 1 pt pour $\sum\limits_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{2}\right)^k$ est la somme des termes d'une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$, 1 pt pour $\frac{1}{2} \neq 1$)**

d) On rappelle que l'instruction `grand(1, 1, 'bin ', 1, 0.5)` renvoie un nombre au hasard parmi les nombres 0 et 1. Compléter le programme suivant pour qu'il simule l'expérience décrite ci-dessus, l'entier n étant entré au clavier par l'utilisateur (pile sera codé par le nombre 1 et face par 0).

```
n = input(' Entrez un entier n : ')
Z = 0
k = 1
lancer = grand(1, 1, 'bin', 1, 0.5)
while (lancer == 0) & (k <= n)
  k = k + 1
  lancer = grand(1, 1, 'bin', 1, 0.5)
end
if k != (n+1) then
  Z = .......
end
disp(Z)
```

- **3 pts :** `Z = k`
- **2 pts supplémentaires si argumentation**

On dispose de $n+1$ urnes U_0, U_1, ..., U_n telles que pour tout k de $\{0, 1, \dots, n\}$ l'urne U_k contient k boules blanches et $n-k$ boules noires.
On effectue des tirages d'une boule, au hasard et avec remise dans ces urnes de la façon suivante :

× si après les lancers de la pièce décrits dans la première question, la variable Z prend la valeur k (avec $k \geqslant 1$), alors on tire une par une et avec remise, k boules dans l'urne U_k et l'on note X la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches obtenues à lissue de ces tirages,

× si la variable Z a pris la valeur 0, aucun tirage n'est effectué et X prend la valeur 0.

2. Déterminer $X(\Omega)$.

- 2 pts : $X(\Omega) = [\![0, n]\!]$

- 1 pt supplémentaire si argumentation

3. ***a)*** Déterminer, en distinguant les cas $i = 0$ et $1 \leqslant i \leqslant n$, la probabilité $\mathbb{P}_{[Z=0]}([X = i])$.

- 2 pts : $\mathbb{P}_{[Z=0]}([X = 0]) = 1$ **(1 pt pour** $[Z = 0] \subseteq [X = 0]$**, 1 pt pour formule des proba conditionnelles)**

- 2 pts : 1 pt pour $\forall i \in [\![1, n]\!],\ \mathbb{P}_{[Z=0]}([X = i]) \geqslant 0$ **et 1pt pour justification**

b) Déterminer, en distinguant les cas $i = n$ et $0 \leqslant i \leqslant n-1$, la probabilité $\mathbb{P}_{[Z=n]}([X = i])$.

- 2 pts : $\mathbb{P}_{[Z=n]}([X = n]) = 1$ **(1 pt pour résultat, 1 pt pour explication)**

- 1 pt : même raisonnement que la question précédente

c) Pour tout k de $\{1, 2, \dots, n-1\}$ déterminer, en distinguant les cas $0 \leqslant i \leqslant k$ et $k < i \leqslant n$, la probabilité conditionnelle $\mathbb{P}_{[Z=k]}([X = i])$.

- 3 pts : si $0 \leqslant i \leqslant k$ **alors** $\mathbb{P}_{[Z=k]}([X = i]) = \binom{k}{i} \left(\frac{k}{n}\right)^i \left(1 - \frac{k}{n}\right)^{k-i}$ **(1 pt pour description expérience, 1 pt pour description v.a.r.** X**, 1 pt pour résultat)**

- 1 pt : si $k < i \leqslant n$ **alors** $\mathbb{P}_{[Z=k]}([X = i]) = 0$

4. ***a)*** Montrer que $\mathbb{P}([X = 0]) = \sum\limits_{k=1}^{n-1} \left(\frac{n-k}{2n}\right)^k + \frac{1}{2^n}$

- 1 pt : $([Z = k])_{k \in [\![0, n]\!]}$ **SCE**

- 1 pt : formule des proba totales $\mathbb{P}([X = 0]) = \sum\limits_{k=0}^{n} \mathbb{P}([Z = k] \cap [X = 0])$

- 1 pt : découpage de la somme

- 1 pt : calcul $\mathbb{P}([X = 0]) = \dfrac{1}{2^n} + \sum\limits_{k=1}^{n-1} \left(\dfrac{1}{2} \times \dfrac{n-k}{n}\right)^k$

b) Montrer que $\mathbb{P}([X = n]) = \dfrac{1}{2^n}$

- **1 pt :** $([Z = k])_{k\in[\![0,n]\!]}$ **SCE et formule des proba totales** $\mathbb{P}([X = n]) = \sum\limits_{k=0}^{n} \mathbb{P}([Z = k] \cap [X = n])$
- **1 pt : découpage de la somme**
- **1 pt : calcul** $\mathbb{P}([X = n]) = \dfrac{1}{2^n}$

c) Exprimer, pour tout i de $\{1, 2, \dots, n-1\}$, $\mathbb{P}([X = i])$ sous forme dune somme que l'on ne cherchera pas à réduire.

- **1 pt :** $([Z = k])_{k\in[\![0,n]\!]}$ **SCE et formule des proba totales** $\mathbb{P}([X = i]) = \sum\limits_{k=0}^{n} \mathbb{P}([Z = k] \cap [X = i])$
- **1 pt : découpage de la somme**
- **1 pt :** $\sum\limits_{k=1}^{i-1} \mathbb{P}([Z = k])\, \mathbb{P}_{[Z=k]}([X = i]) = 0$
- **1 pt : calcul** $\mathbb{P}([X = i]) = \sum\limits_{k=i}^{n-1} \dbinom{k}{i} \left(\dfrac{k}{2n}\right)^i \left(\dfrac{n-k}{2n}\right)^{k-i}$

5. Vérifier, avec les expressions trouvées à la question précédente, que $\sum\limits_{i=0}^{n} \mathbb{P}([X = i]) = 1$.

- **1 pt :** $\sum\limits_{i=0}^{n} \mathbb{P}([X = i]) = \left(\dfrac{1}{2^n} + \sum\limits_{k=1}^{n-1} \left(\dfrac{n-k}{2n}\right)^k\right) + \sum\limits_{i=1}^{n-1} \sum\limits_{k=i}^{n-1} \dbinom{k}{i} \left(\dfrac{k}{2n}\right)^i \left(\dfrac{n-k}{2n}\right)^{k-i} + \dfrac{1}{2^n}$
- **1 pt :** $\sum\limits_{i=1}^{n-1} \sum\limits_{k=i}^{n-1} = \sum\limits_{k=1}^{n-1} \sum\limits_{i=1}^{k}$
- **1 pt :** $\sum\limits_{k=1}^{n-1} \sum\limits_{i=1}^{k} \dbinom{k}{i} \left(\dfrac{k}{2n}\right)^i \left(\dfrac{n-k}{2n}\right)^{k-i} = \sum\limits_{k=1}^{n-1} \left(\sum\limits_{i=0}^{k} \dbinom{k}{i} \left(\dfrac{k}{2n}\right)^i \left(\dfrac{n-k}{2n}\right)^{k-i} - \dbinom{k}{0} \left(\dfrac{k}{2n}\right)^0 \left(\dfrac{n-k}{2n}\right)^{k-0} \right)$
- **1 pt :** $= \sum\limits_{k=1}^{n-1} \left(\left(\dfrac{k}{2n} + \dfrac{n-k}{2n}\right)^k - \left(\dfrac{n-k}{2n}\right)^k \right)$ **(par binôme de Newton)**
- **1 pt :** $= \sum\limits_{k=1}^{n-1} \left(\dfrac{1}{2}\right)^k - \sum\limits_{k=1}^{n-1} \left(\dfrac{n-k}{2n}\right)^k$
- **1 pt :** $\sum\limits_{k=1}^{n-1} \left(\dfrac{1}{2}\right)^k = 1 - \dfrac{1}{2^{n-1}}$
- **1 pt : fin du calcul pour** $\sum\limits_{i=0}^{n} \mathbb{P}([X = i]) = 1$

Problème / 53

Un joueur participe à un jeu se jouant en plusieurs parties.
Ses observations lui permettent d'affirmer que :

- s'il gagne deux parties consécutives, alors il gagne la prochaine avec la probabilité $\frac{2}{3}$.
- s'il perd une partie et gagne la suivante, alors il gagne la prochaine avec la probabilité $\frac{1}{2}$.
- s'il gagne une partie et perd la suivante, alors il gagne la prochaine avec la probabilité $\frac{1}{2}$.
- s'il perd deux parties consécutives, alors il gagne la prochaine avec la probabilité $\frac{1}{3}$.

Pour tout entier naturel n non nul, on note A_n l'événement : « le joueur gagne la $n^{\text{ème}}$ partie ».
De plus, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, on pose :

$$E_n = A_{n-1} \cap A_n \qquad F_n = \overline{A_{n-1}} \cap A_n \qquad G_n = A_{n-1} \cap \overline{A_n} \qquad H_n = \overline{A_{n-1}} \cap \overline{A_n}$$

1. a) Utiliser la formule des probabilités totales pour montrer que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, on a :

$$\mathbb{P}(E_{n+1}) \ = \ \frac{2}{3}\,\mathbb{P}(E_n) + \frac{1}{2}\,\mathbb{P}(F_n)$$

- 3 pts : (E_n, F_n, G_n, H_n) **SCE (1 pt pour l'affirmer, 2 pts explication)**

- 1 pt : formule des proba totales $\mathbb{P}(E_{n+1}) = \mathbb{P}(E_n \cap E_{n+1}) + \mathbb{P}(F_n \cap E_{n+1}) + \mathbb{P}(G_n \cap E_{n+1}) + \mathbb{P}(H_n \cap E_{n+1})$

- 1 pt : $E_n \cap E_{n+1} = E_n \cap A_{n+1}$ **et** $F_n \cap E_{n+1} = F_n \cap A_{n+1}$

- 1 pt : $G_n \cap E_{n+1} = \varnothing$ **et** $H_n \cap E_{n+1} = \varnothing$

- 1 pt : fin calcul $\mathbb{P}(E_{n+1}) \ = \ \frac{2}{3}\,\mathbb{P}(E_n) + \frac{1}{2}\,\mathbb{P}(F_n)$

b) Exprimer de la même façon (aucune explication n'est exigée) les probabilités $\mathbb{P}(F_{n+1})$, $\mathbb{P}(G_{n+1})$ et $\mathbb{P}(H_{n+1})$ en fonction de $\mathbb{P}(E_n)$, $\mathbb{P}(F_n)$, $\mathbb{P}(G_n)$ et $\mathbb{P}(H_n)$.

- 1 pt : $\mathbb{P}(F_{n+1}) = \frac{1}{2}\ \mathbb{P}(G_n) + \frac{1}{3}\ \mathbb{P}(H_n)$

- 1 pt : $\mathbb{P}(G_{n+1}) = \frac{1}{3}\ \mathbb{P}(E_n) + \frac{1}{2}\ \mathbb{P}(F_n)$

- 1 pt : $\mathbb{P}(H_{n+1}) = \frac{1}{2}\ \mathbb{P}(G_n) + \frac{2}{3}\ \mathbb{P}(H_n)$

c) Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, on pose : $U_n = \begin{pmatrix} \mathbb{P}(E_n) \\ \mathbb{P}(F_n) \\ \mathbb{P}(G_n) \\ \mathbb{P}(H_n) \end{pmatrix}$.

Vérifier que $U_{n+1} = M\,U_n$, où $M = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$.

- 1 pt

2. a) Soient $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 3 \\ -2 & -1 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & -3 & 3 \end{pmatrix}$ et $Q = \begin{pmatrix} -1 & -3 & 3 & 1 \\ 2 & -3 & -3 & 2 \\ 2 & 1 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Calculer PQ. En déduire que P est inversible et donner son inverse.

- 1 pt : $PQ = 10\,I_4$

- 1 pt : $P^{-1} = \dfrac{1}{10}\,Q$

b) Déterminer la matrice $D = P^{-1}MP$.

- 1 pt : $QM = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 1 & -1 & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ **ou** $MP = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{1}{6} & \frac{3}{2} & 3 \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{6} & -\frac{1}{2} & 2 \\ -\frac{2}{3} & -\frac{1}{6} & \frac{1}{2} & 2 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & -\frac{3}{2} & 3 \end{pmatrix}$

- 1 pt : $QMP = \begin{pmatrix} -\frac{10}{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{10}{6} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 10 \end{pmatrix}$

- 1 pt : $D = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{6} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Dans toute la suite, on suppose que le joueur a gagné les deux premières parties.

3. a) Montrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $M^n = PD^nP^{-1}$.

- 1 pt : initialisation

- 2 pts : hérédité

b) Montrer, également par récurrence, que : $\forall n \geqslant 2$, $U_n = M^{n-2}\,U_2$.

- 1 pt : initialisation

- 2 pts : hérédité

c) Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, donner la première colonne de M^n, puis en déduire $\mathbb{P}(E_n)$, $\mathbb{P}(F_n)$, $\mathbb{P}(G_n)$ et $\mathbb{P}(H_n)$.

- 1 pt : première colonne de $M^n = M^n \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

- 1 pt : $D^n = \begin{pmatrix} \left(-\frac{1}{3}\right)^n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \left(\frac{1}{6}\right)^n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \left(\frac{1}{2}\right)^n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

- 1 pt : $\begin{pmatrix} \left(-\frac{1}{3}\right)^n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \left(\frac{1}{6}\right)^n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \left(\frac{1}{2}\right)^n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\left(-\frac{1}{3}\right)^n \\ 2\ \left(\frac{1}{6}\right)^n \\ 2\ \left(\frac{1}{2}\right)^n \\ 1 \end{pmatrix}$

- 1 pt : $P \begin{pmatrix} -\left(-\frac{1}{3}\right)^n \\ 2\ \left(\frac{1}{6}\right)^n \\ 2\ \left(\frac{1}{2}\right)^n \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\left(-\frac{1}{3}\right)^n + 2\ \left(\frac{1}{6}\right)^n + 6\ \left(\frac{1}{2}\right)^n + 3 \\ 2\ \left(-\frac{1}{3}\right)^n - 2\ \left(\frac{1}{6}\right)^n - 2\ \left(\frac{1}{2}\right)^n + 2 \\ -2\ \left(-\frac{1}{3}\right)^n - 2\ \left(\frac{1}{6}\right)^n + 2\ \left(\frac{1}{2}\right)^n + 2 \\ \left(-\frac{1}{3}\right)^n + 2\ \left(\frac{1}{6}\right)^n - 6\ \left(\frac{1}{2}\right)^n + 3 \end{pmatrix}$

- 1 pt : $\begin{pmatrix} \mathbb{P}(E_n) \\ \mathbb{P}(F_n) \\ \mathbb{P}(G_n) \\ \mathbb{P}(H_n) \end{pmatrix} = M^{n-2} \begin{pmatrix} \mathbb{P}(E_2) \\ \mathbb{P}(F_2) \\ \mathbb{P}(G_2) \\ \mathbb{P}(H_2) \end{pmatrix} = M^{n-2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

- 1 pt : $\left\{ \begin{array}{rcl} \mathbb{P}(E_n) & = & \frac{1}{10}\ \left(-\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-2} + 2\ \left(\frac{1}{6}\right)^{n-2} + 6\ \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2} + 3\right) \\ \mathbb{P}(F_n) & = & \frac{1}{10}\ \left(2\ \left(-\frac{1}{3}\right)^{n-2} - 2\ \left(\frac{1}{6}\right)^{n-2} - 2\ \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2} + 2\right) \\ \mathbb{P}(G_n) & = & \frac{1}{10}\ \left(-2\ \left(-\frac{1}{3}\right)^{n-2} - 2\ \left(\frac{1}{6}\right)^{n-2} + 2\ \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2} + 2\right) \\ \mathbb{P}(H_n) & = & \frac{1}{10}\ \left(\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-2} + 2\ \left(\frac{1}{6}\right)^{n-2} - 6\ \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2} + 3\right) \end{array} \right.$

d) Montrer que l'on a :

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(E_n) = \frac{3}{10} \qquad \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(F_n) = \frac{2}{10} \qquad \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(G_n) = \frac{2}{10} \qquad \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(H_n) = \frac{3}{10}$$

- 2 pts : $-\frac{1}{3} \in \,]-1,1[$**,** $\frac{1}{6} \in \,]-1,1[$**,** $\frac{1}{2} \in \,]-1,1[$

4. Pour tout entier naturel k non nul, on note X_k la variable aléatoire qui vaut 1 si le joueur gagne la $k^{\text{ème}}$ partie et qui vaut 0 sinon (X_1 et X_2 sont donc deux variables certaines).

a) Pour tout entier naturel k supérieur ou égal à 2, exprimer A_k en fonction de E_k et F_k.

- 2 pts : $E_k \cup F_k = A_k$

b) En déduire, pour tout entier naturel k supérieur ou égal à 2, la loi de X_k.

- 1 pt : $X_k(\Omega) = \{0, 1\}$

- 1 pt : $\mathbb{P}\big([X_k = 1]\big) = \mathbb{P}\big(A_k\big) = \mathbb{P}\big(E_k \cup F_k\big) = \mathbb{P}\big(E_k\big) + \mathbb{P}\big(F_k\big)$ **dont l'incompatibilité**

- 1 pt : calcul

5. Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, on note S_n la variable aléatoire égale au nombre de parties gagnées par le joueur lors des n premières parties.

a) Calculer $\mathbb{P}([S_n = 2])$ en distinguant les cas $n = 2$, $n = 3$ et $n \geqslant 4$.

- 1 pt : $\mathbb{P}\big([S_2 = 2]\big) = \mathbb{P}(\Omega) = 1$

- 1 pt : $[S_3 = 2] \ = \ \overline{A_3}$

- 1 pt : calcul $\mathbb{P}(\overline{A_3}) = 1 - \mathbb{P}(A_3) = 1 - \dfrac{1}{10}\left(-\dfrac{1}{3} + 4 \times \dfrac{1}{2} + 5\right) = \frac{1}{3}$

- 1 pt : $[S_n = 2] \ = \ \overline{A_3} \cap \overline{A_4} \cap \overline{A_5} \cap \ldots \cap \overline{A_n}$

- 1 pt : formule des probas composées

- 1 pt : $\mathbb{P}_{\overline{A_3}}\big(\overline{A_4}\big) = 1 - \mathbb{P}_{\overline{A_3}}\big(A_4\big) = 1 - \mathbb{P}_{A_2 \cap \overline{A_3}}\big(A_4\big) = 1 - \dfrac{1}{2} \ = \ \dfrac{1}{2}$

- 1 pt : $\mathbb{P}_{\overline{A_3} \cap \ldots \cap \overline{A_k}}\big(\overline{A_{k+1}}\big) \ = \ \mathbb{P}_{\overline{A_{k-1}} \cap \overline{A_k}}\big(\overline{A_{k+1}}\big)$ **et calcul**

b) Déterminer $\mathbb{P}([S_n = n])$.

- 1 pt : $[S_n = n] \ = \ A_3 \cap \ldots \cap A_n$

- 1 pt : FPC $\mathbb{P}\big([S_n = n]\big) = \mathbb{P}\big(A_3\big) \times \mathbb{P}_{A_3}\big(A_4\big) \times \prod\limits_{k=4}^{n-1} \mathbb{P}_{A_3 \cap \ldots \cap A_{k-1}}\big(A_k\big)$

- 1 pt : $\mathbb{P}\big(A_3\big) = \dfrac{2}{3}$ **et** $\mathbb{P}_{A_3}\big(A_4\big) = \dfrac{2}{3}$

- 1 pt : $\mathbb{P}_{A_3 \cap \ldots \cap A_{k-1}}\big(A_k\big) \ = \ \mathbb{P}_{A_{k-2} \cap A_{k-1}}\big(A_k\big)$ **et calcul**

c) Pour tout entier n supérieur ou égal à 3, écrire S_n en fonction des variables X_k, puis déterminer $\mathbb{E}(S_n)$ en fonction de n.

- 1 pt : $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} X_k$

- 1 pt : la v.a.r. admet une espérance

- 1 pt : linéarité de l'espérance

- 1 pt : $X_1 = 1 = X_2$

- 1 pt : sommes géométriques (formule connue)

- 2 pts : calcul et résultat $\mathbb{E}(S_n) = \dfrac{11}{8} + \dfrac{1}{40}\left(-\dfrac{1}{3}\right)^{n-2} - \dfrac{2}{5}\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-2}$