

DS2 (version A)

Exercice 1 (Inspiré Oral ESCP 2018)

Partie I : Étude d'une suite récurrente

On considère une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_0 \in \mathbb{R}$ et : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{u_n^2}{n+1}$.

On suppose : $u_0 > 0$.

On pose : $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = \frac{\ln(u_n)}{2^n}$.

1. Montrer que la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bien définie et : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n > 0$.

Démonstration.

- Démontrons par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}, \mathcal{P}(n)$ où $\mathcal{P}(n) : u_n > 0$.

► **Initialisation :**

D'après l'énoncé : $u_0 > 0$.

D'où $\mathcal{P}(0)$.

► **Hérédité :** soit $n \in \mathbb{N}$.

Supposons $\mathcal{P}(n)$ et démontrons $\mathcal{P}(n+1)$ (i.e. $u_{n+1} > 0$).

Par hypothèse de récurrence, $u_n > 0$.

- Comme $u_n > 0$, alors $u_n^2 > 0$ (car la fonction $x \mapsto x^2$ est strictement croissante sur $]0, +\infty[$).

- Comme de plus $n+1 > 0$ alors $u_{n+1} = \frac{u_n^2}{n+1} > 0$.

D'où $\mathcal{P}(n+1)$.

Par principe de récurrence, on en conclut : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n > 0$.

- Soit $n \in \mathbb{N}$.

- Comme $u_n > 0$, alors la quantité $\ln(u_n)$ est bien définie.

- De plus, $2^n \neq 0$.

On en déduit que la quantité $v_n = \frac{\ln(u_n)}{2^n}$ est bien définie.

Ainsi, la suite (v_n) est bien définie.

Commentaire

Démontrer qu'une suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bien définie, c'est démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, la quantité v_n est bien définie.

□

2. a) Montrer que la série $\sum_{k \geq 1} \frac{\ln(k)}{2^k}$ converge. Dans la suite, on note : $\sigma = -\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\ln(k)}{2^k}$.

Démonstration.

On a :

$$\times \forall n \geq 1, \frac{\ln(n)}{2^n} \geq 1 \text{ et } \frac{1}{n^2} \geq 0.$$

$$\times \frac{\ln(n)}{2^n} = o_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{n^2} \right). \text{ En effet :}$$

$$\frac{\frac{\ln(n)}{2^n}}{\frac{1}{n^2}} = \frac{\ln(n)}{2^n} n^2 = \frac{\ln(n)}{(\sqrt{2})^n} \frac{n^2}{(\sqrt{2})^n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

car $\frac{\ln(n)}{(\sqrt{2})^n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ et $\frac{n^2}{(\sqrt{2})^n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ par croissances comparées.

\times La série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$ est une série de Riemann d'exposant 2 ($2 > 1$).

Cette série est donc convergente.

Par critère de négligeabilité des séries à termes positifs, la série $\sum_{n \geq 1} \frac{\ln(n)}{2^n}$ converge. □

Commentaire

- Le théorème des croissances comparées stipule que pour tout $b > 0$ et $q > 1$:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(\ln(n))^b}{q^n} = 0$$

On dit alors que la croissance logarithmique est plus faible que la croissance exponentielle. Dans cette question, il s'agit de démontrer :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^2 \ln(n)}{2^n} = 0$$

Le numérateur n'est ni polynomial, ni logarithmique. En toute rigueur, il faut donc un argument supplémentaire avant de pouvoir utiliser le théorème des croissances comparées.

- Il faut avoir en tête : $n^2 \ln(n) = o_{n \rightarrow +\infty} (n^3)$. La croissance au numérateur est donc « au mieux polynomiale ». Il est donc logique que la croissance exponentielle au dénominateur l'emporte.
- Rappelons au passage la condition **NÉCESSAIRE** de convergence des séries :

$$\sum w_n \text{ converge} \Rightarrow w_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

Cette condition n'est pas suffisante : $w_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ ~~\Rightarrow~~ $\sum w_n$ converge.

(on peut illustrer ce point par la suite (w_n) définie par : $\forall n \geq 1, w_n = \frac{1}{n}$)

S'il est nécessaire que le terme général de la série tende vers 0, il faut de plus s'assurer que cette convergence se fait suffisamment rapidement. C'est ce que l'on fait dans le cas des séries à termes positifs : on s'assure que le terme général w_n tend vers 0 au moins aussi vite que le terme général d'une série convergente (on utilise les théorèmes de comparaisons).

C'est l'argument ici : $\frac{\ln(n)}{2^n}$ tend plus rapidement vers 0 que $\frac{1}{n^2}$ qui est un exemple classique de terme général de série convergente.

- b) (i) Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, exprimer $v_k - v_{k-1}$ en fonction de k .
 Puis déterminer la nature de la série $\sum_{k \geq 1} (v_k - v_{k-1})$.

Démonstration.

- Soit $k \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned}
 v_k - v_{k-1} &= \frac{\ln(u_k)}{2^k} - \frac{\ln(u_{k-1})}{2^{k-1}} \\
 &= \frac{\ln\left(\frac{u_{k-1}^2}{(k-1)+1}\right)}{2^k} - \frac{\ln(u_{k-1})}{2^{k-1}} && \text{(par définition de la suite } (u_n)\text{)} \\
 &= \frac{\ln(u_{k-1}^2) - \ln(k)}{2^k} - \frac{2 \ln(u_{k-1})}{2^k} \\
 &= \frac{\cancel{2 \ln(u_{k-1})} - \ln(k) - \cancel{2 \ln(u_{k-1})}}{2^k} && \text{(car } u_{k-1} > 0\text{)} \\
 &= -\frac{\ln(k)}{2^k}
 \end{aligned}$$

$$\forall k \geq 1, v_k - v_{k-1} = -\frac{\ln(k)}{2^k}$$

- On a vu dans la question précédente que la série $\sum_{k \geq 1} \frac{\ln(k)}{2^k}$ est convergente.

On ne change pas la nature d'une série en multipliant son terme général par -1 ($\neq 0$).

On en déduit que la série $\sum_{k \geq 1} (v_k - v_{k-1})$ est convergente.

□

- (ii) En déduire que la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge. Exprimer sa limite ℓ en fonction de u_0 et σ .

Démonstration.

Soit $n \geq 1$. Par télescopage, on a :

$$\sum_{k=1}^n (v_k - v_{k-1}) = v_n - v_0$$

On en déduit :

$$\begin{aligned}
 v_n &= \sum_{k=1}^n (v_k - v_{k-1}) + v_0 \\
 &= -\sum_{k=1}^n \frac{\ln(k)}{2^k} + v_0 && \text{(d'après la question précédente)}
 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{ccc}
 \begin{array}{c} \sim \\ \downarrow \\ \infty \end{array} & & \begin{array}{c} \sim \\ \downarrow \\ \infty \end{array}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc}
 -\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\ln(k)}{2^k} & v_0 & \text{(car on a montré en question 2.a que} \\
 & & \text{la série } \sum_{k \geq 1} \frac{\ln(k)}{2^k} \text{ est convergente)}
 \end{array}$$

La suite (v_n) est convergente, de limite $\ell = -\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\ln(k)}{2^k} + v_0 = \sigma + v_0$.

□

3. On suppose dans cette question que $u_0 \neq e^{-\sigma}$.

a) Déterminer le signe de ℓ .

On pourra distinguer les cas $u_0 > e^{-\sigma}$ et $u_0 < e^{-\sigma}$.

Démonstration.

D'après la question précédente :

$$\ell = \sigma + v_0 = \sigma + \ln(u_0)$$

• On en déduit :

$$\ell > 0 \Leftrightarrow \sigma + \ln(u_0) > 0$$

$$\Leftrightarrow \ln(u_0) > -\sigma$$

$$\Leftrightarrow u_0 > e^{-\sigma} \quad (\text{par stricte croissance de la fonction exp sur } \mathbb{R})$$

Ainsi, si : $u_0 > e^{-\sigma}$ alors : $\ell > 0$.

• De même :

$$\ell < 0 \Leftrightarrow u_0 < e^{-\sigma}$$

Ainsi, si : $u_0 < e^{-\sigma}$ alors : $\ell < 0$. □

b) En déduire la limite de $(\ln(u_n))_{n \in \mathbb{N}}$, puis étudier le comportement en $+\infty$ de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Démonstration.

Soit $n \in \mathbb{N}$. Par définition :

$$\ln(u_n) = 2^n v_n$$

Deux cas se présentent :

× si $u_0 > e^{-\sigma}$: alors la suite (v_n) est convergente de limite $\ell > 0$.

De plus : $2^n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$.

On en déduit, par produit de limites, que la suite $(\ln(u_n))_{n \in \mathbb{N}}$ diverge vers $+\infty$.

Enfin : $u_n = \exp(\ln(u_n)) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$.

La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ diverge vers $+\infty$.

× si $u_0 < e^{-\sigma}$: alors la suite (v_n) est convergente de limite $\ell < 0$.

De plus : $2^n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$.

On en déduit, par produit de limites, que la suite $(\ln(u_n))_{n \in \mathbb{N}}$ diverge vers $-\infty$.

Enfin : $u_n = \exp(\ln(u_n)) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 0. □

4. On suppose dans cette question : $u_0 = e^{-\sigma}$.

a) Vérifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $v_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{\ln(k)}{2^k}$.

Démonstration.

• Comme on a supposé $u_0 = e^{-\sigma}$, on a :

$$v_0 = \ln(u_0) = -\sigma = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\ln(k)}{2^k}$$

- Or pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a, d'après la question 2.b)(ii) :

$$\begin{aligned} v_n &= -\sum_{k=1}^n \frac{\ln(k)}{2^k} + v_0 \\ &= -\sum_{k=1}^n \frac{\ln(k)}{2^k} + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\ln(k)}{2^k} = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{\ln(k)}{2^k} \end{aligned}$$

En effet, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\ln(k)}{2^k} = \sum_{k=1}^n \frac{\ln(k)}{2^k} + \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{\ln(k)}{2^k}$$

On a bien : $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{\ln(k)}{2^k}$.

□

- b) En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

Démonstration.

Soit $n \in \mathbb{N}$.

- Tout d'abord :

$$\begin{aligned} \ln(u_n) &= 2^n v_n \\ &= 2^n \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{\ln(k)}{2^k} \\ &= 2^n \left(\frac{\ln(n+1)}{2^{n+1}} + \sum_{k=n+2}^{+\infty} \frac{\ln(k)}{2^k} \right) \\ &= \frac{\ln(n+1)}{2} + 2^n \sum_{k=n+2}^{+\infty} \frac{\ln(k)}{2^k} \\ &\geq \frac{\ln(n+1)}{2} \end{aligned}$$

(car $\sum_{k=n+2}^{+\infty} \frac{\ln(k)}{2^k} \geq 0$ en tant que somme de réels positifs)

- On en déduit, par croissance de la fonction exp sur \mathbb{R} :

$$u_n \geq \exp\left(\frac{\ln(n+1)}{2}\right)$$

Or : $\frac{\ln(n+1)}{2} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$ donc, par composition : $\exp\left(\frac{\ln(n+1)}{2}\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$.

On en déduit que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ diverge vers $+\infty$.

□

Partie II : Approximation de σ

5. a) Montrer : $\forall x \in]0, +\infty[, \ln(x) \leq x$.

Démonstration.

La fonction \ln est concave sur $]0, +\infty[$. Sa courbe représentative est donc située sous ses tangentes, notamment celle au point d'abscisse 1, droite d'équation :

$$y = x - 1$$

On en déduit : $\forall x \in]0, +\infty[, \ln(x) \leq x - 1$.

Et comme pour tout $x > 0$, $x - 1 \leq x$, on obtient, par transitivité : $\forall x \in]0, +\infty[, \ln(x) \leq x$.

Commentaire

- Le membre droit de l'inégalité souhaitée est un polynôme de degré 1. Sa représentation graphique est une droite. C'est ce constat qui doit faire penser à une inégalité de convexité.
- Si on ne pense pas à utiliser une propriété de convexité, on peut aussi résoudre cette question en étudiant le signe de la fonction $x \mapsto \ln(x) - x$. □

b) En déduire : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{\ln(k)}{2^k} \leq \frac{n+2}{2^n}$.

Démonstration.

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $m \in \mathbb{N}^*$ tel que $m > n$.

- D'après la question précédente :

$$\sum_{k=n+1}^m \frac{\ln(k)}{2^k} \leq \sum_{k=n+1}^m \frac{k}{2^k} \quad (*)$$

- Considérons la partie de droite :

$$\begin{aligned} \sum_{k=n+1}^m k \left(\frac{1}{2}\right)^k &= \sum_{k=1}^{m-n} (k+n) \left(\frac{1}{2}\right)^{k+n} && \text{(par décalage d'indice)} \\ &= \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \sum_{k=1}^{m-n} k \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} + n \left(\frac{1}{2}\right)^n \sum_{k=1}^{m-n} \left(\frac{1}{2}\right)^k && \text{(par linéarité)} \end{aligned}$$

Or :

× la série $\sum_{k \geq 1} k \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}$ est une série géométrique dérivée première de raison $\frac{1}{2} \in]-1, 1[$.

C'est donc une série convergente. De plus, on a :

$$\sum_{k=1}^{m-n} k \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} \xrightarrow{m \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^{+\infty} k \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} = \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{2}\right)^2} = \frac{1}{\frac{1}{4}} = 4$$

× la série $\sum_{k \geq 1} \left(\frac{1}{2}\right)^k$ est une série géométrique de raison $\frac{1}{2} \in]-1, 1[$.

C'est donc une série convergente. De plus, on a :

$$\sum_{k=1}^{m-n} \left(\frac{1}{2}\right)^k = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{m-n+1}}{1 - \frac{1}{2}} \xrightarrow{m \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = 1$$

Ainsi :
$$\sum_{k=n+1}^m k \left(\frac{1}{2}\right)^k \xrightarrow{m \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} 4 + n \left(\frac{1}{2}\right)^n = \left(\frac{1}{2}\right)^n 2 + n \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{n+2}{2^n}$$

- On en déduit que le membre droit de l'inégalité (*) admet une limite finie.
Par passage à la limite lorsque m tend vers $+\infty$, on obtient :

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{\ln(k)}{2^k} \leq \frac{n+2}{2^n}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{\ln(k)}{2^k} \leq \frac{n+2}{2^n}$$

Commentaire

- Dans l'énoncé initial, il était demandé de démontrer :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{\ln(k)}{2^k} \leq \frac{n+1}{2^{n-1}}$$

C'était en fait une coquille.

- Malgré tout, il est possible de démontrer le résultat du point précédent.

Il suffit pour cela de remarquer : $\frac{n+2}{2^n} \leq \frac{n+1}{2^{n-1}}$.

- Cette dernière démonstration semblant un peu artificielle, on fait le choix ici de corriger la coquille dans cette question et la suivante. □

6. Montrer alors : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \left| \sigma - \left(-\sum_{k=1}^n \frac{\ln(k)}{2^k} \right) \right| \leq \frac{n+2}{2^n}$.

Démonstration.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned} \left| \sigma - \left(-\sum_{k=1}^n \frac{\ln(k)}{2^k} \right) \right| &= \left| \sigma + \sum_{k=1}^n \frac{\ln(k)}{2^k} \right| \\ &= \left| -\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\ln(k)}{2^k} + \sum_{k=1}^n \frac{\ln(k)}{2^k} \right| && \text{(par définition de } \sigma \text{)} \\ &= \left| -\left(\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\ln(k)}{2^k} - \sum_{k=1}^n \frac{\ln(k)}{2^k} \right) \right| \\ &= \left| \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\ln(k)}{2^k} - \sum_{k=1}^n \frac{\ln(k)}{2^k} \right| && \text{(car pour tout } u \in \mathbb{R}, | -u | = |u| \text{)} \\ &= \left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{\ln(k)}{2^k} \right| = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{\ln(k)}{2^k} \leq \frac{n+2}{2^n} \end{aligned}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \left| \sigma - \left(-\sum_{k=1}^n \frac{\ln(k)}{2^k} \right) \right| \leq \frac{n+2}{2^n}$$

□

7. Écrire une fonction **Scilab** d'entête `function sigma = approx(epsilon)` qui, prenant en argument un réel ε strictement positif, renvoie une valeur approchée de σ à ε près.

Démonstration.

- On cherche ici à trouver un entier N tel que $-\sum_{k=1}^N \frac{\ln(k)}{2^k}$ est une valeur approchée de σ à ε près. Autrement dit, on souhaite exhiber $N \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\left| \sigma - \left(-\sum_{k=1}^N \frac{\ln(k)}{2^k} \right) \right| \leq \varepsilon$$

- Or, d'après la question 6., pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\left| \sigma - \left(-\sum_{k=1}^n \frac{\ln(k)}{2^k} \right) \right| \leq \frac{n+2}{2^n}$$

- Il suffit alors de trouver $N \in \mathbb{N}$ tel que : $\frac{N+2}{2^N} \leq \varepsilon$.
En effet, par transitivité, on aura alors :

$$\left| \sigma - \left(-\sum_{k=1}^N \frac{\ln(k)}{2^k} \right) \right| \leq \frac{N+2}{2^N} \leq \varepsilon$$

- On en déduit le programme suivant qui permet :
 - × de déterminer la première valeur de N qui convient (à l'aide d'une boucle `while`),
 - × de calculer $\sum_{k=1}^N \frac{\ln(k)}{2^k}$ par mise à jour successive, dans la boucle `while` d'une variable `S`.

```
1  function sigma = approx(eps)
2      N = 1
3      S = 0
4      while (N+2) / 2 ^ N > eps
5          S = S + log(N) / 2 ^ N
6          N = N + 1
7      end
8      sigma = -S
9  endfunction
```

□

Exercice 2 (EML 2013)

On note $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$.

1. a) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Montrer :

$$A - \lambda I_4 \text{ non inversible} \Leftrightarrow \lambda \in \{-2, -1, 1, 2\}$$

Démonstration.

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} \text{rg}(A - \lambda I_4) &= \text{rg} \left(\begin{pmatrix} -\lambda & 0 & 0 & 2 \\ 0 & -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda & 0 \\ 2 & 0 & 0 & -\lambda \end{pmatrix} \right) \\ &\stackrel{L_1 \leftrightarrow L_4}{=} \text{rg} \left(\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & -\lambda \\ 0 & -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda & 0 \\ -\lambda & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \right) \\ &\stackrel{L_4 \leftarrow 2L_4 + \lambda L_1}{=} \text{rg} \left(\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & -\lambda \\ 0 & -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 - \lambda^2 \end{pmatrix} \right) \\ &\stackrel{L_2 \leftrightarrow L_3}{=} \text{rg} \left(\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & -\lambda \\ 0 & 1 & -\lambda & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 - \lambda^2 \end{pmatrix} \right) \\ &\stackrel{L_3 \leftarrow L_3 + \lambda L_2}{=} \text{rg} \left(\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & -\lambda \\ 0 & 1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1 - \lambda^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 - \lambda^2 \end{pmatrix} \right) \end{aligned}$$

La réduite obtenue est triangulaire supérieure.

Elle est donc non inversible si et seulement si l'un de ses coefficients diagonaux est nul.

On en déduit :

$$\begin{aligned} A - \lambda I_4 \text{ non inversible} &\Leftrightarrow 1 - \lambda^2 = 0 \text{ OU } 4 - \lambda^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow (1 - \lambda)(1 + \lambda) = 0 \text{ OU } (2 - \lambda)(2 + \lambda) = 0 \\ &\Leftrightarrow \lambda = 1 \text{ OU } \lambda = -1 \text{ OU } \lambda = 2 \text{ OU } \lambda = -2 \\ &\Leftrightarrow \lambda \in \{-2, -1, 1, 2\} \end{aligned}$$

$A - \lambda I_4 \text{ non inversible} \Leftrightarrow \lambda \in \{-2, -1, 1, 2\}$

□

b) On définit les ensembles suivants :

$$E_{-2}(A) = \{X \in \mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R}) \mid AX = -2X\}$$

$$E_{-1}(A) = \{X \in \mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R}) \mid AX = -X\}$$

$$E_1(A) = \{X \in \mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R}) \mid AX = X\}$$

$$E_2(A) = \{X \in \mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R}) \mid AX = 2X\}$$

Montrer que ce sont des espaces vectoriels et déterminer une base de chacun d'entre eux.
 En déduire leurs dimensions.

Démonstration.

- Déterminons $E_{-2}(A)$. Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R})$.

$$\begin{aligned}
 X \in E_{-2}(A) &\iff AX = -2X \\
 &\iff (A + 2I_4)X = 0_{\mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R})} \\
 &\iff \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
 &\iff \begin{cases} 2x & & & + 2t & = & 0 \\ & 2y & + & z & & = & 0 \\ & & y & + & 2z & & = & 0 \\ 2x & & & & + & 2t & = & 0 \end{cases} \\
 &\stackrel{L_1 \leftarrow \frac{1}{2}L_1}{\iff} \begin{cases} x & & & + & t & = & 0 \\ & 2y & + & z & & = & 0 \\ & y & + & 2z & & = & 0 \end{cases} \\
 &\stackrel{L_3 \leftarrow 2L_3 - L_2}{\iff} \begin{cases} x & & & + & t & = & 0 \\ & 2y & + & z & & = & 0 \\ & & & 3z & & = & 0 \end{cases} \\
 &\iff \begin{cases} x & & & = & -t \\ & 2y & + & z & = & 0 \\ & & & 3z & = & 0 \end{cases} \\
 &\stackrel{L_2 \leftarrow 3L_2 - L_3}{\iff} \begin{cases} x & & & = & -t \\ & 6y & & = & 0 \\ & & & 3z & = & 0 \end{cases} \\
 &\stackrel{\substack{L_2 \leftarrow \frac{1}{6}L_2 \\ L_3 \leftarrow \frac{1}{3}L_3}}{\iff} \begin{cases} x & & & = & -t \\ & y & & = & 0 \\ & & & z & = & 0 \end{cases}
 \end{aligned}$$

On en déduit :

$$\begin{aligned}
 E_{-2}(A) &= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R}) \mid AX = -2X \right\} \\
 &= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \mid x = -t \text{ et } y = 0 \text{ et } z = 0 \right\} \\
 &= \left\{ \begin{pmatrix} -t \\ 0 \\ 0 \\ t \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{R} \right\} = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)
 \end{aligned}$$

Ainsi, $E_{-2}(A)$ est un espace vectoriel.

Enfin, la famille $\mathcal{F}_1 = \left(\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$:

× engendre $E_{-2}(A)$,

× est une famille libre de $\mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R})$, car elle est constituée uniquement d'un vecteur non nul.

La famille \mathcal{F}_1 est donc une base de $E_{-2}(A)$ et $\dim(E_{-2}(A)) = \text{Card}(\mathcal{F}_1) = 1$.

• Déterminons $E_{-1}(A)$. Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R})$.

$$\begin{aligned}
 X \in E_{-1}(A) &\iff AX = -X \\
 &\iff (A + I_4)X = 0_{\mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R})} \\
 &\iff \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
 &\iff \begin{cases} x & & & + 2t & = & 0 \\ & y & + & z & & = & 0 \\ & y & + & z & & = & 0 \\ 2x & & & + & t & = & 0 \end{cases} \\
 &\iff \begin{cases} x & & & + 2t & = & 0 \\ & y & + & z & & = & 0 \\ 2x & & & + & t & = & 0 \end{cases} \\
 &\stackrel{L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1}{\iff} \begin{cases} x & & & + 2t & = & 0 \\ & y & + & z & & = & 0 \\ & & & - 3t & = & 0 \end{cases} \\
 &\iff \begin{cases} x & & 2t & = & 0 \\ & y & & = & -z \\ & & -3t & = & 0 \end{cases} \stackrel{L_1 \leftarrow 3L_1 + 2L_3}{\iff} \begin{cases} 3x & & & = & 0 \\ & y & & = & -z \\ & & -3t & = & 0 \end{cases}
 \end{aligned}$$

On en déduit :

$$\begin{aligned}
 E_{-1}(A) &= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R}) \mid AX = -X \right\} \\
 &= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \mid x = 0 \text{ et } y = -z \text{ et } t = 0 \right\} \\
 &= \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ -z \\ z \\ 0 \end{pmatrix} \mid z \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ z \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \mid z \in \mathbb{R} \right\} = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)
 \end{aligned}$$

Ainsi, $E_{-1}(A)$ est un espace vectoriel.

Enfin la famille $\mathcal{F}_2 = \left(\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$:

× engendre $E_{-1}(A)$,

× est une famille libre de $\mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R})$, car elle est constituée uniquement d'un vecteur non nul.

La famille \mathcal{F}_2 est donc une base de $E_{-1}(A)$ et $\dim(E_{-1}(A)) = \text{Card}(\mathcal{F}_2) = 1$.

• Déterminons $E_1(A)$. Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R})$.

$$X \in E_1(A) \iff AX = X$$

$$\iff (A - I_4)X = 0_{\mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R})}$$

$$\iff \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{cases} -x & & & + 2t & = & 0 \\ & -y & + z & & = & 0 \\ & & y & - z & & = & 0 \\ 2x & & & & - t & = & 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} -x & & & + 2t & = & 0 \\ & y & - z & & = & 0 \\ 2x & & & & - t & = & 0 \end{cases}$$

$$\stackrel{L_3 \leftarrow L_3 + 2L_1}{\iff} \begin{cases} -x & & & + 2t & = & 0 \\ & y & - z & & = & 0 \\ & & & & 3t & = & 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} -x & & + 2t & = & 0 \\ & y & & = & z \\ & & 3t & = & 0 \end{cases} \stackrel{L_1 \leftarrow 3L_1 - 2L_3}{\iff} \begin{cases} -3x & & & = & 0 \\ & y & & = & z \\ & & 3t & = & 0 \end{cases}$$

On en déduit :

$$E_1(A) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R}) \mid AX = X \right\}$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \mid x = 0 \text{ et } y = z \text{ et } t = 0 \right\}$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ z \\ z \\ 0 \end{pmatrix} \mid z \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ z \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \mid z \in \mathbb{R} \right\} = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$$

Ainsi, $E_1(A)$ est un espace vectoriel.

Enfin, la famille $\mathcal{F}_3 = \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) :$

× engendre $E_1(A)$,

× est une famille libre de $\mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R})$, car elle est constituée uniquement d'un vecteur non nul.

La famille \mathcal{F}_3 est donc une base de $E_1(A)$ et $\dim(E_1(A)) = \text{Card}(\mathcal{F}_3) = 1$.

• Déterminons $E_2(A)$. Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R})$.

$$\begin{aligned}
 X \in E_2(A) &\iff AX = 2X \\
 &\iff (A - 2I_4)X = 0_{\mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R})} \\
 &\iff \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
 &\iff \begin{cases} -2x & & & + 2t & = & 0 \\ & - 2y & + & z & & = & 0 \\ & & y & - & 2z & & = & 0 \\ 2x & & & & - & 2t & = & 0 \end{cases} \\
 &\stackrel{L_1 \leftarrow -\frac{1}{2}L_1}{\iff} \begin{cases} x & & & - t & = & 0 \\ & - 2y & + & z & & = & 0 \\ & & y & - & 2z & & = & 0 \end{cases} \\
 &\stackrel{L_3 \leftarrow 2L_3 + L_2}{\iff} \begin{cases} x & & & - t & = & 0 \\ & 2y & + & z & & = & 0 \\ & & - & 3z & & = & 0 \end{cases} \\
 &\iff \begin{cases} x & & & = & t \\ & 2y & + & z & = & 0 \\ & & - & 3z & = & 0 \end{cases} \stackrel{L_2 \leftarrow 3L_2 + L_3}{\iff} \begin{cases} x & & & = & t \\ & 6y & & & = & 0 \\ & & - & 3z & = & 0 \end{cases}
 \end{aligned}$$

On en déduit :

$$\begin{aligned}
 E_2(A) &= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R}) \mid AX = 2X \right\} \\
 &= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \mid x = t \text{ et } y = 0 \text{ et } z = 0 \right\} \\
 &= \left\{ \begin{pmatrix} t \\ 0 \\ 0 \\ t \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{R} \right\} = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)
 \end{aligned}$$

Ainsi, $E_2(A)$ est un espace vectoriel.

Enfin, la famille $\mathcal{F}_4 = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) :$

× engendre $E_2(A)$,

× est une famille libre de $\mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R})$, car elle est constituée uniquement d'un vecteur non nul.

La famille \mathcal{F}_4 est donc une base de $E_2(A)$ et $\dim(E_2(A)) = \text{Card}(\mathcal{F}_4) = 1$.

Commentaire

- Il faut s'habituer à déterminer les ensembles $E_\lambda(A)$ par lecture de la matrice $A - \lambda I$.
- Illustrons la méthode avec la matrice de l'exercice et $\lambda = -2$.

On cherche les vecteurs $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$ de $E_{-2}(A)$ c'est-à-dire les vecteurs tels que :

$(A + 2I_4)X = 0_{\mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R})}$. Or :

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} &= x \cdot C_1 + y \cdot C_2 + z \cdot C_3 + t \cdot C_4 \\ &= x \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + y \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Pour obtenir le vecteur $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ l'aide de cette combinaison linéaire, on doit forcément

choisir $y = 0$. En effet, si y est non nul, le coefficient en 2^{ème} position est non nul et doit être compensé par le choix $z = -2y$ mais dans ce cas, le coefficient créé en 3^{ème} position est non nul. On doit alors choisir $z = 0$ sinon les coefficients en 2^{ème} et 3^{ème} positions sont non nuls. La combinaison linéaire restante ne contient plus que les vecteurs C_1 et C_4 qui sont égaux. Cette combinaison linéaire est nulle si : $x = -t$. En prenant par exemple $t = 1$, on obtient :

$$E_{-2}(A) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

- On peut procéder de même pour $E_{-1}(A)$, $E_1(A)$ et $E_2(A)$.

□

2. Montrer que la matrice $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ est inversible et déterminer P^{-1} .

Démonstration.

On applique l'algorithme du pivot de Gauss.

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

On effectue l'opération $\{ L_4 \leftarrow L_4 + L_1$. On obtient alors :

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

On effectue l'opération $\{ L_3 \leftarrow L_3 + L_2$. On obtient alors :

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

La réduite obtenue est triangulaire supérieure et ses coefficients diagonaux sont tous non nuls. Donc P est inversible.

On effectue l'opération $\{ L_1 \leftarrow 2L_1 - L_4$. On obtient alors :

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

On effectue l'opération $\{ L_2 \leftarrow 2L_2 - L_3$. On obtient alors :

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

On effectue les opérations $\left\{ \begin{array}{l} L_1 \leftarrow \frac{1}{2} L_1 \\ L_2 \leftarrow \frac{1}{2} L_2 \\ L_3 \leftarrow \frac{1}{2} L_3 \\ L_4 \leftarrow \frac{1}{2} L_4 \end{array} \right.$ On obtient :

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{array} \right)$$

On en conclut que P est inversible et $P^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

□

3. Montrer : $A = PDP^{-1}$, où D est une matrice à définir.

Démonstration.

Il s'agit ici de calculer $D = P^{-1}AP$.

• Tout d'abord :

$$AP = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

• Ensuite :

$$P^{-1}AP = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

On en déduit : $A = PDP^{-1}$ avec $D = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

□

On appelle commutant de A , et on note C_A , l'ensemble des matrices M de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ telles que :

$$AM = MA$$

On appelle commutant de D , et on note C_D , l'ensemble des matrices N de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ telles que :

$$DN = ND$$

4. Montrer que C_A est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$.

Démonstration.

Démontrons que C_A est un sev de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$.

(i) $C_A \subseteq \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ par définition.

(ii) $C_A \neq \emptyset$. En effet, la matrice nulle $0_{\mathcal{M}_4(\mathbb{R})}$ est élément de C_A puisque :

$$A \times 0_{\mathcal{M}_4(\mathbb{R})} = 0_{\mathcal{M}_4(\mathbb{R})} = 0_{\mathcal{M}_4(\mathbb{R})} \times A$$

(iii) Démontrons enfin que C_A est stable par combinaisons linéaires.

Soit $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ et soit $(M, N) \in C_A^2$.

- Comme $M \in C_A$, M est une matrice de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ qui vérifie : $AM = MA$.
- Comme $N \in C_A$, N est une matrice de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ qui vérifie : $AN = NA$.

Démontrons alors que $\lambda \cdot M + \mu \cdot N$ est un élément de C_A .

$$\begin{aligned} A(\lambda \cdot M + \mu \cdot N) &= \lambda \cdot AM + \mu \cdot AN \\ &= \lambda \cdot MA + \mu \cdot NA && \text{(car } M \in C_A \\ &&& \text{et } N \in C_A) \\ &= (\lambda \cdot M + \mu \cdot N) A \end{aligned}$$

Et ainsi $\lambda \cdot M + \mu \cdot N \in C_A$.

C_A est bien un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$.

□

5. Soit $M \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$. On note $N = P^{-1}MP$. Montrer :

$$M \in C_A \Leftrightarrow N \in C_D$$

Démonstration.

$$\begin{aligned} M \in C_A &\Leftrightarrow AM = MA \\ &\Leftrightarrow APNP^{-1} = PNP^{-1}A && \text{(comme } N = P^{-1}MP \text{ alors } M = PNP^{-1}\text{)} \\ &\Leftrightarrow P^{-1}APNP^{-1} = P^{-1}PNP^{-1}A && \text{(en multipliant à gauche par } P^{-1}\text{)} \\ &\Leftrightarrow P^{-1}APNP^{-1} = NP^{-1}A \\ &\Leftrightarrow P^{-1}APNP^{-1}P = NP^{-1}AP && \text{(en multipliant à droite par } P\text{)} \\ &\Leftrightarrow P^{-1}APN = NP^{-1}AP \\ &\Leftrightarrow DN = ND \\ &\Leftrightarrow N \in C_D \end{aligned}$$

On a bien : $M \in C_A \Leftrightarrow N \in C_D$.

□

6. Déterminer C_D , en utilisant les coefficients des matrices.

Démonstration.

$$\text{Soit } N = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ x_5 & x_6 & x_7 & x_8 \\ x_9 & x_{10} & x_{11} & x_{12} \\ x_{13} & x_{14} & x_{15} & x_{16} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R}).$$

Avec cette notation :

$$\begin{aligned} N \in C_D &\Leftrightarrow DN = ND \\ &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ x_5 & x_6 & x_7 & x_8 \\ x_9 & x_{10} & x_{11} & x_{12} \\ x_{13} & x_{14} & x_{15} & x_{16} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ x_5 & x_6 & x_7 & x_8 \\ x_9 & x_{10} & x_{11} & x_{12} \\ x_{13} & x_{14} & x_{15} & x_{16} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} -2x_1 & -2x_2 & -2x_3 & -2x_4 \\ -x_5 & -x_6 & -x_7 & -x_8 \\ x_9 & x_{10} & x_{11} & x_{12} \\ 2x_{13} & 2x_{14} & 2x_{15} & 2x_{16} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2x_1 & -x_2 & x_3 & 2x_4 \\ -2x_5 & -x_6 & x_7 & 2x_8 \\ -2x_9 & -x_{10} & x_{11} & 2x_{12} \\ -2x_{13} & -x_{14} & x_{15} & 2x_{16} \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} -2x_1 = -2x_1 \\ -2x_2 = -x_2 \\ -2x_3 = x_3 \\ -2x_4 = 2x_4 \\ -x_5 = -2x_5 \\ -x_6 = -x_6 \\ -x_7 = x_7 \\ -x_8 = 2x_8 \end{cases} \text{ ET } \begin{cases} x_9 = -2x_9 \\ x_{10} = -x_{10} \\ x_{11} = x_{11} \\ x_{12} = 2x_{12} \\ 2x_{13} = -2x_{13} \\ 2x_{14} = -x_{14} \\ 2x_{15} = x_{15} \\ 2x_{16} = 2x_{16} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = x_3 = x_4 = 0 \\ x_5 = x_7 = x_8 = 0 \\ x_9 = x_{10} = x_{12} = 0 \\ x_{13} = x_{14} = x_{15} = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

On en déduit :

$$C_D = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 & x_6 & x_3 & x_4 \\ x_5 & x_6 & x_7 & x_8 \\ x_9 & x_{10} & x_{11} & x_{12} \\ x_{13} & x_{14} & x_{15} & x_{16} \end{pmatrix} \mid \begin{cases} x_2 = x_3 = x_4 = 0 \\ x_5 = x_7 = x_8 = 0 \\ x_9 = x_{10} = x_{12} = 0 \\ x_{13} = x_{14} = x_{15} = 0 \end{cases} \right\}$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} x_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x_6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x_{11} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x_{16} \end{pmatrix} \mid (x_1, x_6, x_{11}, x_{16}) \in \mathbb{R}^4 \right\}$$

Le commutant de D est constitué de l'ensemble des matrices diagonales.

Commentaire

- L'énoncé suggère d'utiliser les « coefficients des matrices ». L'idée est donc de considérer une matrice $N \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ quelconque et de comprendre comment l'appartenance de N à C_D contraint les coefficients de N .

- En regardant de plus près le calcul, on s'aperçoit que :

- × multiplier à gauche par une matrice diagonale permet d'agir sur les lignes (la ligne i est multipliée par $D_{i,i}$),
- × multiplier à droite par une matrice diagonale permet d'agir sur les colonnes (la colonne j est multipliée par $D_{j,j}$).

Les coefficients diagonaux de D étant différents, les seuls coefficients qui se retrouvent multipliés par le même nombre sont les coefficients diagonaux.

- Formalisons l'idée décrite dans le point précédent.

On considère une matrice $N \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$. Pour tout $(i, j) \in \llbracket 1, 4 \rrbracket^2$:

$$(DN)_{i,j} = \sum_{k=1}^4 D_{i,k} N_{k,j} = D_{i,i} N_{i,j} \quad (\text{car } D_{i,k} = 0 \text{ si } k \neq i)$$

$$(ND)_{i,j} = \sum_{k=1}^4 N_{i,k} D_{k,j} = N_{i,j} D_{j,j} \quad (\text{car } D_{k,j} = 0 \text{ si } k \neq j)$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} (DN)_{i,j} = (ND)_{i,j} &\Leftrightarrow D_{i,i} N_{i,j} = N_{i,j} D_{j,j} \\ &\Leftrightarrow (D_{i,i} - D_{j,j}) N_{i,j} = 0 \\ &\Leftrightarrow D_{i,i} = D_{j,j} \text{ OU } N_{i,j} = 0 \\ &\Leftrightarrow i = j \text{ OU } N_{i,j} = 0 \end{aligned} \quad \begin{array}{l} (\text{car les coefficients} \\ \text{diagonaux de la matrice } D \\ \text{sont tous différents}) \end{array}$$

Ainsi les matrices N qui commutent avec D vérifient toutes :

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1, 4 \rrbracket^2, i \neq j \Rightarrow N_{i,j} = 0$$

- Cette démonstration est bien plus élégante que la précédente. Elle permet de démontrer que si D est une matrice carrée (d'ordre n quelconque) diagonale dont les coefficients diagonaux sont tous différents alors D ne commute qu'avec les matrices diagonales. □

7. En déduire :

$$C_A = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & b \\ 0 & c & d & 0 \\ 0 & d & c & 0 \\ b & 0 & 0 & a \end{pmatrix} \mid (a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4 \right\}$$

Démonstration.

Soit $M \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$.

• Tout d'abord :

$$M \in C_A$$

$$\Leftrightarrow N = P^{-1}MP \in C_D \quad \text{(d'après la question 5.)}$$

$$\Leftrightarrow \exists (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4) \in \mathbb{R}^4, N = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_4 \end{pmatrix} \quad \text{(d'après la question 6.)}$$

$$\Leftrightarrow \exists (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4) \in \mathbb{R}^4, P^{-1}MP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_4 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \exists (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4) \in \mathbb{R}^4, M = P \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_4 \end{pmatrix} P^{-1}$$

$$\text{Ainsi : } C_A = \left\{ P \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_4 \end{pmatrix} P^{-1} \mid (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4) \in \mathbb{R}^4 \right\}.$$

• On s'intéresse alors à la forme des matrices de cet ensemble.

Soit $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4) \in \mathbb{R}^4$.

$$\begin{aligned} P \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_4 \end{pmatrix} P^{-1} &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \lambda_4 \\ 0 & \lambda_2 & \lambda_3 & 0 \\ 0 & -\lambda_2 & \lambda_3 & 0 \\ -\lambda_1 & 0 & 0 & \lambda_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \lambda_1 + \lambda_4 & 0 & 0 & -\lambda_1 + \lambda_4 \\ 0 & \lambda_2 + \lambda_3 & -\lambda_2 + \lambda_3 & 0 \\ 0 & -\lambda_2 + \lambda_3 & \lambda_2 + \lambda_3 & 0 \\ -\lambda_1 + \lambda_4 & 0 & 0 & \lambda_1 + \lambda_4 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

En notant $a = \frac{1}{2}(\lambda_1 + \lambda_4)$, $b = \frac{1}{2}(-\lambda_1 + \lambda_4)$, $c = \frac{1}{2}(\lambda_2 + \lambda_3)$ et $d = \frac{1}{2}(-\lambda_2 + \lambda_3)$, on obtient une matrice de la forme annoncée.

$$\text{Cela démontre : } C_A \subseteq \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & b \\ 0 & c & d & 0 \\ 0 & d & c & 0 \\ b & 0 & 0 & a \end{pmatrix} \mid (a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4 \right\}.$$

- Il reste alors à démontrer l'inclusion réciproque.

Soit $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$.

× Tout d'abord :

$$A \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & b \\ 0 & c & d & 0 \\ 0 & d & c & 0 \\ b & 0 & 0 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & b \\ 0 & c & d & 0 \\ 0 & d & c & 0 \\ b & 0 & 0 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2b & 0 & 0 & 2a \\ 0 & d & c & 0 \\ 0 & c & d & 0 \\ 2a & 0 & 0 & 2b \end{pmatrix}$$

× Ensuite :

$$\begin{pmatrix} a & 0 & 0 & b \\ 0 & c & d & 0 \\ 0 & d & c & 0 \\ b & 0 & 0 & a \end{pmatrix} A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & b \\ 0 & c & d & 0 \\ 0 & d & c & 0 \\ b & 0 & 0 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2b & 0 & 0 & 2a \\ 0 & d & c & 0 \\ 0 & c & d & 0 \\ 2a & 0 & 0 & 2b \end{pmatrix}$$

On en déduit : $\begin{pmatrix} a & 0 & 0 & b \\ 0 & c & d & 0 \\ 0 & d & c & 0 \\ b & 0 & 0 & a \end{pmatrix} \in C_A$.

Et ainsi : $C_A \supseteq \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & b \\ 0 & c & d & 0 \\ 0 & d & c & 0 \\ b & 0 & 0 & a \end{pmatrix} \mid (a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4 \right\}$.

Commentaire

- La première partie de la question illustre un procédé fréquent en mathématiques. On cherche à obtenir l'ensemble C_A , le commutant de A . Pour cela, on pourrait procéder comme en question 6., à savoir partir d'une matrice M quelconque et de voir comment l'appartenance de M à C_A (i.e. le fait que la propriété $AM = MA$ soit vérifié) contraint les coefficients de M . S'il est possible de procéder ainsi, cette manière de faire peut se révéler longue et fastidieuse pour certaines matrices A . Il est par contre simple de déterminer C_D lorsque D est une matrice diagonale. On cherche donc initialement une matrice diagonale D permettant, en quelque sorte, de représenter la matrice A . Plus précisément, on trouve une matrice D telle que $A = PDP^{-1}$. Puis on détermine C_D . Enfin, on détermine C_A à l'aide de C_D en écrivant :

$$C_A = \left\{ P \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_4 \end{pmatrix} P^{-1} \mid (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4) \in \mathbb{R}^4 \right\}$$

- La deuxième partie de la résolution n'a que peu d'intérêt. Il aurait été préférable que l'énoncé demande de démontrer que C_A s'écrit :

$$C_A = \left\{ \frac{1}{2} \begin{pmatrix} a+d & 0 & 0 & -a+d \\ 0 & b+c & -b+c & 0 \\ 0 & -b+c & b+c & 0 \\ -a+d & 0 & 0 & a+d \end{pmatrix} \mid (a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4 \right\}$$

L'énoncé choisit une autre forme matricielle. Cela correspond à écrire l'espace vectoriel C_A à l'aide d'une autre base. On reviendra sur ce point à la question suivante. □

8. Déterminer une base de C_A et la dimension de C_A .

Démonstration.

- D'après la question précédente :

$$C_A = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & b \\ 0 & c & d & 0 \\ 0 & d & c & 0 \\ b & 0 & 0 & a \end{pmatrix} \mid (a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4 \right\}$$

$$= \left\{ a \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + b \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + c \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + d \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \mid (a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4 \right\}$$

$$= \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right)$$

- La famille $\mathcal{F} = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right) :$

× engendre C_A ,

× est une famille libre de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$. Démontrons ce point.

Soit $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4) \in \mathbb{R}^4$.

$$\text{Supposons : } \lambda_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \lambda_3 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \lambda_4 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0_{\mathcal{M}_4(\mathbb{R})}.$$

Autrement dit :

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \lambda_2 \\ 0 & \lambda_3 & \lambda_4 & 0 \\ 0 & \lambda_4 & \lambda_3 & 0 \\ \lambda_2 & 0 & 0 & \lambda_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Par identification, cette égalité est équivalente à : $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 0$.

La famille \mathcal{F} est donc une base de C_A et $\dim(C_A) = \text{Card}(\mathcal{F}) = 4$.

Commentaire

- Si l'on s'en tient à la première écriture de C_A de la question précédente, on obtient :

$$C_A = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right)$$

Nommons \mathcal{G} la famille génératrice de C_A correspondant à cette égalité.

Il est simple de démontrer : $\text{Vect}(\mathcal{G}) = \text{Vect}(\mathcal{F})$ par des opérations sur les éléments de la famille \mathcal{G} qui laissent inchangées l'espace vectoriel engendré. Par exemple, en ajoutant la deuxième matrice de \mathcal{G} à la première, on obtient la première matrice de \mathcal{F} .

- Les familles \mathcal{F} et \mathcal{G} sont deux bases différentes de C_A . L'énoncé a privilégié la famille \mathcal{F} . Mais la famille \mathcal{G} est celle qui apparaît naturellement dans la question 7. □

Exercice 3 (EDHEC 2004)

On désigne par n un entier naturel supérieur ou égal à 2.

On lance n fois une pièce équilibrée (c'est-à-dire donnant pile avec la probabilité $\frac{1}{2}$ et face également avec la probabilité $\frac{1}{2}$), les lancers étant supposés indépendants.

On note Z la variable aléatoire qui vaut 0 si l'on n'obtient aucun pile pendant ces n lancers et qui, dans le cas contraire, prend pour valeur le rang du premier pile.

1. a) Déterminer, en argumentant soigneusement, l'ensemble $Z(\Omega)$.

Démonstration.

L'expérience consiste en n lancers.

Donc l'ensemble Ω est ici l'ensemble des n -lancers constitués des éléments de $\{\text{Pile}, \text{Face}\}$.

- L'événement $[Z = 0]$ est réalisé par le n -lancer $\omega = (\text{Face}, \text{Face}, \dots, \text{Face})$ (*i.e.* $Z(\omega) = 0$).
- Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, l'événement $[Z = k]$ est réalisé si et seulement si le premier Pile est obtenu au $k^{\text{ème}}$ lancer. En particulier :
 - × l'événement $[Z = 1]$ est réalisé par le n -lancer $\omega = (\text{Pile}, \text{Face}, \dots, \text{Face})$.
 (*i.e.* $Z(\omega) = 1$)
 - × l'événement $[Z = 2]$ est réalisé par le n -lancer $\omega = (\text{Face}, \text{Pile}, \text{Face}, \dots, \text{Face})$.
 (*i.e.* $Z(\omega) = 2$)
 - × ...
 - × l'événement $[Z = k]$ est réalisé par le n -lancer $\omega = (\underbrace{\text{Face}, \text{Face}, \dots, \text{Face}}_{(k-1) \text{ lancers}}, \text{Pile}, \text{Face}, \dots, \text{Face})$.
 - × ...
 - × l'événement $[Z = n]$ est réalisé par le n -lancer $\omega = (\text{Face}, \text{Face}, \dots, \text{Face}, \text{Pile})$.
 (*i.e.* $Z(\omega) = n$)

On en déduit : $Z(\Omega) = \llbracket 0, n \rrbracket$.

□

b) Pour tout k de $Z(\Omega)$, calculer $\mathbb{P}([Z = k])$. On distinguera les cas $k = 0$ et $k \geq 1$.

Démonstration.

Pour tout $i \in \mathbb{N}^*$, on considère les événements suivants :

P_i : « obtenir Pile au $i^{\text{ème}}$ lancer »

F_i : « obtenir Face au $i^{\text{ème}}$ lancer »

Soit $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$. Deux cas se présentent.

• Si $k = 0$, alors :

$$[Z = 0] = \bigcap_{i=1}^n F_i$$

On en déduit :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}([Z = 0]) &= \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^n F_i\right) \\ &= \mathbb{P}(F_1 \cap \dots \cap F_n) \\ &= \mathbb{P}(F_1) \times \dots \times \mathbb{P}(F_n) && \text{(car les lancers sont} \\ &&& \text{indépendants)} \\ &= \frac{1}{2} \times \dots \times \frac{1}{2} = \left(\frac{1}{2}\right)^n \end{aligned}$$

Ainsi : $\mathbb{P}([Z = 0]) = \left(\frac{1}{2}\right)^n$.

- Si $k \geq 1$, alors :

$$[Z = k] = F_1 \cap F_2 \cap \dots \cap F_{k-1} \cap P_k = \left(\bigcap_{i=1}^{k-1} F_i \right) \cap P_k$$

On en déduit :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}([Z = k]) &= \mathbb{P}(F_1 \cap \dots \cap F_{k-1} \cap P_k) \\ &= \mathbb{P}(F_1) \times \dots \times \mathbb{P}(F_{k-1}) \times \mathbb{P}(P_k) && \text{(car les lancers sont indépendants)} \\ &= \frac{1}{2} \times \dots \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \left(\frac{1}{2}\right)^k \end{aligned}$$

Si $k \geq 1$: $\mathbb{P}([Z = k]) = \left(\frac{1}{2}\right)^k$.

Commentaire

On pouvait déterminer $\mathbb{P}([Z = 0])$ en utilisant le fait que $([Z = k])_{k \in [0, n]}$ est un système complet d'événements. On a alors :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}([Z = 0]) &= 1 - \sum_{k=1}^n \mathbb{P}([Z = k]) = 1 - \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{2}\right)^k = 1 - \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{2}} \\ &= 1 - \frac{1}{2} \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{\frac{1}{2}} = \cancel{1} - \left(\cancel{1} - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^n \end{aligned}$$

Ce n'était cependant pas ce qui était attendu par l'énoncé, au regard de la question suivante. \square

- c) Vérifier que $\sum_{k \in Z(\Omega)} \mathbb{P}([Z = k]) = 1$.

Démonstration.

On calcule :

$$\begin{aligned} \sum_{k \in Z(\Omega)} \mathbb{P}([Z = k]) &= \sum_{k=0}^n \mathbb{P}([Z = k]) \\ &= \mathbb{P}([Z = 0]) + \sum_{k=1}^n \mathbb{P}([Z = k]) \\ &= \left(\frac{1}{2}\right)^n + \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{2}\right)^k && \text{(d'après la question précédente)} \\ &= \left(\frac{1}{2}\right)^n + \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{2}} && \text{(car } \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{2}\right)^k \text{ est la somme des termes d'une suite géométrique de raison } \frac{1}{2} \neq 1) \\ &= \left(\frac{1}{2}\right)^n + \frac{1}{2} \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{\frac{1}{2}} \\ &= \cancel{\left(\frac{1}{2}\right)^n} + \left(1 - \cancel{\left(\frac{1}{2}\right)^n}\right) = 1 \end{aligned}$$

$\sum_{k \in Z(\Omega)} \mathbb{P}([Z = k]) = 1$

\square

- d) On rappelle que l'instruction `grand(1, 1, 'bin', 1, 0.5)` renvoie un nombre au hasard parmi les nombres 0 et 1. Compléter le programme suivant pour qu'il simule l'expérience décrite ci-dessus, l'entier n étant entré au clavier par l'utilisateur (pile sera codé par le nombre 1 et face par 0).

```
1  n = input(' Entrez un entier n : ')
2  Z = 0
3  k = 1
4  lancer = grand(1, 1, 'bin', 1, 0.5)
5  while (lancer == 0) & (k <= n)
6      k = k + 1
7      lancer = grand(1, 1, 'bin', 1, 0.5)
8  end
9  if k <> (n+1) then
10     Z = .....
11 end
12 disp(Z)
```

Démonstration.

- On rappelle que la v.a.r. Z est égale au rang du premier Pile sur n lancers et 0 sinon.
- C'est la variable Z qui doit contenir ce rang obtenu par simulation. On procède comme suit :

× **Début du programme** : initialisation des variables.

La variable Z est initialisée à 0 (le premier Pile n'est pas encore apparu).

On crée par ailleurs la variable k qui va contenir le numéro du lancer en cours.

La variable k est initialisée à 1 (on démarre au 1^{er} lancer).

```
2  Z = 0
3  k = 1
```

× **Structure conditionnelle.**

Les lignes 4 à 8 suivantes consistent à déterminer le rang du premier Pile (s'il existe), au cours des n lancers. On doit donc effectuer cette succession de lancers jusqu'à ce qu'on obtienne le premier Pile **ou** qu'on ait effectué n lancers. Autrement dit, on doit effectuer cette succession de lancers tant qu'on n'a pas obtenu Pile (on rappelle que Pile est codé par 1 et Face par 0) **et** que le nombre de lancers est inférieur ou égal à n .

Pour ce faire, on commence par effectuer un premier lancer d'une pièce équilibrée. La simulation d'un tel lancer est fournie par l'instruction donnée dans l'énoncé.

```
4  lancer = grand(1, 1, 'bin', 1, 0.5)
```

On met ensuite en place une structure itérative (boucle `while`) :

```
5  while (lancer == 0) & (k <= n)
```

À chaque fois que le lancer obtenu n'est pas Pile, on effectue un nouveau lancer.

```
7  lancer = grand(1, 1, 'bin', 1, 0.5)
```

On doit alors mettre à jour en conséquence la variable k : on ajoute 1 pour signaler qu'un nouveau lancer a eu lieu.

```
6  k = k + 1
```


× **Fin du programme.**

À l'issue de cette boucle **while**, deux cas se présentent. La variable **k** contient :

- 1) soit le rang du premier Pile, s'il est apparu au cours des n lancers,
- 2) soit l'entier $(n + 1)$, si on n'a obtenu que des Face au cours des n lancers.

On définit alors la variable **Z** en fonction de ces deux cas :

- 1) si $k \neq n + 1$, **Z** doit prendre la valeur **k**,
- 2) si $k = n + 1$, **Z** doit prendre la valeur 0, qui est déjà sa valeur initiale (aucune mise à jour n'est alors requise).

Cette étape est codée la structure conditionnelle suivante :

```
9  if k <> (n+1) then
10     Z = k
11  end
```

Commentaire

Afin de permettre une bonne compréhension des mécanismes en jeu, on a détaillé la réponse à cette question. Cependant, compléter correctement le programme **Scilab** démontre la bonne compréhension de la simulation demandée et permet certainement d'obtenir la majorité des points alloués à cette question.

On procédera de même dans les autres questions **Scilab**. □

On dispose de $n + 1$ urnes U_0, U_1, \dots, U_n telles que pour tout k de $\{0, 1, \dots, n\}$ l'urne U_k contient k boules blanches et $n - k$ boules noires.

On effectue des tirages d'une boule, au hasard et avec remise dans ces urnes de la façon suivante :

- × si après les lancers de la pièce décrits dans la première question, la variable Z prend la valeur k (avec $k \geq 1$), alors on tire une par une et avec remise, k boules dans l'urne U_k et l'on note X la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches obtenues à l'issue de ces tirages,
- × si la variable Z a pris la valeur 0, aucun tirage n'est effectué et X prend la valeur 0.

2. Déterminer $X(\Omega)$.

Démonstration.

Montrons : $X(\Omega) = \llbracket 0, n \rrbracket$. Pour cela, on procède par double inclusion.

(\subseteq) Il y a entre 0 et n boules blanches dans les $(n + 1)$ urnes. Donc : $X(\Omega) \subset \llbracket 0, n \rrbracket$.

(\supseteq) Montrons maintenant que la v.a.r. X peut prendre chaque valeur entière entre 0 et n .

- × Si on obtient le n -lancer de pièce (Face, ..., Face), alors l'événement $[Z = 0]$ est réalisé, donc l'événement $[X = 0]$ est réalisé (d'après l'énoncé).
- × Si on obtient le n -lancer de pièce (Pile, Face, ..., Face), c'est-à-dire si on a obtenu Pile au 1^{er} lancer, alors on effectue un 1-tirage dans l'urne U_1 .
Si ce 1-tirage est (Boule blanche), alors l'événement $[X = 1]$ est réalisé.
- × Si on obtient le n -lancer de pièce (Face, Pile, Face, ..., Face), c'est-à-dire si on a obtenu Pile au 2^{ème} lancer, alors on effectue un 2-tirage dans l'urne U_2 .
Si ce 2-tirage est (Boule blanche, Boule blanche), alors l'événement $[X = 2]$ est réalisé.
- × ...
- × Si on obtient le n -lancer de pièce (Face, ..., Face, Pile), c'est-à-dire si on a obtenu Pile au n ^{ème} lancer, alors on effectue un n -tirage dans l'urne U_n .
Si ce n -tirage est (Boule blanche, ..., Boule blanche), alors l'événement $[X = n]$ est réalisé.

Enfinement : $X(\Omega) = \llbracket 0, n \rrbracket$.

Commentaire

- On donne dans cette démonstration des exemples de tirages et de lancers qui réalisent les événements $[X = i]$. Il était bien sûr possible d'en choisir d'autres.
 Par exemple, pour l'événement $[X = 1]$, si on obtient le n -lancer de pièce (Face, Pile, Face, ..., Face), c'est-à-dire si on a obtenu Pile au 2^{ème} lancer, alors on effectue un 2-tirage dans l'urne U_2 .
 Si ce 2-tirage est (Boule blanche, Boule noire), alors l'événement $[X = 1]$ est réalisé.
- On peut un peu moins détailler la démonstration de cette question en rédigeant différemment : il est possible de tirer dans chacune des urnes U_i . De plus, les tirages dans cette urne peuvent fournir jusqu'à i boules blanches. Donc l'événement $[X = i]$ peut être réalisé.
- Comme l'énoncé demande de déterminer $X(\Omega)$ mais ne fournit pas sa valeur, on peut penser que la simple réponse « $X(\Omega) = \llbracket 0, n \rrbracket$ » (sans justification) permet d'obtenir la majeure partie des points alloués à cette question. Évidemment, si la question s'exprime sous la forme : « Montrer que $X(\Omega) = \dots$ », il faut détailler la réponse. □

3. a) Déterminer, en distinguant les cas $i = 0$ et $1 \leq i \leq n$, la probabilité $\mathbb{P}_{[Z=0]}([X = i])$.

Démonstration.

Soit $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$. Deux cas se présentent.

- Si $i = 0$. D'après l'énoncé : $[Z = 0] \subseteq [X = 0]$. Donc :

$$\mathbb{P}_{[Z=0]}([X = 0]) = \frac{\mathbb{P}([Z = 0] \cap [X = 0])}{\mathbb{P}([Z = 0])} = \frac{\mathbb{P}([Z = 0])}{\mathbb{P}([Z = 0])} = 1$$

$$\mathbb{P}_{[Z=0]}([X = 0]) = 1$$

- Si $1 \leq i \leq n$.

La famille $([X = i])_{i \in \llbracket 0, n \rrbracket}$ forme un système complet d'événements. Donc :

$$\begin{aligned} 1 &= \sum_{i=0}^n \mathbb{P}_{[Z=0]}([X = i]) \\ &= \mathbb{P}_{[Z=0]}([X = 0]) + \sum_{i=1}^n \mathbb{P}_{[Z=0]}([X = i]) \\ &= 1 + \sum_{i=1}^n \mathbb{P}_{[Z=0]}([X = i]) \qquad \qquad \qquad (d'après le point précédent) \end{aligned}$$

On en déduit : $\sum_{i=1}^n \mathbb{P}_{[Z=0]}([X = i]) = 1 - 1 = 0$.

Or, comme $\mathbb{P}_{[Z=0]}$ est une probabilité :

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \mathbb{P}_{[Z=0]}([X = i]) \geq 0$$

On a donc une somme nulle de termes positifs.

On en déduit que tous les termes de la somme sont nuls.

$$\text{Autrement dit : } \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \mathbb{P}_{[Z=0]}([X = i]) = 0.$$

Commentaire

Rappelons que pour tout événement A tel que $\mathbb{P}(A) \neq 0$, l'application \mathbb{P}_A est une application probabilité. Elle vérifie donc les propriétés usuelles d'une telle application. En particulier, si (B_1, \dots, B_n) est un système complet d'événements :

$$\sum_{k=1}^n \mathbb{P}_A(B_k) = 1$$

□

b) Déterminer, en distinguant les cas $i = n$ et $0 \leq i \leq n - 1$, la probabilité $\mathbb{P}_{[Z=n]}([X = i])$. Soit $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$. Deux cas se présentent.

• Si $i = n$.

D'après l'énoncé, l'événement $[Z = n]$ est réalisé si et seulement si on a obtenu le premier pile au $n^{\text{ème}}$ lancer. Si c'est le cas, on effectue un n -tirage dans l'urne U_n qui ne contient que des boules blanches (n boules blanches et $n - n = 0$ boule noire).

L'événement $[X = n]$ est alors réalisé si l'on a obtenu n boules blanches lors des n tirages successifs dans cette urne.

On en déduit : $\mathbb{P}_{[Z=n]}([X = n]) = 1$.

• Si $0 \leq i \leq n - 1$.

La famille $([X = i])_{i \in \llbracket 0, n \rrbracket}$ forme un système complet d'événements. Donc :

$$\begin{aligned} 1 &= \sum_{i=0}^n \mathbb{P}_{[Z=n]}([X = i]) \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} \mathbb{P}_{[Z=n]}([X = i]) + \mathbb{P}_{[Z=n]}([X = n]) \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} \mathbb{P}_{[Z=n]}([X = i]) + 1 \end{aligned} \quad \begin{array}{l} \text{(d'après le point} \\ \text{précédent)} \end{array}$$

On en déduit : $\sum_{i=0}^{n-1} \mathbb{P}_{[Z=n]}([X = i]) = 1 - 1 = 0$.

Or, comme $\mathbb{P}_{[Z=n]}$ est une application probabilité :

$$\forall i \in \llbracket 0, n - 1 \rrbracket, \mathbb{P}_{[Z=n]}([X = i]) \geq 0$$

On a donc une somme nulle de termes positifs.

On en déduit que tous les termes de la somme sont nuls.

Autrement dit : $\forall i \in \llbracket 0, n - 1 \rrbracket, \mathbb{P}_{[Z=n]}([X = i]) = 0$.

c) Pour tout k de $\{1, 2, \dots, n - 1\}$ déterminer, en distinguant les cas $0 \leq i \leq k$ et $k < i \leq n$, la probabilité conditionnelle $\mathbb{P}_{[Z=k]}([X = i])$.

Démonstration.

Soit $k \in \llbracket 1, n - 1 \rrbracket$. Soit $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$.

L'événement $[Z = k]$ est réalisé si et seulement si on a obtenu le premier pile au $k^{\text{ème}}$ lancer.

Si c'est le cas, on effectue alors un k -tirage dans l'urne U_k qui contient k boules blanches et $(n - k)$ boules noires.

Deux cas se présentent alors.

- Si $0 \leq i \leq k$.

Cette deuxième partie de l'expérience consiste en la succession de k épreuves de Bernoulli indépendantes et de même paramètre $\frac{k}{n}$, paramètre qui correspond à la probabilité de l'obtention d'une boule blanche dans l'urne U_k .

La v.a.r. X est la v.a.r. qui compte le nombre de succès de cette expérience. On en déduit :

$$\mathbb{P}_{[Z=k]}([X = i]) = \binom{k}{i} \left(\frac{k}{n}\right)^i \left(1 - \frac{k}{n}\right)^{k-i}$$

- Si $k < i \leq n$.

Il est impossible d'obtenir strictement plus de k boules blanches lors d'un k -tirage. Donc :

$$\mathbb{P}_{[Z=k]}([X = i]) = 0$$

Enfin, pour tout $k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$ et tout $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$:

$$\mathbb{P}_{[Z=k]}([X = i]) = \begin{cases} \binom{k}{i} \left(\frac{k}{n}\right)^i \left(\frac{n-k}{n}\right)^{k-i} & \text{si } 0 \leq i \leq k \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Commentaire

On verra dans le chapitre sur les couples de v.a.r. discrètes que cela signifie que la loi conditionnelle de la v.a.r. X sachant l'événement $[Z = k]$ est une loi binomiale de paramètre $\left(k, \frac{k}{n}\right)$. \square

4. a) Montrer : $\mathbb{P}([X = 0]) = \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{n-k}{2n}\right)^k + \frac{1}{2^n}$.

Démonstration.

La famille $([Z = k])_{k \in \llbracket 0, n \rrbracket}$ forme un système complet d'événements.

Ainsi, par la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}([X = 0]) \\ &= \sum_{k=0}^n \mathbb{P}([Z = k] \cap [X = 0]) \\ &= \sum_{k=0}^n \mathbb{P}([Z = k]) \mathbb{P}_{[Z=k]}([X = 0]) \\ &= \mathbb{P}([Z = 0]) \mathbb{P}_{[Z=0]}([X = 0]) + \sum_{k=1}^{n-1} \mathbb{P}([Z = k]) \mathbb{P}_{[Z=k]}([X = 0]) + \mathbb{P}([Z = n]) \mathbb{P}_{[Z=n]}([X = 0]) \\ &= \left(\frac{1}{2}\right)^n \times 1 + \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{1}{2}\right)^k \binom{k}{0} \left(\frac{k}{n}\right)^0 \left(\frac{n-k}{n}\right)^{k-0} + \cancel{\left(\frac{1}{2}\right)^n \times 0} \\ &= \frac{1}{2^n} + \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{1}{2}\right)^k \left(\frac{n-k}{n}\right)^k = \frac{1}{2^n} + \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{1}{2} \times \frac{n-k}{n}\right)^k \end{aligned}$$

$$\text{Enfin : } \mathbb{P}([X = 0]) = \frac{1}{2^n} + \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{n-k}{2n}\right)^k.$$

\square

b) Montrer : $\mathbb{P}([X = n]) = \frac{1}{2^n}$.

Démonstration.

La famille $([Z = k])_{k \in \llbracket 0, n \rrbracket}$ forme un système complet d'événements.
Ainsi, par la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}([X = n]) \\ &= \sum_{k=0}^n \mathbb{P}([Z = k] \cap [X = n]) \\ &= \sum_{k=1}^n \mathbb{P}([Z = k]) \mathbb{P}_{[Z=k]}([X = n]) \\ &= \mathbb{P}([Z = 0]) \mathbb{P}_{[Z=0]}([X = n]) + \sum_{k=1}^{n-1} \mathbb{P}([Z = k]) \mathbb{P}_{[Z=k]}([X = n]) + \mathbb{P}([Z = n]) \mathbb{P}_{[Z=n]}([X = n]) \\ &= \left(\frac{1}{2}\right)^n \times 0 + \sum_{k=1}^{n-1} \left(\left(\frac{1}{2}\right)^k \times 0\right) + \left(\frac{1}{2}\right)^n \times 1 = \frac{1}{2^n} \end{aligned}$$

Finalement : $\mathbb{P}([X = n]) = \frac{1}{2^n}$.

□

c) Exprimer, pour tout i de $\{1, 2, \dots, n - 1\}$, $\mathbb{P}([X = i])$ sous forme d'une somme que l'on ne cherchera pas à réduire.

Démonstration.

Soit $i \in \llbracket 1, n - 1 \rrbracket$.

La famille $([Z = k])_{k \in \llbracket 0, n \rrbracket}$ forme un système complet d'événements.
Ainsi, par la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}([X = i]) \\ &= \sum_{k=0}^n \mathbb{P}([Z = k] \cap [X = i]) \\ &= \sum_{k=0}^n \mathbb{P}([Z = k]) \mathbb{P}_{[Z=k]}([X = i]) \\ &= \mathbb{P}([Z = 0]) \mathbb{P}_{[Z=0]}([X = i]) + \sum_{k=1}^{n-1} \mathbb{P}([Z = k]) \mathbb{P}_{[Z=k]}([X = i]) + \mathbb{P}([Z = n]) \mathbb{P}_{[Z=n]}([X = i]) \\ &= \cancel{\left(\frac{1}{2}\right)^n \times 0} + \sum_{k=1}^{n-1} \mathbb{P}([Z = k]) \mathbb{P}_{[Z=k]}([X = i]) + \cancel{\left(\frac{1}{2}\right)^n \times 0} \\ &= \sum_{k=1}^{i-1} \mathbb{P}([Z = k]) \mathbb{P}_{[Z=k]}([X = i]) + \sum_{k=i}^{n-1} \mathbb{P}([Z = k]) \mathbb{P}_{[Z=k]}([X = i]) \\ &= \sum_{k=1}^{i-1} \left(\cancel{\left(\frac{1}{2}\right)^k \times 0}\right) + \sum_{k=i}^{n-1} \left(\frac{1}{2}\right)^k \binom{k}{i} \left(\frac{k}{n}\right)^i \left(\frac{n-k}{n}\right)^{k-i} \\ &= \sum_{k=i}^{n-1} \left(\frac{1}{2}\right)^i \left(\frac{1}{2}\right)^{k-i} \binom{k}{i} \left(\frac{k}{n}\right)^i \left(\frac{n-k}{n}\right)^{k-i} \\ &= \sum_{k=i}^{n-1} \binom{k}{i} \left(\frac{k}{2n}\right)^i \left(\frac{n-k}{2n}\right)^{k-i} \end{aligned}$$

Finalement, pour tout $i \in \llbracket 1, n - 1 \rrbracket$: $\mathbb{P}([X = i]) = \sum_{k=i}^{n-1} \binom{k}{i} \left(\frac{k}{2n}\right)^i \left(\frac{n-k}{2n}\right)^{k-i}$.

□

5. Vérifier, avec les expressions trouvées à la question précédente, que $\sum_{i=0}^n \mathbb{P}([X = i]) = 1$.

Démonstration.

• Tout d'abord :

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^n \mathbb{P}([X = i]) &= \mathbb{P}([X = 0]) + \sum_{i=1}^{n-1} \mathbb{P}([X = i]) + \mathbb{P}([X = n]) \\ &= \left(\frac{1}{2^n} + \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{n-k}{2n} \right)^k \right) + \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{k=i}^{n-1} \binom{k}{i} \left(\frac{k}{2n} \right)^i \left(\frac{n-k}{2n} \right)^{k-i} + \frac{1}{2^n} \end{aligned}$$

• Ensuite :

$$\begin{aligned} &\sum_{i=1}^{n-1} \sum_{k=i}^{n-1} \binom{k}{i} \left(\frac{k}{2n} \right)^i \left(\frac{n-k}{2n} \right)^{k-i} \\ &= \sum_{1 \leq i \leq k \leq n-1} \binom{k}{i} \left(\frac{k}{2n} \right)^i \left(\frac{n-k}{2n} \right)^{k-i} \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{i=1}^k \binom{k}{i} \left(\frac{k}{2n} \right)^i \left(\frac{n-k}{2n} \right)^{k-i} \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} \left(\sum_{i=0}^k \binom{k}{i} \left(\frac{k}{2n} \right)^i \left(\frac{n-k}{2n} \right)^{k-i} - \binom{k}{0} \left(\frac{k}{2n} \right)^0 \left(\frac{n-k}{2n} \right)^{k-0} \right) \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} \left(\left(\frac{k}{2n} + \frac{n-k}{2n} \right)^k - \left(\frac{n-k}{2n} \right)^k \right) \quad \text{(d'après la formule du binôme de Newton)} \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} \left(\left(\frac{\cancel{x}}{2\cancel{x}} \right)^k - \left(\frac{n-k}{2n} \right)^k \right) \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{1}{2} \right)^k - \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{n-k}{2n} \right)^k \quad \text{(par linéarité)} \end{aligned}$$

Or $\sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{1}{2} \right)^k$ est la somme des termes d'une suite géométrique de raison $\frac{1}{2} \neq 1$. Ainsi :

$$\sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{1}{2} \right)^k = \frac{\left(\frac{1}{2} \right)^1 - \left(\frac{1}{2} \right)^n}{1 - \frac{1}{2}} = \cancel{\frac{1}{2}} \frac{1 - \frac{1}{2^{n-1}}}{\cancel{\frac{1}{2}}} = 1 - \frac{1}{2^{n-1}}$$

Ainsi :

$$\sum_{i=1}^{n-1} \sum_{k=i}^{n-1} \binom{k}{i} \left(\frac{k}{2n} \right)^i \left(\frac{n-k}{2n} \right)^{k-i} = 1 - \frac{1}{2^{n-1}} - \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{n-k}{2n} \right)^k$$

• On en conclut :

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^n \mathbb{P}([X = i]) &= \frac{1}{2^n} + \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{n-k}{2n} \right)^k + 1 - \frac{1}{2^{n-1}} - \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{n-k}{2n} \right)^k + \frac{1}{2^n} \\ &= \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^n} - \frac{1}{2^{n-1}} + 1 = \frac{2}{2^n} - \frac{1}{2^{n-1}} + 1 = \cancel{\frac{1}{2^{n-1}}} - \cancel{\frac{1}{2^{n-1}}} + 1 = 1 \end{aligned}$$

On a donc bien : $\sum_{i=0}^n \mathbb{P}([X = i]) = 1$.

□

Problème (EDHEC 2003)

Un joueur participe à un jeu se jouant en plusieurs parties.

Ses observations lui permettent d'affirmer que :

- × s'il gagne deux parties consécutives, alors il gagne la prochaine avec la probabilité $\frac{2}{3}$.
- × s'il perd une partie et gagne la suivante, alors il gagne la prochaine avec la probabilité $\frac{1}{2}$.
- × s'il gagne une partie et perd la suivante, alors il gagne la prochaine avec la probabilité $\frac{1}{2}$.
- × s'il perd deux parties consécutives, alors il gagne la prochaine avec la probabilité $\frac{1}{3}$.

Pour tout entier naturel n non nul, on note A_n l'événement : « le joueur gagne la $n^{\text{ème}}$ partie ».

De plus, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, on pose :

$$E_n = A_{n-1} \cap A_n \quad F_n = \overline{A_{n-1}} \cap A_n \quad G_n = A_{n-1} \cap \overline{A_n} \quad H_n = \overline{A_{n-1}} \cap \overline{A_n}$$

1. a) Utiliser la formule des probabilités totales pour montrer que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, on a :

$$\mathbb{P}(E_{n+1}) = \frac{2}{3} \mathbb{P}(E_n) + \frac{1}{2} \mathbb{P}(F_n)$$

Démonstration.

- Démontrons tout d'abord que la famille (E_n, F_n, G_n, H_n) est un système complet d'événements.

(i) Tout d'abord :

$$\begin{aligned} E_n \cap F_n &= (A_{n-1} \cap A_n) \cap (\overline{A_{n-1}} \cap A_n) \\ &= (A_{n-1} \cap \overline{A_{n-1}}) \cap (A_n \cap A_n) && \text{(par commutativité} \\ &= \emptyset \cap A_n = \emptyset && \text{et associativité)} \end{aligned}$$

De même :

$$\begin{aligned} E_n \cap G_n &= A_{n-1} \cap A_n \cap \overline{A_n} = A_{n-1} \cap \emptyset = \emptyset \\ E_n \cap H_n &= A_{n-1} \cap \overline{A_{n-1}} \cap A_n \cap \overline{A_n} = \emptyset \cap \emptyset = \emptyset \\ F_n \cap G_n &= A_{n-1} \cap \overline{A_{n-1}} \cap A_n \cap \overline{A_n} = \emptyset \cap \emptyset = \emptyset \\ F_n \cap H_n &= \overline{A_{n-1}} \cap A_n \cap \overline{A_n} = \overline{A_{n-1}} \cap \emptyset = \emptyset \\ G_n \cap H_n &= A_{n-1} \cap \overline{A_{n-1}} \cap \overline{A_n} = \emptyset \cap \overline{A_n} = \emptyset \end{aligned}$$

(ii) Par ailleurs :

$$\begin{aligned} &E_n \cup F_n \cup G_n \cup H_n \\ &= (A_{n-1} \cap A_n) \cup (\overline{A_{n-1}} \cap A_n) \cup (A_{n-1} \cap \overline{A_n}) \cup (\overline{A_{n-1}} \cap \overline{A_n}) \\ &= \left((A_{n-1} \cup \overline{A_{n-1}}) \cap A_n \right) \cup \left((A_{n-1} \cup \overline{A_{n-1}}) \cap \overline{A_n} \right) \\ &= (\Omega \cap A_n) \cup (\Omega \cap \overline{A_n}) = A_n \cup \overline{A_n} = \Omega \end{aligned}$$

La famille (E_n, F_n, G_n, H_n) est un système complet d'événements.

Commentaire

- Profitons de cette question pour rappeler qu'un événement est souvent défini par une propriété (par exemple : « gagner deux parties consécutives »). Rigoureusement, un événement c'est l'ensemble des tirages qui vérifient la propriété définissant l'événement. On dit de tels tirages qu'ils réalisent **réalisent** l'événement.
- L'énoncé commence par une disjonction de cas. Chaque cas consiste à étudier ce qui se déroule si une propriété est vérifiée. Dans un exercice de probabilités, cela se traduit, comme on l'a vu au point précédent, par l'étude de la réalisation d'un événement. La disjonction de cas de l'énoncé doit donc être lue comme suit :
 - × si E_n est réalisé, alors ...
 - × si F_n est réalisé, alors ...
 - × si G_n est réalisé, alors ...
 - × si H_n est réalisé, alors ...
- Pour qu'une telle disjonction de cas ait du sens :
 - (i) il est préférable qu'il n'y ait pas deux cas qui se recoupent.
 Cela correspond, dans la disjonction de cas de l'énoncé, à dire que la famille (E_n, F_n, G_n, H_n) est constituée d'événements deux à deux incompatibles.
 - (ii) il est obligatoire qu'elle soit exhaustive.
 Autrement dit, tous les cas possibles doivent être envisagés.
 Dans le cas de l'énoncé, cela correspond à : $E_n \cup F_n \cup G_n \cup H_n = \Omega$.
 Une telle disjonction de cas traduit donc le fait que la famille (E_n, F_n, G_n, H_n) est un **système complet d'événements** (SCE).
 - Dans l'énoncé initial, on admettait que la famille (E_n, F_n, G_n, H_n) forme un SCE. Cette mention est supprimée dans cette version car, dans la plupart des exercices, c'est le candidat qui doit introduire le SCE.

- Par la formule des probabilités totales :

$$\mathbb{P}(E_{n+1}) = \mathbb{P}(E_n \cap E_{n+1}) + \mathbb{P}(F_n \cap E_{n+1}) + \mathbb{P}(G_n \cap E_{n+1}) + \mathbb{P}(H_n \cap E_{n+1})$$

Or :

$$\begin{aligned} E_n \cap E_{n+1} &= (A_{n-1} \cap A_n) \cap (A_n \cap A_{n+1}) \\ &= A_{n-1} \cap A_n \cap A_{n+1} \\ &= E_n \cap A_{n+1} \end{aligned}$$

De même : $F_n \cap E_{n+1} = (\overline{A_{n-1}} \cap A_n) \cap (A_n \cap A_{n+1}) = F_n \cap A_{n+1}$.

Enfin :

$$\begin{aligned} \times G_n \cap E_{n+1} &= (A_{n-1} \cap \overline{A_n}) \cap (A_n \cap A_{n+1}) = A_{n-1} \cap (\overline{A_n} \cap A_n) \cap A_{n+1} = \emptyset \\ \times H_n \cap E_{n+1} &= (\overline{A_{n-1}} \cap \overline{A_n}) \cap (A_n \cap A_{n+1}) = \overline{A_{n-1}} \cap (\overline{A_n} \cap A_n) \cap A_{n+1} = \emptyset \end{aligned}$$

- On en conclut :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(E_{n+1}) &= \mathbb{P}(E_n \cap A_{n+1}) + \mathbb{P}(F_n \cap A_{n+1}) + \cancel{\mathbb{P}(\emptyset)} + \cancel{\mathbb{P}(\emptyset)} \\ &= \mathbb{P}(E_n) \times \mathbb{P}_{E_n}(A_{n+1}) + \mathbb{P}(F_n) \times \mathbb{P}_{F_n}(A_{n+1}) \quad (\text{car } \mathbb{P}(E_n) \neq 0 \text{ et } \mathbb{P}(F_n) \neq 0) \\ &= \mathbb{P}(E_n) \times \frac{2}{3} + \mathbb{P}(F_n) \times \frac{1}{3} \end{aligned}$$

On a bien : $\mathbb{P}(E_{n+1}) = \frac{2}{3} \mathbb{P}(E_n) + \frac{1}{3} \mathbb{P}(F_n)$.

Commentaire

- On doit alors calculer $\mathbb{P}(E_{n+1})$. Cette probabilité semble dépendre de ce qui s'est produit lors des deux tirages précédents. Il s'agit alors de tester l'événement E_{n+1} par rapport à chacun des événements du SCE (E_n, F_n, G_n, H_n) . La **formule des probabilités totales** permet de formaliser cette idée.
- On pouvait traiter cette question en utilisant le SCE $(A_{n-1}, \overline{A_{n-1}})$. On obtient alors, par la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(E_{n+1}) &= \mathbb{P}(A_{n-1} \cap E_{n+1}) + \mathbb{P}(\overline{A_{n-1}} \cap E_{n+1}) \\ &= \mathbb{P}(A_{n-1} \cap A_n \cap A_{n+1}) + \mathbb{P}(\overline{A_{n-1}} \cap A_n \cap A_{n+1}) \\ &= \mathbb{P}(E_n \cap A_{n+1}) + \mathbb{P}(F_n \cap A_{n+1}) \end{aligned}$$

On constate que ce choix de SCE permet d'obtenir le résultat bien plus facilement. Toutefois, il apparaît de manière moins naturelle que les SCE utilisé dans la démonstration (c'est clairement celui que le concepteur avait en tête). □

- b) Exprimer de la même façon (aucune explication n'est exigée) les probabilités $\mathbb{P}(F_{n+1})$, $\mathbb{P}(G_{n+1})$ et $\mathbb{P}(H_{n+1})$ en fonction de $\mathbb{P}(E_n)$, $\mathbb{P}(F_n)$, $\mathbb{P}(G_n)$ et $\mathbb{P}(H_n)$.

Démonstration.

Par un raisonnement similaire à la question précédente :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(F_{n+1}) &= \mathbb{P}(E_n \cap F_{n+1}) + \mathbb{P}(F_n \cap F_{n+1}) + \mathbb{P}(G_n \cap F_{n+1}) + \mathbb{P}(H_n \cap F_{n+1}) \\ &= \mathbb{P}(\emptyset) + \mathbb{P}(\emptyset) + \mathbb{P}(G_n \cap A_{n+1}) + \mathbb{P}(H_n \cap A_{n+1}) \\ &= \mathbb{P}(G_n) \mathbb{P}_{G_n}(A_{n+1}) + \mathbb{P}(H_n) \mathbb{P}_{H_n}(A_{n+1}) \\ &= \frac{1}{2} \mathbb{P}(G_n) + \frac{1}{3} \mathbb{P}(H_n) \end{aligned}$$

$$\boxed{\mathbb{P}(F_{n+1}) = \frac{1}{2} \mathbb{P}(G_n) + \frac{1}{3} \mathbb{P}(H_n)}$$

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(G_{n+1}) &= \mathbb{P}(E_n \cap G_{n+1}) + \mathbb{P}(F_n \cap G_{n+1}) + \mathbb{P}(G_n \cap G_{n+1}) + \mathbb{P}(H_n \cap G_{n+1}) \\ &= \mathbb{P}(E_n \cap \overline{A_{n+1}}) + \mathbb{P}(F_n \cap \overline{A_{n+1}}) + \mathbb{P}(\emptyset) + \mathbb{P}(\emptyset) \\ &= \mathbb{P}(E_n) \mathbb{P}_{E_n}(\overline{A_{n+1}}) + \mathbb{P}(F_n) \mathbb{P}_{F_n}(\overline{A_{n+1}}) \\ &= \frac{1}{3} \mathbb{P}(E_n) + \frac{1}{2} \mathbb{P}(F_n) \end{aligned}$$

$$\boxed{\mathbb{P}(G_{n+1}) = \frac{1}{3} \mathbb{P}(E_n) + \frac{1}{2} \mathbb{P}(F_n)}$$

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(H_{n+1}) &= \mathbb{P}(E_n \cap H_{n+1}) + \mathbb{P}(F_n \cap H_{n+1}) + \mathbb{P}(G_n \cap H_{n+1}) + \mathbb{P}(H_n \cap H_{n+1}) \\ &= \mathbb{P}(\emptyset) + \mathbb{P}(\emptyset) + \mathbb{P}(G_n \cap \overline{A_{n+1}}) + \mathbb{P}(H_n \cap \overline{A_{n+1}}) \\ &= \mathbb{P}(G_n) \mathbb{P}_{G_n}(\overline{A_{n+1}}) + \mathbb{P}(H_n) \mathbb{P}_{H_n}(\overline{A_{n+1}}) \\ &= \frac{1}{2} \mathbb{P}(G_n) + \frac{2}{3} \mathbb{P}(H_n) \end{aligned}$$

$$\boxed{\mathbb{P}(H_{n+1}) = \frac{1}{2} \mathbb{P}(G_n) + \frac{2}{3} \mathbb{P}(H_n)}$$

Commentaire

- On détaille ici les réponses pour s'assurer de la bonne compréhension. Mais l'énoncé est très clair : **aucune explication n'est exigée**. Le résultat seul permet donc d'obtenir tous les points.
- Si l'énoncé ne demande pas de démonstration dans cette question c'est parce que la bonne maîtrise de la méthode est déjà évaluée en question **1.a**).
- Dans les énoncés de type « chaîne de Markov » (comme celui-ci), l'évolution du système est donné par une **matrice de transition**. Cette question est essentielle pour obtenir cette matrice. Il est donc logique qu'elle apparaisse malgré le caractère redondant de la démonstration. □

c) Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, on pose : $U_n = \begin{pmatrix} \mathbb{P}(E_n) \\ \mathbb{P}(F_n) \\ \mathbb{P}(G_n) \\ \mathbb{P}(H_n) \end{pmatrix}$.

Vérifier que $U_{n+1} = M U_n$, où $M = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$.

Démonstration.

Soit $n \geq 2$.

$$M U_n = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbb{P}(E_n) \\ \mathbb{P}(F_n) \\ \mathbb{P}(G_n) \\ \mathbb{P}(H_n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \mathbb{P}(E_n) + \frac{1}{2} \mathbb{P}(F_n) \\ \frac{1}{2} \mathbb{P}(G_n) + \frac{1}{3} \mathbb{P}(H_n) \\ \frac{1}{3} \mathbb{P}(E_n) + \frac{1}{2} \mathbb{P}(F_n) \\ \frac{1}{2} \mathbb{P}(G_n) + \frac{2}{3} \mathbb{P}(H_n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbb{P}(E_{n+1}) \\ \mathbb{P}(F_{n+1}) \\ \mathbb{P}(G_{n+1}) \\ \mathbb{P}(H_{n+1}) \end{pmatrix} = U_{n+1}$$

Pour tout $n \geq 2$, $U_{n+1} = M U_n$. □

Commentaire

Il faut noter que le résultat de cette réponse permet de confirmer le résultat trouvé en question précédente. C'est assez fréquent qu'un énoncé contienne, dans les questions qui suivent, des éléments de réponse pour la question actuelle. Il est d'ailleurs conseillé de lire entièrement l'énoncé de l'exercice avant de le traiter. Cela permet d'avoir une vision globale de l'exercice et c'est aussi l'occasion de pointer les questions qui semblent les plus faciles. Rappelons que c'est l'un des objectifs lorsqu'on compose : ne pas laisser derrière soi de questions faciles ! □

2. a) Soient $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 3 \\ -2 & -1 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & -3 & 3 \end{pmatrix}$ et $Q = \begin{pmatrix} -1 & -3 & 3 & 1 \\ 2 & -3 & -3 & 2 \\ 2 & 1 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Calculer PQ . En déduire que P est inversible et donner son inverse.

Démonstration.

$$PQ = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 3 \\ -2 & -1 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & -3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -3 & 3 & 1 \\ 2 & -3 & -3 & 2 \\ 2 & 1 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 10 \end{pmatrix} = 10 I_4$$

On en déduit : $P \times (\frac{1}{10} Q) = I_4$. Ainsi, la matrice P est inversible d'inverse $\frac{1}{10} Q$. □

b) Déterminer la matrice $D = P^{-1}MP$.

Démonstration.

- D'après la question précédente :

$$D = P^{-1}MP = \frac{1}{10} QMP$$

- Tout d'abord :

$$QM = \begin{pmatrix} -1 & -3 & 3 & 1 \\ 2 & -3 & -3 & 2 \\ 2 & 1 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 1 & -1 & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

- Puis :

$$QMP = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 1 & -1 & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 3 \\ -2 & -1 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & -3 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{10}{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{10}{6} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 10 \end{pmatrix}$$

On en déduit : $D = \frac{1}{10} QMP = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{6} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

□

Dans toute la suite, on suppose que le joueur a gagné les deux premières parties.

3. a) Montrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}, M^n = PD^nP^{-1}$.

Démonstration.

Démontrons par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}, \mathcal{P}(n)$ où $\mathcal{P}(n) : M^n = PD^nP^{-1}$.

► **Initialisation** :

– D'une part : $PD^0P^{-1} = PP^{-1} = I_4$.

– D'autre part : $M^0 = I_4$.

D'où $\mathcal{P}(0)$.

► **Hérédité** : soit $n \in \mathbb{N}$.

Supposons $\mathcal{P}(n)$ et démontrons $\mathcal{P}(n+1)$ (i.e. $M^{n+1} = PD^{n+1}P^{-1}$).

$$\begin{aligned} M^{n+1} &= M^n \times M \\ &= PD^nP^{-1} \times M && \text{(par hypothèse de récurrence)} \\ &= PD^nP^{-1} \times PDP^{-1} && \text{(comme } D = P^{-1}MP, \text{ on a } MP = PD \\ &&& \text{et donc } M = PDP^{-1}) \\ &= PD^nIDP^{-1} \\ &= PD^{n+1}P^{-1} \end{aligned}$$

D'où $\mathcal{P}(n+1)$.

Ainsi, par principe de récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}, \mathcal{P}(n)$.

□

b) Montrer, également par récurrence : $\forall n \geq 2, U_n = M^{n-2} U_2$.

Démonstration.

Démontrons par récurrence : $\forall n \geq 2, \mathcal{P}(n)$ où $\mathcal{P}(n) : U_n = M^{n-2} U_2$.

► **Initialisation :**

On a : $M^{2-2} U_2 = M^0 U_2 = I_4 U_2 = U_2$.

D'où $\mathcal{P}(2)$.

► **Hérédité :** soit $n \geq 2$.

Supposons $\mathcal{P}(n)$ et démontrons $\mathcal{P}(n+1)$ (i.e. $U_{n+1} = M^{n-1} U_2$).

$$\begin{aligned} U_{n+1} &= M U_n && \text{(d'après la question 1.c)} \\ &= M M^{n-2} U_2 && \text{(par hypothèse de récurrence)} \\ &= M^{n-1} U_2 \end{aligned}$$

D'où $\mathcal{P}(n+1)$.

Ainsi, par principe de récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}, \mathcal{P}(n)$.

□

c) Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, donner la première colonne de M^n , puis en déduire $\mathbb{P}(E_n), \mathbb{P}(F_n), \mathbb{P}(G_n)$ et $\mathbb{P}(H_n)$.

Démonstration.

Soit $n \geq 2$.

• On récupère la première colonne de la matrice M^n en la multipliant à droite par $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

$$\begin{aligned} M^n \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} &= P D^n P^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} && \text{(d'après la question 3.a)} \\ &= \frac{1}{10} P D^n Q \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} && \text{(d'après la question 2.a)} \\ &= \frac{1}{10} P D^n \begin{pmatrix} -1 & -3 & 3 & 1 \\ 2 & -3 & -3 & 2 \\ 2 & 1 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{10} P D^n \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{10} P \begin{pmatrix} (-\frac{1}{3})^n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (\frac{1}{6})^n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (\frac{1}{2})^n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{10} P \begin{pmatrix} -(-\frac{1}{3})^n \\ 2 (\frac{1}{6})^n \\ 2 (\frac{1}{2})^n \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 3 \\ -2 & -1 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & -3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -(-\frac{1}{3})^n \\ 2 (\frac{1}{6})^n \\ 2 (\frac{1}{2})^n \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} -(-\frac{1}{3})^n + 2 (\frac{1}{6})^n + 6 (\frac{1}{2})^n + 3 \\ 2 (-\frac{1}{3})^n - 2 (\frac{1}{6})^n - 2 (\frac{1}{2})^n + 2 \\ -2 (-\frac{1}{3})^n - 2 (\frac{1}{6})^n + 2 (\frac{1}{2})^n + 2 \\ (-\frac{1}{3})^n + 2 (\frac{1}{6})^n - 6 (\frac{1}{2})^n + 3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

- Par ailleurs, rappelons que d'après la question 3.b) :

$$\begin{pmatrix} \mathbb{P}(E_n) \\ \mathbb{P}(F_n) \\ \mathbb{P}(G_n) \\ \mathbb{P}(H_n) \end{pmatrix} = M^{n-2} \begin{pmatrix} \mathbb{P}(E_2) \\ \mathbb{P}(F_2) \\ \mathbb{P}(G_2) \\ \mathbb{P}(H_2) \end{pmatrix} = M^{n-2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\text{car on a supposé que le joueur a gagné les deux premières parties})$$

- En combinant ces deux résultats, on obtient :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(E_n) &= \frac{1}{10} \left(-\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-2} + 2 \left(\frac{1}{6}\right)^{n-2} + 6 \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2} + 3 \right) \\ \mathbb{P}(F_n) &= \frac{1}{10} \left(2 \left(-\frac{1}{3}\right)^{n-2} - 2 \left(\frac{1}{6}\right)^{n-2} - 2 \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2} + 2 \right) \\ \mathbb{P}(G_n) &= \frac{1}{10} \left(-2 \left(-\frac{1}{3}\right)^{n-2} - 2 \left(\frac{1}{6}\right)^{n-2} + 2 \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2} + 2 \right) \\ \mathbb{P}(H_n) &= \frac{1}{10} \left(\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-2} + 2 \left(\frac{1}{6}\right)^{n-2} - 6 \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2} + 3 \right) \end{aligned} \quad \square$$

- d) Montrer que l'on a :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(E_n) = \frac{3}{10} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(F_n) = \frac{2}{10} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(G_n) = \frac{2}{10} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(H_n) = \frac{3}{10}$$

Démonstration.

Tout d'abord :

- × comme $-\frac{1}{3} \in]-1, 1[$ alors : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{3}\right)^{n-2} = 0$,
- × comme $\frac{1}{6} \in]-1, 1[$ alors : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{6}\right)^{n-2} = 0$,
- × comme $\frac{1}{2} \in]-1, 1[$ alors : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2} = 0$.

$$\begin{array}{c} \text{On en déduit, d'après la question précédente :} \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(E_n) = \frac{3}{10} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(F_n) = \frac{2}{10} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(G_n) = \frac{2}{10} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(H_n) = \frac{3}{10} \quad \square \end{array}$$

4. Pour tout entier naturel k non nul, on note X_k la variable aléatoire qui vaut 1 si le joueur gagne la $k^{\text{ème}}$ partie et qui vaut 0 sinon (X_1 et X_2 sont donc deux variables certaines).

- a) Pour tout entier naturel k supérieur ou égal à 2, exprimer A_k en fonction de E_k et F_k .

Démonstration.

Soit $k \geq 2$.

- Rappelons tout d'abord :

$$E_k = A_{k-1} \cap A_k \quad \text{et} \quad F_k = \overline{A_{k-1}} \cap A_k$$

- On remarque alors :

$$\begin{aligned} E_k \cup F_k &= (A_{k-1} \cap A_k) \cup (\overline{A_{k-1}} \cap A_k) \\ &= (A_{k-1} \cup \overline{A_{k-1}}) \cap A_k \quad (\text{par distributivité de } \cap \\ &\quad \text{par rapport à } \cup) \\ &= \Omega \cap A_k = A_k \end{aligned}$$

$$\text{Pour tout } k \geq 2 : A_k = E_k \cup F_k.$$

Commentaire

Notons que l'événement $E_k \cup F_k$ est réalisé si et seulement si :

- × E_k est réalisé. C'est à dire si le joueur a gagné la $(k - 1)^{\text{ème}}$ partie et la $k^{\text{ème}}$ partie.
- × OU F_k est réalisé. C'est à dire si le joueur a perdu la $(k - 1)^{\text{ème}}$ partie et gagné la $k^{\text{ème}}$ partie.

Ainsi, $E_k \cup F_k$ est réalisé si et seulement si le joueur a gagné la $k^{\text{ème}}$ partie, et ce quel que soit résultat de la $(k - 1)^{\text{ème}}$. C'est une autre manière de démontrer : $A_k = E_k \cup F_k$. □

b) En déduire, pour tout entier naturel k supérieur ou égal à 2, la loi de X_k .

Démonstration.

Soit $k \geq 2$.

- Par définition : $X_k(\Omega) = \{0, 1\}$.
- Par ailleurs :

$$\begin{aligned}
 \mathbb{P}([X_k = 1]) &= \mathbb{P}(A_k) && \text{(par définition de la v.a.r. } X_k) \\
 &= \mathbb{P}(E_k \cup F_k) \\
 &= \mathbb{P}(E_k) + \mathbb{P}(F_k) && \text{(par incompatibilité des événements } E_k \text{ et } F_k) \\
 &= \frac{1}{10} \left(- \left(-\frac{1}{3}\right)^{k-2} + 2 \left(\frac{1}{6}\right)^{k-2} + 6 \left(\frac{1}{2}\right)^{k-2} + 3 \right) \\
 &\quad + \frac{1}{10} \left(2 \left(-\frac{1}{3}\right)^{k-2} - 2 \left(\frac{1}{6}\right)^{k-2} - 2 \left(\frac{1}{2}\right)^{k-2} + 2 \right) \\
 &= \frac{1}{10} \left(\left(-\frac{1}{3}\right)^{k-2} + 4 \left(\frac{1}{2}\right)^{k-2} + 5 \right)
 \end{aligned}$$

On en déduit : $X_k \hookrightarrow \mathcal{B}(p_k)$ avec $p_k = \frac{1}{10} \left(\left(-\frac{1}{3}\right)^{k-2} + 4 \left(\frac{1}{2}\right)^{k-2} + 5 \right)$. □

5. Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, on note S_n la variable aléatoire égale au nombre de parties gagnées par le joueur lors des n premières parties.

a) Calculer $\mathbb{P}([S_n = 2])$ en distinguant les cas $n = 2$, $n = 3$ et $n \geq 4$.

Démonstration.

Soit $n \geq 2$.

L'événement $[S_n = 2]$ est réalisé si et seulement si le joueur a gagné 2 parties lors des n premières parties. Or on considère que le joueur a gagné ses deux premières parties (ainsi : $A_1 = \Omega$ et $A_2 = \Omega$). Ainsi, l'événement $[S_n = 2]$ est réalisé si et seulement si le joueur, qui a gagné ses deux premières parties, a perdu toutes les suivantes.

Plusieurs cas se présentent.

– Si $n = 2$ alors :

$$\begin{aligned}
 [S_2 = 2] &= A_1 \cap A_2 \\
 &= \Omega \cap \Omega = \Omega \quad (A_1 = \Omega = A_2 \text{ car on a considéré que le joueur a gagné les deux premières parties})
 \end{aligned}$$

$\mathbb{P}([S_2 = 2]) = \mathbb{P}(\Omega) = 1$

– Si $n = 3$ alors :

$$[S_3 = 2] = A_1 \cap A_2 \cap \overline{A_3} = \overline{A_3}$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}([S_3 = 2]) &= \mathbb{P}(\overline{A_3}) \\ &= 1 - \mathbb{P}(A_3) \\ &= 1 - \frac{1}{10} \left(-\frac{1}{3} + 4 \times \frac{1}{2} + 5 \right) \quad (\text{d'après la question 4.b}) \\ &= 1 - \frac{1}{10} \left(-\frac{1}{3} + 7 \right) = 1 - \frac{1}{10} \frac{20}{3} = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

$$\boxed{\mathbb{P}([S_3 = 2]) = \frac{1}{3}}$$

– Si $n \geq 4$ alors :

$$[S_n = 2] = A_1 \cap A_2 \cap \overline{A_3} \cap \overline{A_4} \cap \overline{A_5} \cap \dots \cap \overline{A_n} = \overline{A_3} \cap \overline{A_4} \cap \overline{A_5} \cap \dots \cap \overline{A_n}$$

Ainsi, par la formule des probabilités composées :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}([S_n = 2]) &= \mathbb{P}(\overline{A_3}) \times \mathbb{P}_{\overline{A_3}}(\overline{A_4}) \times \mathbb{P}_{\overline{A_3} \cap \overline{A_4}}(\overline{A_5}) \times \dots \times \mathbb{P}_{\overline{A_3} \cap \dots \cap \overline{A_{n-1}}}(\overline{A_n}) \\ &= \mathbb{P}(\overline{A_3}) \times \mathbb{P}_{\overline{A_3}}(\overline{A_4}) \times \prod_{k=4}^{n-1} \mathbb{P}_{\overline{A_3} \cap \dots \cap \overline{A_k}}(\overline{A_{k+1}}) \end{aligned}$$

Détaillons chacun des termes présents dans ce produit :

$$\times \mathbb{P}(\overline{A_3}) = \frac{1}{3}, \text{ d'après ce qui précède.}$$

$$\begin{aligned} \times \mathbb{P}_{\overline{A_3}}(\overline{A_4}) &= 1 - \mathbb{P}_{\overline{A_3}}(A_4) \\ &= 1 - \mathbb{P}_{A_2 \cap \overline{A_3}}(A_4) \quad (\text{car } A_2 = \Omega) \\ &= 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \times \prod_{k=4}^{n-1} \mathbb{P}_{\overline{A_3} \cap \dots \cap \overline{A_k}}(\overline{A_{k+1}}) &= \prod_{k=4}^{n-1} \mathbb{P}_{\overline{A_{k-1}} \cap \overline{A_k}}(\overline{A_{k+1}}) \quad (\text{car la probabilité de perdre une partie ne dépend que du résultat des deux parties précédentes}) \\ &= \prod_{k=4}^{n-1} \mathbb{P}_{H_k}(\overline{A_{k+1}}) \\ &= \prod_{k=4}^{n-1} (1 - \mathbb{P}_{H_k}(A_{k+1})) \\ &= \prod_{k=4}^{n-1} \left(1 - \frac{1}{3} \right) = \prod_{k=4}^{n-1} \frac{2}{3} = \left(\frac{2}{3} \right)^{n-4} \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Ainsi, pour tout } n \geq 4 : \mathbb{P}([S_n = 2]) = \frac{1}{6} \left(\frac{2}{3} \right)^{n-4} .}$$

□

b) Déterminer $\mathbb{P}([S_n = n])$.

Démonstration.

- L'événement $[S_n = n]$ est réalisé si et seulement si le joueur a gagné n parties lors des n premières parties. Ainsi :

$$[S_n = n] = A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \dots \cap A_n = A_3 \cap \dots \cap A_n$$

- Ainsi, par la formule des probabilités composées :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}([S_n = n]) &= \mathbb{P}(A_3 \cap \dots \cap A_n) \\ &= \mathbb{P}(A_3) \times \mathbb{P}_{A_3}(A_4) \times \dots \times \mathbb{P}_{A_3 \cap \dots \cap A_{n-1}}(A_n) \\ &= \mathbb{P}(A_3) \times \mathbb{P}_{A_3}(A_4) \times \prod_{k=4}^{n-1} \mathbb{P}_{A_3 \cap \dots \cap A_{k-1}}(A_k) \end{aligned}$$

Et en raisonnant comme dans la question précédente :

$$\times \mathbb{P}(A_3) = 1 - \mathbb{P}(\overline{A_3}) = \frac{2}{3}$$

$$\times \mathbb{P}_{A_3}(A_4) = \mathbb{P}_{A_2 \cap A_3}(A_4) = \frac{2}{3}$$

$$\times \prod_{k=4}^{n-1} \mathbb{P}_{A_3 \cap \dots \cap A_{k-1}}(A_k) = \prod_{k=4}^{n-1} \mathbb{P}_{A_{k-2} \cap A_{k-1}}(A_k) = \prod_{k=4}^{n-1} \frac{2}{3} = \left(\frac{2}{3}\right)^{n-4}$$

On en déduit : $\mathbb{P}([S_n = n]) = \left(\frac{2}{3}\right)^{n-2}$.

□

c) Pour tout entier n supérieur ou égal à 3, écrire S_n en fonction des variables X_k , puis déterminer $\mathbb{E}(S_n)$ en fonction de n .

Démonstration.

- La v.a.r. S_n compte le nombre de parties gagnées lors des n premières parties. Or, pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$:

$$X_k : \omega \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si le joueur a gagné la } k^{\text{ème}} \text{ partie} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

On en déduit : $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$.

- La v.a.r. S_n admet une espérance car elle est la somme de v.a.r. qui admettent une espérance. De plus :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(S_n) &= \mathbb{E}\left(\sum_{k=1}^n X_k\right) \\ &= \sum_{k=1}^n \mathbb{E}(X_k) && \text{(par linéarité de l'espérance)} \\ &= \mathbb{E}(X_1) + \mathbb{E}(X_2) + \sum_{k=3}^n \mathbb{E}(X_k) && \text{(car } X_1 = 1 \text{ et } X_2 = 1, \text{ v.a.r. constantes} \\ &= 1 + 1 + \sum_{k=3}^n \mathbb{E}(X_k) && \text{égales à 1 car on considère que le joueur} \\ &= 2 + \sum_{k=3}^n p_k && \text{a gagné les deux premières parties)} \\ & && \text{(car } X_k \hookrightarrow \mathcal{B}(p_k)) \end{aligned}$$

Or, par définition des réels p_k :

$$\begin{aligned}
 & \sum_{k=3}^n p_k \\
 = & \sum_{k=3}^n \frac{1}{10} \left(\left(-\frac{1}{3}\right)^{k-2} + 4 \left(\frac{1}{2}\right)^{k-2} + 5 \right) \\
 = & \frac{1}{10} \sum_{k=3}^n \left(-\frac{1}{3}\right)^{k-2} + \frac{4}{10} \sum_{k=3}^n \left(\frac{1}{2}\right)^{k-2} + \frac{1}{10} \sum_{k=3}^n 5 \\
 = & \frac{1}{10} \sum_{k=1}^{n-2} \left(-\frac{1}{3}\right)^k + \frac{4}{10} \sum_{k=1}^{n-2} \left(\frac{1}{2}\right)^k + \frac{1}{10} \sum_{k=3}^n 5 \quad (\text{par décalage d'indice}) \\
 = & \frac{1}{10} \frac{\left(-\frac{1}{3}\right)^1 - \left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}}{1 - \left(-\frac{1}{3}\right)} + \frac{4}{10} \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}}{1 - \frac{1}{2}} + \frac{1}{10} 5 (n - 3 + 1) \quad (\text{en reconnaissant des} \\
 & \text{sommes géométriques de} \\
 & \text{raisons } -\frac{1}{3} \neq 1 \text{ et } \frac{1}{2} \neq 1) \\
 = & \frac{-\frac{1}{3}}{10} \frac{1 - \left(-\frac{1}{3}\right)^{n-2}}{\frac{4}{3}} + \frac{2}{10} \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}}{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2} (n - 2) \\
 = & -\frac{1}{40} + \frac{1}{40} \left(-\frac{1}{3}\right)^{n-2} + \frac{2}{5} - \frac{2}{5} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2} + \frac{n}{2} - 1 \\
 = & \left(\frac{2}{5} - \frac{1}{40} - 1\right) + \frac{1}{40} \left(-\frac{1}{3}\right)^{n-2} - \frac{2}{5} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}
 \end{aligned}$$

• Ainsi, on obtient :

$$\mathbb{E}(S_n) = 2 + \sum_{k=3}^n p_k = \left(1 + \frac{2}{5} - \frac{1}{40}\right) + \frac{1}{40} \left(-\frac{1}{3}\right)^{n-2} - \frac{2}{5} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}$$

$$\text{Et enfin : } 1 + \frac{2}{5} - \frac{1}{40} = \frac{40 + 16 - 1}{40} = \frac{55}{40} = \frac{11 \times \cancel{5}}{8 \times \cancel{5}}.$$

On en conclut : $\mathbb{E}(S_n) = \frac{11}{8} + \frac{1}{40} \left(-\frac{1}{3}\right)^{n-2} - \frac{2}{5} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}$.

□