DS2 (version B) /191

Exercice 1 /43

Partie I : Étude d'une suite récurrente /27

On considère une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 \in \mathbb{R}$ et : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \dfrac{u_n^2}{n+1}$.
On suppose : $u_0 > 0$.
On pose : $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = \dfrac{\ln(u_n)}{2^n}$.

1. Montrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie et : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n > 0$.

- **1 pt : initialisation**
- **2 pts : hérédité**
- **0 pt à la question en cas de faute flagrante ($\mathcal{P}(n)$ mal défini => récurrence non lue OU oubli de l'introduction du n OU supposition de $\forall n$, $\mathcal{P}(n)$ au lieu de $\mathcal{P}(n)$ . . .)**

2. ***a)*** Montrer que la série $\sum\limits_{k\geqslant 1} \dfrac{\ln(k)}{2^k}$ converge. Dans la suite, on note : $\sigma = -\sum\limits_{k=1}^{+\infty} \dfrac{\ln(k)}{2^k}$.

- **1 pt :** $\dfrac{\ln(n)}{2^n} \geqslant 0$ **et** $\dfrac{1}{n^2} \geqslant 0$
- **2 pts :** $\dfrac{\ln(n)}{2^n} \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$
- **1 pt :** $\sum \dfrac{1}{n^2}$ **converge**
- **1 pt : citation du critère de comparaison**

b) (i) Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, exprimer $v_k - v_{k-1}$ en fonction de k.
Puis déterminer la nature de la série $\sum\limits_{k\geqslant 1} (v_k - v_{k-1})$.

- **1 pt :** $v_k - v_{k-1} = -\dfrac{\ln(k)}{2^k}$
- **1 pt : utilisation de la question précédente et multiplication par** (-1)

(ii) En déduire que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge. Exprimer sa limite ℓ en fonction de u_0 et σ.

- **1 pt : télescopage** $\sum\limits_{k=1}^{n} (v_k - v_{k-1}) = v_n - v_0$
- **1 pt :** (v_n) **converge d'après la question précédente**
- **1 pt :** $\ell = \sigma + v_0$

3. On suppose dans cette question que $u_0 \neq \mathrm{e}^{-\sigma}$.

a) Déterminer le signe de ℓ
On pourra distinguer les cas $u_0 > e^{-\sigma}$ et $u_0 < e^{-\sigma}$.

- **2 pts :** $u_0 > \mathrm{e}^{-\sigma} \Leftrightarrow \ell > 0$ **(1 pt pour la stricte croissance de** $\exp$ **sur** $\mathbb{R}$**, 1 pt pour résultat)**
- **1 pt :** $u_0 < \mathrm{e}^{-\sigma} \Leftrightarrow \ell < 0$

b) En déduire la limite de $\big(\ln(u_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$, puis étudier le comportement en $+\infty$ de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

- **1 pt : si $u_0 > e^{-\sigma}$, alors $\ln(u_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$**
- **1 pt : si $u_0 > e^{-\sigma}$, alors $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$**
- **1 pt : si $u_0 < e^{-\sigma}$, alors $\ln(u_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty$ et $u_0 < e^{-\sigma}$, alors $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$**

4. On suppose dans cette question : $u_0 = e^{-\sigma}$.

a) Vérifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $v_n = \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} \dfrac{\ln(k)}{2^k}$.

- **1 pt : $v_0 = -\sigma = \sum\limits_{k=1}^{+\infty} \dfrac{\ln(k)}{2^k}$**
- **1 pt : $v_n = -\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{\ln(k)}{2^k} + v_0$**
- **1 pt : $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} \dfrac{\ln(k)}{2^k} = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{\ln(k)}{2^k} + \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} \dfrac{\ln(k)}{2^k}$**

b) En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

- **1 pt : $\ln(u_n) = \dfrac{\ln(n+1)}{2} + 2^n \sum\limits_{k=n+2}^{+\infty} \dfrac{\ln(k)}{2^k}$**
- **1 pt : $\ln(u_n) \geqslant \dfrac{\ln(n+1)}{2}$ car $\sum\limits_{k=n+2}^{+\infty} \dfrac{\ln(k)}{2^k} \geqslant 0$**
- **1 pt : $u_n \geqslant \exp\left(\dfrac{\ln(n+1)}{2}\right)$ et $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ par théorème de comparaison**

Partie II : Approximation de σ /19

5. *a)* Montrer : $\forall x \in \,]0,+\infty[$, $\ln(x) \leqslant x$.

- **3 pts (1 pt pour concavité de $\ln$ sur $]0,+\infty[$, 1 pt pour l'équation de la tangente en 1 : $y = x-1$, 1 pt pour $x-1 \leqslant x$)**

b) En déduire : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} \dfrac{\ln(k)}{2^k} \leqslant \dfrac{n+1}{2^{n-1}}$.

- **1 pt : $\sum\limits_{k=n+1}^{m} \dfrac{\ln(k)}{2^k} \leqslant \sum\limits_{k=n+1}^{m} \dfrac{k}{2^k}$**
- **1 pt : $\sum\limits_{k=n+1}^{m} k\, \left(\dfrac{1}{2}\right)^k = \sum\limits_{k=1}^{m-n} (k+n)\, \left(\dfrac{1}{2}\right)^{k+n}$**
- **1 pt : $\sum\limits_{k=1}^{m-n} (k+n)\, \left(\dfrac{1}{2}\right)^{k+n} = \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n+1} \sum\limits_{k=1}^{m-n} k\, \left(\dfrac{1}{2}\right)^{k-1} + n\, \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n} \sum\limits_{k=1}^{m-n} \left(\dfrac{1}{2}\right)^{k}$**
- **2 pts : $\sum\limits_{k\geqslant 1} k \left(\dfrac{1}{2}\right)^{k-1}$ série géométrique dérivée (1 pt pour $\dfrac{1}{2} \in \,]-1,1[$, 1 pt pour $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} k\, \left(\dfrac{1}{2}\right)^{k-1} = 4$)**
- **1 pt : $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} \left(\dfrac{1}{2}\right)^{k-1} = 1$**
- **1 pt : $\sum\limits_{k=n+1}^{m} \dfrac{k}{2^k} \underset{m\to+\infty}{\longrightarrow} \dfrac{n+2}{2^n}$**

6. Montrer alors : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \left| \sigma - \left(-\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{\ln(k)}{2^k} \right) \right| \leqslant \dfrac{n+1}{2^{n-1}}$.

- **2 pts :** $\left| \sigma - \left(-\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{\ln(k)}{2^k} \right) \right| = \left| -\sum\limits_{k=1}^{+\infty} \dfrac{\ln(k)}{2^k} + \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{\ln(k)}{2^k} \right| = \left| \sum\limits_{k=1}^{+\infty} \dfrac{\ln(k)}{2^k} - \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{\ln(k)}{2^k} \right|$

- **1 pt :** $\left| \sum\limits_{k=1}^{+\infty} \dfrac{\ln(k)}{2^k} - \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{\ln(k)}{2^k} \right| = \left| \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} \dfrac{\ln(k)}{2^k} \right| = \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} \dfrac{\ln(k)}{2^k} \leqslant \dfrac{n+2}{2^n}$

7. Écrire une fonction **Scilab** d'entête `function sigma = approx(epsilon)` qui, prenant en argument un réel ε strictement positif, renvoie une valeur approchée de σ à ε près.

- **5 pts (1 pt pour structure `function`, 1 pt pour initialisation, 2 pts pour boucle `while`, 1 pt pour sortie)**

```
function sigma = approx(eps)
    N = 1
    S = 0
    while (N+2) / 2 ^ N > eps
      S = S + log(N) / 2 ^ N
      N = N + 1
    end
    sigma = -S
endfunction
```

Exercice 2 / 17 + 25 = 42

1. Soit a et b deux réels strictement positifs et A la matrice carré d'ordre 2 définie par : $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$.

a) Montrer que si a et b sont égaux, la matrice A n'est pas inversible.

- **1 pt : calcul du rang ou du déterminant** $\det(A) = \det\left(\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}\right) = a^2 - b^2$
- **1 pt : conclusion**

b) Calculer la matrice $A^2 - 2a\,A$. En déduire que, si a et b sont distincts, la matrice A est inversible et donner la matrice A^{-1}.

- **1 pt :** $A^2 = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2+b^2 & ab+ba \\ ba+ab & b^2+a^2 \end{pmatrix}$
- **1 pt :** $A^2 - 2a\,A = (b^2 - a^2)\ I_2$
- **1 pt :** $b^2 - a^2 = 0 \ \Leftrightarrow\ a = b$
- **1 pt :** $A^{-1} = \dfrac{1}{b^2 - a^2}\ (A - 2a\, I_2)$

c) Montrer que les valeurs propres de A sont $a+b$ et $a-b$.

- **1 pt :** $\mathrm{Sp}(A) \subseteq \{a-b, a+b\}$
- **1 pt :** $a - b$ **est valeur propre de** A**, toute méthode acceptée** $(\det(A - (a-b)\, I_2) = 0)$
- **1 pt :** $a + b$ **est valeur propre de** A**, toute méthode acceptée** $(\det(A - (a+b)\, I_2) = 0)$

d) On pose $\Delta = \begin{pmatrix} a+b & 0 \\ 0 & a-b \end{pmatrix}$. Déterminer une matrice Q, carrée d'ordre 2 à coefficients réels, inversible et dont les éléments de la première ligne sont égaux à 1, vérifiant $A = Q\Delta Q^{-1}$.

- 1 pt : $a-b$ et $a+b$ sont des valeurs propres distinctes

- 1 pt : $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre de A associé à la valeur propre $a+b$

- 1 pt : $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre de A associé à la valeur propre $a-b$

- 1 pt : la famille $\mathcal{F} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$ est libre car obtenue comme concaténation de deux familles libres de vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes (car $a-b \neq a+b$).

- 1 pt : la famille $\mathcal{F}$ est une base de vecteurs propres car de plus $\mathrm{Card}(\mathcal{F}) = 2 = \dim(\mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{R}))$ et conclusion.

Accorder 5 points pour toute autre méthode juste.

e) Calculer la matrice Q^{-1} et, à l'aide de la question précédente, calculer la matrice A^n pour tout entier naturel non nul n.

- 1 pt : $Q^{-1} = \dfrac{1}{\det(Q)} \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \dfrac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

- 1 pt : $\Delta^n = \begin{pmatrix} (a+b)^n & 0 \\ 0 & (a-b)^n \end{pmatrix}$

- 1 pt : $A^n = \dfrac{1}{2} \begin{pmatrix} (a+b)^n + (a-b)^n & (a+b)^n - (a-b)^n \\ (a-b)^n - (a-b)^n & (a+b)^n + (a-b)^n \end{pmatrix}$

2. Soit p un réel vérifiant $0 < p < 1$ et q le réel $1-p$. On suppose que X et Y sont deux variables aléatoires définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$, indépendantes et suivant la même loi géométrique de paramètre p.

Pour tout ω de Ω, on désigne par $M(\omega)$ la matrice carrée d'ordre 2 : $\begin{pmatrix} X(\omega) & Y(\omega) \\ Y(\omega) & X(\omega) \end{pmatrix}$ et on note $S(\omega)$ (respectivement $D(\omega)$) la plus grande (respectivement la plus petite) valeur propre de $M(\omega)$ et on définit ainsi deux variables aléatoires sur $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$.

a) Montrer que la probabilité de l'événement $[X = Y]$ est donnée par : $\mathbb{P}([X = Y]) = \dfrac{p}{2-p}$.

En déduire la probabilité de l'événement $\{\omega \in \Omega \mid M(\omega) \text{ est inversible}\}$.

- 1 pt : FPT $\mathbb{P}\big([X = Y]\big) = \sum\limits_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}\big([Y = k] \cap [X = Y]\big)$

- 1 pt : indépendance de X et Y citée

- 1 pt : $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} \big((1-p)^2\big)^k = \dfrac{1}{1-(1-p)^2}$ et résultat

- 1 pt : $\{\ \omega \in \Omega \mid M(\omega)$ est inversible $\} = \{\ \omega \in \Omega \mid X(\omega) \neq Y(\omega)\ \} = [X \neq Y] = \overline{[X = Y]}$

- 1 pt :résultat $\mathbb{P}\big(\{\ \omega \in \Omega \mid M(\omega)$ est inversible $\}\big) = 2\,\dfrac{1-p}{2-p}$

b) Calculer la covariance des variables aléatoires S et D.

- 1 pt : $D = X - Y$ et $S = X + Y$ car pour tout ω, $M(\omega)$ admet deux valeurs propres distinctes : $X(\omega) - Y(\omega)$ et $X(\omega) + Y(\omega)$.

- 1 pt : S et D admettent une covariance car chacune admet une variance.

- 1 pt : bilinéarité : $\mathrm{Cov}(S, D) = \mathrm{Cov}(X, X) - \mathrm{Cov}(X, Y) + \mathrm{Cov}(X, Y) - \mathrm{Cov}(Y, Y)$

- 1 pt : $\mathbb{V}(X) - \mathbb{V}(Y) = 0$ car X et Y suivent la même loi

c) Calculer les probabilités $\mathbb{P}([S=2]\cap[D=0])$, $\mathbb{P}([S=2])$ et $\mathbb{P}([D=0])$.
Les variables aléatoires S et D sont-elles indépendantes ?

- **1 pt :** $[S=2]\cap[D=0]=[X=1]\cap[Y=1]$
- **1 pt :** $\mathbb{P}\big([S=2]\cap[D=0]\big)=p^2$ **par indépendance**
- **1 pt :** $[S=2]=[X=1]\cap[Y=1]$
- **1 pt :** $\mathbb{P}\big([S=2]\big)=[X=1]\cap[Y=1]=p^2$
- **1 pt :** $[D=0]=[X=Y]$ **et** $\mathbb{P}\big([D=0]\big)=\dfrac{p}{2-p}$
- **1 pt :** $\mathbb{P}\big([S=2]\cap[D=0]\big)=\mathbb{P}\big([S=2]\big)\times\mathbb{P}\big([D=0]\big) \Leftrightarrow 1=p$ **et** S **et** D **ne sont pas indépendantes.**

d) Établir, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2 : $\mathbb{P}([S=n])=(n-1)\,p^2\,q^{n-2}$.

- **1 pt : FPT** $\mathbb{P}\big([X+Y=n]\big)=\sum\limits_{k=1}^{+\infty}\mathbb{P}\big([Y=k]\cap[X+Y=n]\big)$
- **2 pts :** $\mathbb{P}\big([X+Y=n]\big)=\sum\limits_{k=1}^{n-1}\mathbb{P}\big([Y=k]\cap[X=n-k]\big)$ **(1 pt résultat, 1 pt explication)**
- **1 pt :** $\mathbb{P}([X+Y=n])=(n-1)\ p^2\,(1-p)^{n-2}$

e) En déduire, lorsque p est égal à $\dfrac{2}{21}$, que la valeur la plus probable de la plus grande valeur propre des matrices $M(\omega)$ possibles est 11.

- **1 pt : introduciton de la fonction** $f : x\mapsto (x-1)\,p^2\,(1-p)^{x-2} = (x-1)\,p^2\,\exp\big((x-2)\ \ln(1-p)\big)$
- **1 pt : la fonction** f **atteint son max en** $x_0=1-\dfrac{1}{\ln(1-p)}$
- **2 pts :** $1+\dfrac{1-p}{p} \leqslant 1-\dfrac{1}{\ln(1-p)} \leqslant 1+\dfrac{1}{p}$ **(1 pt par inégalité)**
- **1 pt :** $10<\dfrac{21}{2}\leqslant x_0\leqslant\dfrac{23}{2}<12$
- **1 pt :** $f(10)<f(11)$ **et** $f(11)>f(12)$

Noter généreusement et valoriser toute prise d'initiative.

Problème /106

Partie I – Des exemples /24

Dans cette partie I, on suppose que les variables U_k suivent la loi de Bernoulli de paramètre p, où p est un réel de l'intervalle $]0,1[$.

1. Pour n dans $\mathbb{N}^*$, quelle est la loi de X_n ?

- 1 pt : $X_n \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p)$ (0 si l'indépendance n'est pas citée)

2. Pour tout entier naturel j, établir : $r_j = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}([X_n = j])\, p_n$.

- 1 pt : $([N=n])_{n\in\mathbb{N}}$ SCE

- 1 pt : FPT

- 1 pt : $[N=n] \cap [X=j] = [N=n] \cap [X_n = j]$

- 1 pt : N et X_n indépendantes par lemme des coalitions

3. Dans cette question *3.*, on suppose que N suit la loi binomiale de paramètres m, entier naturel, et π, réel dans $]0,1[$. Soit j un entier naturel.

a) Justifier que $r_j = 0$ si $j > m$.

- 1 pt : $X(\Omega) \subset [\![0,m]\!]$

- 1 pt : si $j > m$, $[X=j] = \varnothing$

b) Établir que pour tout $j \in [\![0,m]\!]$: $r_j = \sum\limits_{n=j}^{m} \binom{n}{j} p^j (1-p)^{n-j} \binom{m}{n} \pi^n (1-\pi)^{m-n}$.

- 1 pt : $([N=n])_{n\in[\![0,m]\!]}$ SCE

- 1 pt : utilisation qst *2.* + découpage somme

- 1 pt : $r_j = \sum\limits_{n=j}^{m} \mathbb{P}([X_n=j])\,\mathbb{P}([N=n])$

- 1 pt : $X_n \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p)$ et $N \hookrightarrow \mathcal{B}(m,\pi)$

c) Vérifier que pour tous entiers j, n, m tels que $0 \leqslant j \leqslant n \leqslant m$: $\binom{n}{j}\binom{m}{n} = \binom{m}{j}\binom{m-j}{n-j}$.

- 2 pts

d) En déduire, pour tout $j \in [\![0,m]\!]$: $r_j = \binom{m}{j} (p\pi)^j \sum\limits_{\ell=0}^{m-j} \binom{m-j}{\ell} \big((1-p)\pi\big)^\ell (1-\pi)^{m-j-\ell}$.

- 1 pt : utilisation *3.b)* et *3.c)* ($r_j = \binom{m}{j} p_j \sum\limits_{n=j}^{m} \binom{m-j}{n-j} (1-p)^{n-j}\pi^n(1-\pi)^{m-n}$)

- 1 pt : décalage d'indice ($r_j = \binom{m}{j} p_j \sum\limits_{\ell=0}^{m-j} \binom{m-j}{\ell} (1-p)^\ell \pi^{\ell+j}(1-\pi)^{m-(\ell+j)}$)

- 1 pt : $r_j = \binom{m}{j} (p\pi)^j \sum\limits_{\ell=0}^{m-j} \binom{m-j}{\ell} \big((1-p)\pi\big)^\ell (1-\pi)^{m-j-\ell}$

e) Montrer finalement que X suit une loi binomiale et préciser ses paramètres en fonction de m, p et π.

- 2 pts (1 pt pour formule du binôme de Newton, 1 pt pour reste du calcul)

4. On suppose dans cette question *4.* que N suit la loi de Poisson de paramètre λ, réel strictement positif.

a) Montrer que pour tout entier naturel j, on a :

$$r_j = \mathrm{e}^{-j} \frac{(\lambda\, p)^j}{j!} \sum_{n=j}^{+\infty} \frac{1}{(n-j)!} \big(\lambda(1-p)\big)^{n-j}$$

- **1 pt :** $r_j = \sum_{n=j}^{+\infty} \mathbb{P}([X_n = j])\, \mathbb{P}([N = n])$
- **2 pts :** $r_j = \mathrm{e}^{-j} \frac{(\lambda\, p)^j}{j!} \sum_{n=j}^{+\infty} \frac{1}{(n-j)!} \big(\lambda(1-p)\big)^{n-j}$

b) En déduire que X suit une loi de Poisson, et préciser son paramètre en fonction de p et λ.

- **3 pts (1 pt pour décalage d'indice, 1 pt pour la série exponentielle de paramètre $\lambda(1-p)$, 1 pt pour $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda\, p)$)**

Partie II – La loi binomiale négative /52

On généralise la définition des coefficients binomiaux aux nombres réels en posant, pour tout y réel et tout entier $k \in \mathbb{N}^*$: $\binom{y}{k} = \frac{1}{k!} \prod_{i=0}^{k-1} (y-i)$, et $\binom{y}{0} = 1$.

5. Écrire une fonction en **Scilab** d'entête `function c = CoeffBin(y, k)` qui calcule $\binom{y}{k}$.

- **5 pts (1 pt pour la structure de fonction, 1 pt pour l'initialisation, 1 pt pour la structure conditionnelle, 2 points pour la structure itérative)**

```
function c = CoeffBin(y, k)
  c = 1
  if k >= 1 then
    for i = 0:(k-1)
      c = c * (y - i) / (i + 1)
    end
  end
endfunction
```

6. *La formule du binôme négatif.*

Soit c un réel strictement positif, et x un réel de $[0,1[$.

Pour tout entier naturel n, on pose $I_n = \displaystyle\int_0^x \frac{(x-t)^n}{(1-t)^{c+n+1}}\, dt$.

On admet le résultat suivant :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \frac{1}{(1-x)^c} \;=\; \sum_{k=0}^{n} \binom{c+k-1}{k} x^k + c\binom{c+n}{n} I_n$$

a) Vérifier que pour tout $t \in [0,x]$: $0 \leqslant \dfrac{x-t}{1-t} \leqslant x$.

En déduire l'encadrement : $0 \leqslant I_n \leqslant \dfrac{x^{n+1}}{(1-x)^{c+1}}$.

- **1 pt :** $0 \leqslant \dfrac{x-t}{1-t} \leqslant x \;\Leftrightarrow\; x \geqslant t \geqslant xt$
- **1 pt :** $xt \leqslant t$ **car** $x \in [0,1[$
- **1 pt :** $0^n \leqslant \left(\dfrac{x-t}{1-t}\right)^n \leqslant x^n$ **par stricte croissance de la fonction** $t \mapsto t^n$ **sur** $[0,+\infty[$
- **1 pt :** $0 \leqslant \dfrac{(x-t)^n}{(1-t)^{n+c+1}} \leqslant \dfrac{x^n}{(1-t)^{c+1}}$ **car** $\dfrac{1}{(1-t)^{c+1}} > 0$
- **1 pt :** $0 \leqslant \dfrac{(x-t)^n}{(1-t)^{n+c+1}} \leqslant \dfrac{x^n}{(1-x)^{c+1}}$ **par stricte croissance de la fonction** $t \mapsto t^{c+1}$ **sur** $[0,+\infty[$
- **1 pt : croissance de l'intégration, les bornes étant dans l'ordre croissant** $(0 \leqslant x)$
- **1 pt :** $\displaystyle\int_0^x \frac{x^n}{(1-x)^{c+1}}\, dt = \frac{x^{n+1}}{(1-x)^{c+1}}$
- **2 pts : cas** $n = 0$

b) (i) Montrer, pour tout n dans $\mathbb{N}^*$: $\displaystyle\binom{c+n}{n} = \prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{c}{k}\right)$.

- **2 pts (1 pt pour changement d'indice** $k = n-i$**, 1 pt pour reste)**

(ii) Montrer que pour tout réel t positif, $\ln(1+t) \leqslant t$.

- **2 pts (1 pt pour concavité de** $t \mapsto \ln(1+t)$ **sur** $[0,+\infty[$**, 1 pt pour équation de tangente en** 0**)**

(iii) Établir, pour tout entier naturel $k \geqslant 2$: $\dfrac{1}{k} \leqslant \ln(k) - \ln(k-1)$.

En déduire : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \leqslant 1 + \ln(n)$.

- **2 pts : (1 pt pour** $\dfrac{1}{k} \leqslant \ln(k) - \ln(k-1) \;\Leftrightarrow\; \dfrac{1}{k} \leqslant \ln(k) - \ln(k-1)$**, 1 pt pour** $k \geqslant 2 \Rightarrow -\dfrac{1}{k} \in\,]-1,+\infty[$**)** OU **(comparaison série-intégrale)** OU **(IAF)**
- **2 pts :** $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \leqslant 1 + \ln(n)$ **(1 pt pour sommation de** 2 **à** n**, 1 pt pour ajouter** 1**)**

(iv) Montrer que pour tout n dans $\mathbb{N}^*$: $\ln\left(\binom{c+n}{n}\right) \leqslant c\,(1+\ln(n))$.

En déduire : $\lim\limits_{n\to+\infty} \binom{c+n}{n} x^{n+1} = 0$.

- **1 pt :** $\ln\left(\binom{c+n}{n}\right) = \sum\limits_{k=1}^{n} \ln\left(1+\dfrac{c}{k}\right)$ **(*6.b)(i)*)**
- **1 pt :** $\sum\limits_{k=1}^{n} \ln\left(1+\dfrac{c}{k}\right) \leqslant c \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k}$ **(*6.b)(ii)*)**
- **1 pt :** $c \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k} \leqslant c(1+\ln(n))$ **(*6.b)(iii)*)**
- **1 pt :** $\binom{c+n}{n} \leqslant \exp\big(c(1+\ln(n))\big)$ **(croissance de** $\exp$ **sur** $\mathbb{R}$**)**
- **1 pt :** $\exp(c+c\,\ln(n))\,x^{n+1} = \exp\left(n\,\ln(x)\left(\dfrac{c+\ln(x)}{n\,\ln(x)} + \dfrac{c\,\ln(n)}{n\,\ln(x)} + 1\right)\right)$
- **1 pt :** $\lim\limits_{n\to+\infty} \exp\left(n\,\ln(x)\left(\dfrac{c+\ln(x)}{n\,\ln(x)} + \dfrac{c\,\ln(n)}{n\,\ln(x)} + 1\right)\right) = 0$
- **1 pt :** $\lim\limits_{n\to+\infty} \binom{c+n}{n} x^{n+1} = 0$ **par théorème d'encadrement**

c) En conclure que la série $\sum\limits_{k\geqslant 0} \binom{c+k-1}{k} x^k$ est convergente, et établir la formule du binôme négatif :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \binom{c+k-1}{k} x^k = \frac{1}{(1-x)^c}$$

- **1 pt :** $0 \leqslant c\binom{c+n}{n} I_n \leqslant \dfrac{c}{(1-x)^{c+1}} \binom{c+n}{n} x^{n+1}$ **(*6.a)*)**
- **1 pt :** $\lim\limits_{n\to+\infty} c\binom{c+n}{n} I_n = 0$ **par théorème d'encadrement (*6.b)*)**
- **1 pt :** $\sum\limits_{k\geqslant 0} \binom{c+k-1}{k} x^k$ **converge et :** $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} \binom{c+k-1}{k} x^k = \dfrac{1}{(1-x)^c}$ **(avec égalité de l'énoncé)**

7. Soit p un réel de $]0,1[$ et r un réel strictement positif. Montrer que la suite de nombres $(p_k)_{k\in\mathbb{N}}$ définie par $p_k = \binom{r+k-1}{k} (1-p)^k\,p^r$ définit une loi de probabilité d'une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$. On l'appelle *loi binomiale négative* de paramètres r et p.

- **1 pt :** $\forall k \in \mathbb{N}$, $p_k \geqslant 0$
- **2 pts :** $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} p_k = 1$ **(1 pt pour application de la question précédente à** $c = r$ **et** $x = 1-p$**, 1 pt pour le reste)**

8. Si Y est une variable aléatoire suivant la loi binomiale négative de paramètres 1 et p, reconnaître la loi de $Y+1$.

- **1 pt :** $(Y+1)(\Omega) = \mathbb{N}^*$
- **1 pt :** $\mathbb{P}([Y+1=k]) = p_{k-1} = (1-p)^{k-1}\,p$
- **1 pt :** $Y \hookrightarrow \mathcal{G}\,(p)$

9. *Espérance et variance.*
Soit Z une variable aléatoire suivant la loi binomiale négative de paramètres r réel strictement positif et $p \in \,]0,1[$.

a) Montrer que pour tout entier $k \geqslant 1$: $k \dbinom{r+k-1}{k} = r \dbinom{r+k-1}{k-1}$.

- 2 pts

b) Montrer que Z admet une espérance et que l'on a : $\mathbb{E}(Z) = \dfrac{r(1-p)}{p}$.

- 1 pt : Z admet une espérance si et seulement si la série $\sum\limits_{n \geqslant 0} n\, \mathbb{P}([Z=n])$ est absolument convergente. Cette série étant à termes positifs, cela revient à démontrer qu'elle est convergente

- 1 pt : $\sum\limits_{k=0}^{n} k\, \mathbb{P}([Z=k]) = r\ \dfrac{1-p}{p} \sum\limits_{k=0}^{n-1} \dbinom{(r+1)+k-1}{k} (1-p)^k\, p^{r+1}$

- 2 pts : $r\ \dfrac{1-p}{p} \sum\limits_{k=0}^{n-1} \dbinom{(r+1)+k-1}{k} (1-p)^k\, p^{r+1} = r\ \dfrac{1-p}{p} \sum\limits_{k=0}^{n-1} \mathbb{P}([W=k])$ **(où W suit la loi binomiale négative de paramètres $r+1$ et p)**

- 1 pt : $([W=k])_{k\in\mathbb{N}}$ **SCE, donc** $\sum\limits_{n\geqslant 0} \mathbb{P}([W=n])$ **converge et sa somme vaut** 1

- 1 pt : Z admet une espérance et $\mathbb{E}(Z) = r\ \dfrac{1-p}{p}$

c) Montrer que Z admet une variance et que l'on a : $\mathbb{V}(Z) = \dfrac{r(1-p)}{p^2}$.
On pourra commencer par calculer l'espérance de $Z(Z-1)$.

- 1 pt : $Z(Z-1)$ admet une espérance si et seulement si la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} n(n-1)\, \mathbb{P}([Z=n])$ est absolument convergente. Cette série étant à termes positifs, cela revient à démontrer qu'elle est convergente.

- 3 pts : $\sum\limits_{k=0}^{n} k(k-1)\, \mathbb{P}([Z=k]) = r\ \dfrac{1-p}{p} \sum\limits_{k=0}^{n-1} k\, \mathbb{P}([W=k])$ **(où W suit la loi binomiale négative de paramètres $r+1$ et p)**

- 1 pt : W admet une espérance et $\mathbb{E}(W) = (r+1)\ \dfrac{1-p}{p}$

- 1 pt : $Z(Z-1)$ admet une espérance et $\mathbb{E}\big(Z(Z-1)\big) = (r+1)r\ \left(\dfrac{1-p}{p}\right)^2$

- 1 pt : $Z^2 = Z(Z-1) + Z$ **donc Z^2 admet une espérance**

- 1 pt : $\mathbb{E}(Z^2) = (r+1)r\ \left(\dfrac{1-p}{p}\right)^2 + r\ \dfrac{1-p}{p}$

- 1 pt : formule de Koenig-Huygens

- 1 pt : $\mathbb{V}(Z) = r\ \dfrac{1-p}{p^2}$

Partie III – Les lois de Panjer /30

On reprend les notations du début du problème : la variable aléatoire N à valeurs dans $\mathbb{N}$ a sa loi donnée par $p_k = \mathbb{P}([N = k])$ pour $k \in \mathbb{N}$.
On suppose dans toute la suite du sujet que la loi de N vérifie la relation de Panjer : il existe deux réels a et b, avec $a < 1$ et $a + b > 0$, tels que :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad p_k = \left(a + \frac{b}{k}\right) p_{k-1}$$

On dira alors que N suit la loi $\mathcal{P}(a, b)$.

10. *Détermination des lois de Panjer.*

a) Montrer que pour tout entier k strictement positif, on a : $p_k = p_0 \prod\limits_{i=1}^{k} \left(a + \frac{b}{i}\right)$.

- 1 pt : initialisation

- 2 pts : hérédité

b) Dans cette question, on suppose que $a = 0$.
Montrer que N suit une loi de Poisson de paramètre b.

- 1 pt : $p_k = p_0 \dfrac{b^k}{k!}$

- 1 pt : FPT : $1 = p_0 + \sum\limits_{k=1}^{+\infty} p_k$

- 1 pt : série exponentielle $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} p_k = p_0 \left(\mathrm{e}^b - 1\right)$

- 1 pt : $p_0 = \mathrm{e}^{-b}$ **et** $N \hookrightarrow \mathcal{P}(b)$

c) Dans cette question, on suppose que $a < 0$.

(i) Montrer qu'il existe un unique entier naturel r, tel que : $\forall k > r$, $p_k = 0$ et $\forall k \leqslant r$, $p_k \neq 0$.
On pourra raisonner par l'absurde, et supposer les p_k tous strictement positifs.

- 2 pts : le choix de $k_0 = \left\lceil -\dfrac{b}{a} - 1 \right\rceil$ **permet d'obtenir** $p_{k_0} < 0$

- 2 pts : $r = s - 1$ **où** $s = \min\ (\{i \in \mathbb{N} \mid p_i = 0\})$

Noter généreusement et valoriser toute prise d'initiative.

(ii) Montrer : $b = -a(r + 1)$.

- 1 pt : $p_{r+1} = \left(a + \dfrac{b}{r+1}\right) p_r = 0$

- 1 pt : conclusion $b = -a(r + 1)$

(iii) Établir que pour tout $k \in [\![0, r]\!]$, $p_k = (-a)^k \dbinom{r}{k} p_0$.
En déduire que $p_0 = \dfrac{1}{(1 - a)^r}$.

- 1 pt : pour tout $k \in [\![1, r]\!]$**,** $p_k = p_0\ (-a)^k\ \binom{r}{k}$ **par calcul**

- 1 pt : cas $k = 0$

- 1 pt : $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}([N = k]) = 1$

- 1 pt : reste du calcul et conclusion $p_0 = \dfrac{1}{(1 - a)^r}$

(iv) En conclure que N suit une loi binomiale et préciser les paramètres en fonction de a et b.

- **1 pt : pour tout $k \in [\![0, r]\!]$, $\mathbb{P}([N = k]) = \binom{r}{k} \left(-\dfrac{a}{1-a}\right)^k \left(\dfrac{1}{1-a}\right)^{r-k}$**
- **1 pt : si $k \geqslant r+1$, $\mathbb{P}([N = k]) = 0$**
- **1 pt : finalement : $N \hookrightarrow \mathcal{B}\left(-\dfrac{b}{a} - 1, -\dfrac{a}{1-a}\right)$**

d) Dans cette question, on suppose que $a > 0$.

(i) Montrer que pour tout entier naturel k, on a : $p_k = \binom{\frac{b}{a}+k}{k} a^k \, p_0$.

- **2 pts : calcul**

(ii) En déduire que N suit une loi binomiale négative et préciser ses paramètres en fonction de a et b.

- **1 pt : $1 = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}([N = k]) \ = \ \sum\limits_{k=0}^{+\infty} p_k$**
- **1 pt : $p_0 = (1-a)^{\frac{b}{a}+1}$**
- **1 pt : N suit la loi binomiale négative de paramètres $\dfrac{b}{a} + 1$ et $1-a$ (car $p_k = \binom{(\frac{b}{a}+1)+k-1}{k} a^k$)**

11. Montrer que, dans tous les cas, N admet une espérance et une variance, et qu'elles sont données par : $\mathbb{E}(N) = \dfrac{a+b}{1-a}$ et $\mathbb{V}(N) = \dfrac{a+b}{(1-a)^2}$.

- **1 pt : cas $a = 0$: $N \hookrightarrow \mathcal{P}(b)$ et $\mathbb{E}(N) = b = \dfrac{0+b}{1-0}$ et $\mathbb{V}(N) = b = \dfrac{0+b}{(1-0)^2}$**
- **1 pt : cas $a < 0$: $N \hookrightarrow \mathcal{B}\left(-\dfrac{b}{a} - 1, -\dfrac{a}{1-a}\right)$ donc la v.a.r. N admet donc une espérance et une variance**
- **1 pt : cas $a < 0$: $\mathbb{E}(N) = \dfrac{a+b}{1-a}$ et $\mathbb{V}(N) = \dfrac{a+b}{(1-a)^2}$**
- **1 pt : cas $a > 0$: N suit une loi binomiale négative de paramètres $\dfrac{b}{a} + 1$ et $1-a$ donc admet une espérance et une variance**
- **1 pt : $\mathbb{E}(N) = \dfrac{a+b}{1-a}$ et $\mathbb{V}(N) = \dfrac{a+b}{(1-a)^2}$**