DS3 (version B)

Exercice I (HEC 2002)

Le but de cet exercice est la résolution de l'équation matricielle $AM = MB$, d'inconnue M, dans l'espace vectoriel E des matrices carrées d'ordre 2 à coefficients réels.
On rappelle que si U_1, U_2, U_3, U_4 sont les matrices définies par :

$$U_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad U_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad U_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad U_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

la famille (U_1, U_2, U_3, U_4) est une base de E, qui est donc de dimension 4. Si A et B sont deux matrices de E, l'ensemble des matrices M de E vérifiant $AM = MB$ est noté $V_{A,B}$.

1. Soient A et B deux matrices de E et $\varphi_{A,B}$ l'application qui, à toute matrice M de E, associe la matrice $AM - MB$.

a) Montrer que $\varphi_{A,B}$ est un endomorphisme de E et en déduire que $V_{A,B}$ est un sous-espace vectoriel de E.

Démonstration.
D'après l'énoncé, $E = \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ et $\varphi_{A,B} : M \mapsto AM - MB$.

- Démontrons tout d'abord que $\varphi_{A,B}$ est à valeurs dans E.
  Soit $M \in E$. Alors $\varphi_{A,B}(M) = AM - MB \in E$.
- Démontrons maintenant que f est une application linéaire.
  Soit $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ et soit $(M, N) \in E^2$. Alors :

$$\begin{array}{rcl} \varphi_{A,B}(\lambda \cdot M + \mu \cdot N) & = & A(\lambda \cdot M + \mu \cdot N) - (\lambda \cdot M + \mu \cdot N)B \\ & = & \lambda \cdot AM + \mu \cdot AN - \lambda \cdot MB - \mu \cdot NB \\ & = & \lambda \cdot (AM - MB) + \mu \cdot (AN - NB) \\ & = & \lambda \cdot \varphi_{A,B}(M) + \mu \cdot \varphi_{A,B}(N) \end{array}$$

$$\boxed{\text{Ainsi, } \varphi \text{ est un endomorphisme de } E.}$$

- Enfin :

$$\begin{array}{rcl} V_{A,B} & = & \{M \in E \mid AM - MB = 0\} \\ & = & \{M \in E \mid \varphi_{A,B}(M) = 0\} \\ & = & \mathrm{Ker}(\varphi_{A,B}) \end{array}$$

$$\boxed{\text{Ainsi, } V_{A,B} \text{ est un espace vectoriel car c'est le noyau d'un endomorphisme.}}$$

□

b) Dans le cas particulier où $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, construire la matrice carrée d'ordre 4 qui représente $\varphi_{A,B}$ dans la base $(U_1,\, U_2,\, U_3,\, U_4)$.
Montrer que cette matrice est inversible et en déduire l'ensemble $V_{A,B}$.

Démonstration.

- $$\begin{array}{rcl} \varphi_{A,B}(U_1) & = & AU_1 - U_1B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \\ & = & \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \\ & = & 2 \cdot U_1 + 0 \cdot U_2 - 1 \cdot U_3 + 0 \cdot U_4 \end{array}$$
  Ainsi : $\mathrm{Mat}_{(U_1,U_2,U_3,U_4)}\Big(\varphi_{A,B}(U_1)\Big) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

- $$\begin{array}{rcl} \varphi_{A,B}(U_2) & = & AU_2 - U_2B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \\ & = & \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \\ & = & -2 \cdot U_1 + 0 \cdot U_2 + 0 \cdot U_3 - 1 \cdot U_4 \end{array}$$
  Donc $\mathrm{Mat}_{(U_1,U_2,U_3,U_4)}\Big(\varphi_{A,B}(U_2)\Big) = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$.

- $$\begin{array}{rcl} \varphi_{A,B}(U_3) & = & AU_3 - U_3B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \\ & = & \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \\ & = & -1 \cdot U_1 + 0 \cdot U_2 + 2 \cdot U_3 + 0 \cdot U_4 \end{array}$$
  Ainsi : $\mathrm{Mat}_{(U_1,U_2,U_3,U_4)}\Big(\varphi_{A,B}(U_3)\Big) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$.

- $$\begin{array}{rcl} \varphi_{A,B}(U_4) & = & AU_4 - U_4B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \\ & = & \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \\ & = & 0 \cdot U_1 - 1 \cdot U_2 - 2 \cdot U_3 + 0 \cdot U_4 \end{array}$$
  Donc $\mathrm{Mat}_{U_1,U_2,U_3,U_4}\Big(\varphi_{A,B}(U_4)\Big) = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$.

$$\boxed{\text{On en déduit que : } \mathrm{Mat}_{(U_1,U_2,U_3,U_4)}(\varphi_{A,B}) = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.}$$

- Notons C cette matrice et déterminons son rang.

$$\begin{aligned}
\mathrm{rg}(C) \quad &= \quad \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right) \\
&\overset{L_1 \leftrightarrow L_3}{=} \quad \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 2 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right) \\
&\overset{L_3 \leftarrow L_3 + 2\,L_1}{=} \quad \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 3 & -4 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right) \\
&\overset{L_2 \leftrightarrow L_4}{=} \quad \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 3 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}\right) \\
&\overset{L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2}{=} \quad \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}\right) \quad = \quad 4
\end{aligned}$$

- En effet, la réduite obtenue est **triangulaire** supérieure et à cœfficients diagonaux non nuls. Elle est donc inversible et de rang 4.

$$\boxed{\text{La matrice } C\text{, est elle-même d'ordre 4 et de rang 4. Elle est donc inversible.}}$$

- On en déduit que l'endomorphisme $\varphi_{A,B}$ est un isomorphisme.
En particulier $\varphi_{A,B}$ est injective. Or : $V_{A,B} = \mathrm{Ker}(\varphi_{A,B})$.

$$\boxed{\text{On en déduit que } V_{A,B} = \{0_E\}.}$$

$\square$

2. Dans cette question, r et s désignent deux réels distincts et différents de 1, et on pose :

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \Delta = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & s \end{pmatrix}$$

a) Soit $M = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$ une matrice quelconque de E. Donner des conditions nécessaires et suffisantes sur x, y, z, t pour que M appartienne à $V_{D,\Delta}$.

Démonstration.

$$\begin{array}{rcl} M \in V_{D,\Delta} & \Leftrightarrow & DM - M\Delta = 0 \\ & \Leftrightarrow & \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & s \end{pmatrix} \\ & \Leftrightarrow & \begin{pmatrix} x & y \\ rz & rt \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & sy \\ z & st \end{pmatrix} \\ & \Leftrightarrow & \left\{ \begin{array}{rcl} x & = & x \\ y & = & sy \\ rz & = & z \\ rt & = & st \end{array} \right. \\ & \Leftrightarrow & \left\{ \begin{array}{rcl} (1-s)\ y & = & 0 \\ (r-1)\ z & = & 0 \\ (r-s)\ t & = & 0 \end{array} \right. \\ & \Leftrightarrow & \left\{ \begin{array}{lcl} s = 1 & \texttt{OU} & y = 0 \\ r = 1 & \texttt{OU} & z = 0 \\ r = s & \texttt{OU} & t = 0 \end{array} \right. \\ & \Leftrightarrow & \left\{ \begin{array}{l} y = 0 \\ z = 0 \\ t = 0 \end{array} \right. \qquad \textit{(car on a supposé } s \neq 1, \ r \neq 1 \textit{ et } r \neq s\textit{)} \end{array}$$

$$\boxed{M \in V_{D,\Delta} \ \Leftrightarrow \ y = z = t = 0}$$

□

b) En déduire une base de $V_{D,\Delta}$.

Démonstration.

- Remarquons tout d'abord que :

$$\begin{array}{rcl} V_{D,\Delta} & = & \{\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \mid y = z = t = 0\} \\ & = & \{\begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \mid x \in \mathbb{R}\} \ = \ \{x \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \mid x \in \mathbb{R}\} \\ & = & \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) \ = \ \text{Vect}\,(U_1) \end{array}$$

- La famille (U_1) est :
  × est génératrice de $V_{D,\Delta}$.
  × est libre car uniquement constituée d'un vecteur non nul.

$$\boxed{\text{Ainsi, } (U_1) \text{ est une base de } V_{D,\Delta}.}$$

□

3. Soit a, b, c, d des réels non nuls vérifiant $a - b \neq c - d$, $a - b \neq 1$, $c - d \neq 1$, A et B les matrices définies par :

$$A = \begin{pmatrix} a & 1-a \\ b & 1-b \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} c & 1-c \\ d & 1-d \end{pmatrix}$$

a) Montrer que les valeurs propres de A sont 1 et $a - b$.
En déduire qu'il existe une matrice inversible P de E, et une matrice D égale à celle de la question 2 pour une valeur convenable de r, telles que l'on ait : $D = P^{-1}AP$.

Démonstration.

- Démontrons que 1 est valeur propre de A.

$$\det(A - I_2) \ = \ \det\left(\begin{pmatrix} a-1 & 1-a \\ b & -b \end{pmatrix}\right) \ = \ -b\,(a-1) - b\,(1-a) \ = \ 0$$

$$\boxed{\text{La matrice } A - I_2 \text{ n'est pas inversible. On en déduit que 1 est valeur propre de } A.}$$

- Démontrons que $a - b$ est valeur propre de A.

$$\begin{aligned} \det(A - (a-b)\ I_2) \ &= \ \det\left(\begin{pmatrix} a-(a-b) & 1-a \\ b & (1-b)-(a-b) \end{pmatrix}\right) \\ &= \ \det\left(\begin{pmatrix} b & 1-a \\ b & 1-a \end{pmatrix}\right) \ = \ b\,(1-a) - b\,(1-a) \ = \ 0 \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{La matrice } A - (a-b)\ I_2 \text{ n'est pas inversible. On en déduit que } a-b \text{ est valeur propre de } A.}$$

- Ces deux valeurs propres sont distinctes car $a - b \neq 1$.
La matrice A est (carrée) d'ordre 2 et possède deux valeurs propres distinctes.
Elle est donc diagonalisable.

$$\boxed{\text{On en déduit qu'il existe } P \text{ inversible telle que : } A = PDP^{-1} \ \text{ où } \ D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & a-b \end{pmatrix}.}$$

Commentaire

- L'énoncé ne demandait pas clairement de déterminer la matrice P mais simplement de démontrer son existence. Rappelons que la matrice P est constituée d'une base de vecteurs propres, ces vecteurs apparaissant dans l'ordre d'apparition des valeurs propres dans A.
- Effectuons ce calcul pour rappeler la méthode.
Ici, $A - I_2 = \begin{pmatrix} a-1 & 1-a \\ b & -b \end{pmatrix}$. Or : $\begin{pmatrix} a-1 & 1-a \\ b & -b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.
(on détermine ce vecteur en remarquant que les colonnes de $A - I_2$ sont opposées)
Ainsi $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre associé à la valeur propre 1.
De même, $A - (a-b)\ I_2 = \begin{pmatrix} b & 1-a \\ b & 1-a \end{pmatrix}$. Or : $\begin{pmatrix} b & 1-a \\ b & 1-a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a-1 \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.
(on détermine ce vecteur en remarquant que les colonnes de $A - (a-b)\ I_2$ sont colinéaires)
Ainsi $\begin{pmatrix} a-1 \\ b \end{pmatrix}$ est un vecteur propre associé à la valeur propre $a - b$.
Ainsi, $P = \begin{pmatrix} 1 & a-1 \\ 1 & b \end{pmatrix}$ et, à l'aide de la formule d'inversion des matrices carrées d'ordre 2 :

$$P^{-1} = \frac{1}{b-(a-1)} \begin{pmatrix} b & 1-a \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

□

b) Justifier de même l'existence d'une matrice inversible Q de E, et d'une matrice Δ égale à celle de la question 2 pour une valeur convenable de s, telles que l'on ait : $\Delta = Q^{-1}BQ$.

Démonstration.

- À renommage des variables près, cette question est la même que la précédente.
  On en déduit que 1 et $c-d$ sont valeurs propres de B.
- Ces deux valeurs propres sont distinctes car $c-d \neq 1$.
  La matrice B est (carrée) d'ordre 2 et possède deux valeurs propres distinctes.
  Elle est donc diagonalisable.

$$\boxed{\text{On en déduit qu'il existe } Q \text{ inversible telle que : } B = Q\Delta Q^{-1} \quad \text{où} \quad \Delta = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & c-d \end{pmatrix}.}$$

Commentaire

- Comme dans la question précédente, l'énoncé ne demandait pas clairement de déterminer la matrice Q mais simplement de démontrer son existence.
- Cette question étant la même que la précédente à renommage près des variables, on obtient $Q = \begin{pmatrix} 1 & c-1 \\ 1 & d \end{pmatrix}$ et $Q^{-1} = \dfrac{1}{d-(c-1)} \begin{pmatrix} d & 1-c \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

□

c) Pour toute matrice M de E, montrer qu'elle appartient à $V_{A,B}$ si et seulement si la matrice $P^{-1}MQ$ appartient à $V_{D,\Delta}$. En déduire une base de $V_{A,B}$.

Démonstration.
Soit $M \in E$.

$$\begin{array}{rcll}
M \in V_{A,B} & \Leftrightarrow & AM - MB = 0 & \\
& \Leftrightarrow & AM = MB & \\
& \Leftrightarrow & PDP^{-1}M = MQ\Delta Q^{-1} & \textit{(d'après les questions précédentes)} \\
& \Leftrightarrow & P^{-1}(PDP^{-1}M)Q = P^{-1}(MQ\Delta Q^{-1})Q & \\
& \Leftrightarrow & DP^{-1}MQ = P^{-1}MQ\Delta & \\
& \Leftrightarrow & D(P^{-1}MQ) - (P^{-1}MQ)\Delta = 0 & \\
& \Leftrightarrow & P^{-1}MQ \in V_{D,\Delta} & \\
& \Leftrightarrow & \exists \alpha \in \mathbb{R},\ P^{-1}MQ = \alpha \cdot U_1 & \textit{(car } V_{D,\Delta} = \mathrm{Vect}\,(U_1)\textit{)} \\
& \Leftrightarrow & \exists \alpha \in \mathbb{R},\ M = \alpha \cdot PU_1Q^{-1} & \\
& \Leftrightarrow & M \in \mathrm{Vect}\left(PU_1Q^{-1}\right) &
\end{array}$$

On en déduit que $V_{A,B} = \mathrm{Vect}\left(PU_1Q^{-1}\right)$.
La famille (PU_1Q^{-1}) est :

× génératrice de $V_{A,B}$.

× libre car uniquement constituée d'un vecteur non nul. En effet, comme $U_1 \neq 0_E$ et que P et Q^{-1} sont inversibles, alors $PU_1Q^{-1} \neq 0_E$.

$$\boxed{\text{Ainsi, } (PU_1Q^{-1}) \text{ est une base de } V_{A,B}.}$$

□

4. Dans cette question r, s et u, v désignent quatre réels vérifiant $r \neq s$, $r \neq v$, $u \neq s$, $u \neq v$, et on pose :

$$D = \begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & r \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \Delta = \begin{pmatrix} v & 0 \\ 0 & s \end{pmatrix}$$

a) Par une méthode analogue à celle de la question 2, déterminer $V_{D,\Delta}$.

Démonstration.
Soit $M \in E$.

$$\begin{array}{rcl} M \in V_{D,\Delta} & \Leftrightarrow & DM - M\Delta = 0 \\ & \Leftrightarrow & \begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v & 0 \\ 0 & s \end{pmatrix} \\ & \Leftrightarrow & \begin{pmatrix} ux & uy \\ rz & rt \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} xv & sy \\ zv & st \end{pmatrix} \\ & \Leftrightarrow & \left\{ \begin{array}{rcl} ux & = & vx \\ uy & = & sy \\ rz & = & vz \\ rt & = & st \end{array} \right. \\ & \Leftrightarrow & \left\{ \begin{array}{rcl} (u-v)\ x & = & 0 \\ (u-s)\ y & = & 0 \\ (r-v)\ z & = & 0 \\ (r-s)\ t & = & 0 \end{array} \right. \\ & \Leftrightarrow & \left\{ \begin{array}{lcl} u = v & \texttt{OU} & x = 0 \\ u = s & \texttt{OU} & y = 0 \\ r = v & \texttt{OU} & z = 0 \\ r = s & \texttt{OU} & t = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 0 \\ y = 0 \\ z = 0 \\ t = 0 \end{array} \right. \quad \textit{(car on a supposé } u \neq v, \\ & & \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad u \neq s,\ r \neq v,\ r \neq s\textit{)} \end{array}$$

$$\boxed{\text{On en déduit que : } V_{D,\Delta} = \{\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \mid x = y = z = t = 0\} = \{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\} = \{0_E\}.}$$

□

b) En déduire, par une méthode analogue à celle de la question 3, le sous-espace vectoriel $V_{A,B}$ dans le cas où A et B sont deux matrices diagonalisables n'ayant aucune valeur propre commune.

Démonstration.

- Supposons que A est diagonalisable. Alors, il existe P inversible telle que :

$$A = PDP^{-1} \quad \text{où} \quad D = \begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & r \end{pmatrix}$$

(éventuellement $u = r$)

- Supposons que B est diagonalisable. Alors, il existe Q inversible telle que :

$$B = Q\Delta Q^{-1} \quad \text{où} \quad \Delta = \begin{pmatrix} v & 0 \\ 0 & s \end{pmatrix}$$

*(éventuellement $v = s$ mais d'après l'énoncé, v et s sont différents de u et r, ce qui correspond aux hypothèses de la question **3**.)*

- En raisonnant comme dans la question ***3.***, on obtient :

$$\begin{aligned} M \in V_{A,B} &\Leftrightarrow P^{-1}MQ \in V_{D,\Delta} \\ &\Leftrightarrow P^{-1}MQ = 0 && \textit{(car } V_{D,\Delta} = \{0\} \textit{ en appliquant le résultat de la question } \textbf{\textit{3.}}\textit{)} \\ &\Leftrightarrow M = 0 \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Ainsi, sous les hypothèses de l'énoncé, } V_{A,B} = \{0\}.}$$

□

Commentaire

- On a étudié dans cet exercice les solutions de l'équation matricielle $AM = MB$.
  La dimension de l'espace vectoriel des solutions peut être déterminée de manière exacte. Ce résultat est connu sous le nom de théorème de Cecioni-Frobenius (pour des matrices $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$).
- Lorsque $A = B$, l'exercice consiste à chercher l'ensemble des matrices telles que : $AM = MA$, autrement dit l'ensemble des matrices qui commutent avec A.
  Cet ensemble est appelé le commutant de la matrice A.
- L'étude du commutant peut donner lieu à des sujets de concours. Dans ce cas, il faut s'attendre à des questions proches de celles développées dans cet exercice : l'étude est réalisée pour des matrices carrées d'ordre 2 ou 3 ; on commence par remarquer que le commutant de A est le noyau de l'endomorphisme $\varphi : M \mapsto AM - MA$; on étudie (éventuellement) le cas particulier des matrices diagonalisables ; on étudie (éventuellement) le cas particulier des matrices nilpotentes ...
- De manière plus générale, il est fréquent de tomber sur l'étude d'endomorphisme définie sur un espace de matrice. C'était par exemple le cas du sujet `EML 2014` où l'on étudiait l'endomorphisme $\varphi : M \mapsto TMT$.

Exercice 2 (`EML 2018 voie S`)

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2.
On note $E = \mathbb{R}_n[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à n, et $\mathscr{B} = (1, X, \ldots, X^n)$ la base canonique de E.
On note, pour tout polynôme P de E :

$$\varphi(P) = \frac{1}{n} X(1-X)P' + XP'$$

Partie I : Étude d'un endomorphisme de polynômes

1. a) Montrer que φ est une application linéaire.

Démonstration.
Soit $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$. Soit $(P_1, P_2) \in E^2$.

$$\begin{array}{rl} & \big(\varphi(\lambda \cdot P_1 + \lambda_2 \cdot P_2)\big)(X) \\ = & \dfrac{1}{n}\ X(1-X)(\lambda_1 \cdot P_1 + \lambda_2 \cdot P_2)'(X) + X(\lambda_1 \cdot P_1 + \lambda_2 \cdot P_2)(X) \\ = & \dfrac{1}{n}\ X(1-X)\big(\lambda_1 \cdot P_1'(X) + \lambda_2 \cdot P_2'(X)\big) + \lambda_1 \cdot X\, P_1(X) + \lambda_2 \cdot X\, P_2(X) \\ = & \lambda_1 \cdot \left(\dfrac{1}{n}\ X(1-X)P_1'(X) + X\, P_1(X)\right) + \lambda_2 \cdot \left(\dfrac{1}{n}\ X(1-X)P_2'(X) + X\, P_2(X)\right) \\ = & \lambda_1 \cdot \big(\varphi(P_1)\big)(X) + \lambda_2 \cdot \big(\varphi(P_2)\big)(X) \end{array}$$

(par linéarité de la dérivation)

$$\boxed{\text{On en déduit que l'application } \varphi \text{ est linéaire.}}$$

□

b) Calculer $\varphi(X^n)$.

Démonstration.
Pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, on note $Q_k(X) = X^k$, et donc $Q_k'(X) = kX^{k-1}$.

$$\begin{array}{rcl} \big(\varphi(Q_n)\big)(X) & = & \dfrac{1}{\cancel{n}}\ X(1-X)\ \cancel{n}\, X^{n-1} + X\ X^n \\ & = & X^n(1-X) + X^{n+1} \\ & = & X^n - \cancel{X^{n+1}} + \cancel{X^{n+1}} \\ & = & X^n \ = \ Q_n(X) \end{array}$$

$$\boxed{\varphi(Q_n) \ = \ Q_n}$$

Commentaire

On remarque alors que le polynôme Q_n est vecteur propre de φ associé à la valeur propre 1.

□

c) Montrer que φ est un endomorphisme de E.

Démonstration.

- On sait déjà d'après la question ***1.*** tel que φ est une application linéaire.
- Montrons : $\forall P \in E$, $\varphi(P) \in E$.
  Soit $P \in E$. Alors il existe $(a_0, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ tel que :
  $$P(X) \ = \ \sum_{k=0}^{n} a_k \ X^k \ = \ \sum_{k=0}^{n} a_k \ Q_k(X)$$
  × Comme φ est linéaire : $\varphi(P) \ = \ \varphi\left(\sum\limits_{k=0}^{n} a_k \ Q_k\right) \ = \ \sum\limits_{k=0}^{n} a_k \ \varphi(Q_k)$.
  On en déduit : $\deg\big(\varphi(P)\big) \ \leqslant \ \max\Big(\deg\big(\varphi(Q_0), \dots \varphi(Q_n)\big)\Big)$.
  × Soit $k \in [\![0, n-1]\!]$. Par définition :
  $$\big(\varphi(Q_k)\big)(X) = \frac{1}{n} \ X(1-X)Q_k'(X) + XQ_k(X)$$
  Ainsi :
  $$\begin{aligned}\deg\Big(\big(\varphi(Q_k)\big)(X)\Big) \ &= \ \deg\left(\frac{1}{n} \ X(1-X)Q_k'(X) + XQ_k(X)\right) \\ &\leqslant \ \max\left(\deg\left(\frac{1}{n} \ X(1-X)Q_k'(X)\right), \deg\Big(XQ_k(X)\Big)\right) \\ &= \ \max\Big(k+1, k+1\Big) \ = \ k+1\end{aligned}$$
  (on peut aussi calculer : $\big(\varphi(Q_k)\big)(X) = \dfrac{k}{n} \ X^k + \dfrac{n-k}{n} \ X^{k+1}$*)*
  On en déduit en particulier : $\forall k \in [\![0, n-1]\!]$, $\deg(\varphi(Q_k)) \leqslant k+1 \leqslant n$.
  × De plus, d'après la question précédente : $\deg(\varphi(Q_n)) = n$
  Finalement, on obtient : $\deg(P) \leqslant n$. Autrement dit : $\varphi(P) \in E$.

$$\boxed{\text{On en déduit que } \varphi \text{ est un endomorphisme de } E.}$$

□

2. On pose, pour tout k de $[\![0, n]\!]$: $P_k = X^k(1-X)^{n-k}$.

a) Pour tout k de $[\![0, n]\!]$, calculer $\varphi(P_k)$.

Démonstration.
Soit $k \in [\![0, n]\!]$.

- Tout d'abord :
  $$\begin{aligned}P_k'(X) \ &= \ kX^{k-1}(1-X)^{n-k} - (n-k)X^k(1-X)^{n-k-1} \\ &= \ X^{k-1}(1-X)^{n-k-1}\big(k(1-X) - (n-k)X\big) \\ &= \ X^{k-1}(1-X)^{n-k-1}(k - nX)\end{aligned}$$
- On en déduit :
  $$\begin{aligned}\big(\varphi(P_k)\big)(X) \ &= \ \frac{1}{n} \ X(1-X)X^{k-1}(1-X)^{n-k-1}(k-nX) + X \ X^k(1-X)^{n-k} \\ &= \ \frac{1}{n} \ X^k(1-X)^{n-k}(k-nX) + X \ X^k(1-X)^{n-k} \\ &= \ X^k(1-X)^{n-k}\left(\frac{1}{n}(k-nX) + X\right) \\ &= \ X^k(1-X)^{n-k}\left(\frac{k}{n} - \cancel{X} + \cancel{X}\right) \ = \ \frac{k}{n} \ X^k(1-X)^{n-k} \ = \ \frac{k}{n} \ P_k(X)\end{aligned}$$

$$\boxed{\forall k \in [\![0, n]\!], \ \varphi(P_k) = \frac{k}{n} \ P_k}$$

□

b) Montrer que la famille $(P_0, P_1, \dots, P_n)$ est une base de E et expliciter la matrice de φ dans cette base.

Démonstration.
D'après la question précédente, pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, P_k est vecteur propre de φ associé à la valeur propre $\dfrac{k}{n}$. Ainsi, la famille $(P_0, P_1, \dots, P_n)$ est une famille de $n+1$ vecteurs associés à $n+1$ valeurs propres distinctes.

$$\boxed{\text{On en conclut que la famille } (P_0, P_1, \dots, P_n) \text{ est libre.}}$$

Commentaire

On peut traiter cette question même si on n'a pas réussi la question précédente.

- Montrons que la famille $\mathscr{B}' = (P_0, \dots, P_n)$ est libre.
  Soit $(\lambda_0, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$. Supposons :
  $$\lambda_0 \cdot P_0 + \lambda_1 \cdot P_1 + \cdots + \lambda_{n-1} \cdot P_{n-1} + \lambda_n \cdot P_n \ = \ 0_E$$
  Ainsi, par définition :
  $$\lambda_0 \cdot (1-X)^n + \lambda_1 \cdot X(1-X)^{n-1} + \cdots + \lambda_{n-1} \cdot X^{n-1}(1-X) + \lambda_n \cdot X^n \ = \ 0_E$$
  Ce qui revient à dire :
  $$\forall x \in \mathbb{R}, \ \lambda_0 \ (1-x)^n + \lambda_1 \ x(1-x)^{n-1} + \cdots + \lambda_{n-1} \cdot x^{n-1}(1-x) + \lambda_n \ x^n \ = \ 0 \quad (*)$$
- En appliquant l'égalité $(*)$ en $x = 1$, on obtient :
  $$\lambda_0 \ \cancel{(1-1)^n} + \lambda_1 \ \cancel{1 \, (1-1)^{n-1}} + \cdots + \lambda_{n-1} \ \cancel{1^{n-1} (1-1)} + \lambda_n \ 1^n \ = \ 0$$
  Et on a donc : $\lambda_n = 0$. L'égalité $(*)$ se réécrit alors :
  $$\forall x \in \mathbb{R}, \ \lambda_0 \ (1-x)^n + \lambda_1 \ x(1-x)^{n-1} + \cdots + \lambda_{n-1} \ x^{n-1}(1-x) \ = \ 0$$
  On peut alors factoriser par $(1-x)$:
  $$\forall x \in \mathbb{R}, \ (1-x)\big(\lambda_0 \ (1-x)^{n-1} + \lambda_1 \ x(1-x)^{n-2} + \cdots + \lambda_{n-1} \ x^{n-1}\big) \ = \ 0$$
  Ce qui permet de conclure, en divisant par $(1-x)$:
  $$\forall x \in \mathbb{R}^*, \ \lambda_0 \ (1-x)^{n-1} + \lambda_1 \ x(1-x)^{n-2} + \cdots + \lambda_{n-1} \ x^{n-1} \ = \ 0$$
  Enfin, comme la fonction $P : x \mapsto \lambda_0 \ (1-x)^{n-1} + \lambda_1 \ x(1-x)^{n-2} + \cdots + \lambda_{n-1} \ x^{n-1}$ est polynomiale, elle est continue et cette égalité est aussi vérifiée en 0 (par passage à la limite, on obtient : $P(1) = \lim\limits_{x \to 1} P(x) = 0$). Ainsi :
  $$\forall x \in \mathbb{R}, \ \lambda_0 \ (1-x)^{n-1} + \lambda_1 \ x(1-x)^{n-2} + \cdots + \lambda_{n-1} \ x^{n-1} \ = \ 0 \quad (**)$$
- On peut alors itérer le procédé consistant à évaluer en 1 puis mettre en facteur et diviser par $(1-x)$. On obtient alors au bout de n étapes :
  $$\lambda_n \ = \ \lambda_{n-1} \ = \ \cdots \ = \ \lambda_1 \ = \ \lambda_0 = 0$$

- On en déduit que la famille $\mathscr{B}'$:
  - $\times$ est libre,
  - $\times$ vérifie : $\text{Card}(\mathscr{B}') = n+1 = \dim(\mathbb{R}_n[X]) = \dim(E)$

$$\boxed{\text{La famille } \mathscr{B}' \text{ est donc une base de } E.}$$

- Soit $k \in [\![0,n]\!]$.
  D'après la question ***2.a)*** :

$$\varphi(P_k) \ = \ 0 \cdot P_0 + \cdots + 0 \cdot P_{k-1} + \frac{k}{n} \cdot P_k + 0 \cdot P_{k+1} + \cdots + 0 \cdot P_n$$

Ainsi : $\text{Mat}_{\mathscr{B}'}(\varphi(P_k)) \ = \ \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \frac{k}{n} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ (où le coefficient $\dfrac{k}{n}$ est en $k^{\text{ème}}$ position).

$$\boxed{\text{On en déduit : } \text{Mat}_{\mathscr{B}'}(\varphi) \ = \ \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{1}{n} & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \frac{n-1}{n} & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}}$$

□

c) Déterminer les sous-espaces propres de φ.

Démonstration.

- D'après la question ***2.a)*** : $\forall k \in [\![0,n]\!]$, $\varphi(P_k) = \dfrac{k}{n} \, P_k$.
  Autrement dit, les polynômes P_0, P_1, $\ldots$, P_n sont des vecteurs propres associés aux valeurs propres 0, $\dfrac{1}{n}$, $\ldots$, 1. On obtient ainsi les inclusions suivantes :

$$E_0(\varphi) \supset \text{Vect}\left(P_0\right), \quad E_{\frac{1}{n}}(\varphi) \supset \text{Vect}\left(P_1\right), \quad \ldots \quad , \quad E_1(\varphi) \supset \text{Vect}\left(P_n\right)$$

Comme $\text{Mat}_{\mathscr{B}'}(\varphi)$ est diagonale, alors elle est diagonalisable. On en déduit :

$$\sum_{k=0}^{n} \dim\left(E_{\frac{k}{n}}(\varphi)\right) \ = \ \dim\left(\mathscr{M}_{n+1,1}(\mathbb{R})\right) \ = \ n+1$$

ce qui permet de conclure : $\forall k \in [\![0,n]\!]$, $\dim\left(E_{\frac{k}{n}}(\varphi)\right) = 1$ et ainsi de démontrer que les inclusions ci-dessus sont des égalités.

$$\boxed{\text{On a donc : } \forall k \in [\![0,n]\!],\ E_{\frac{k}{n}}(\varphi) = \text{Vect}\left(P_k\right).}$$

□

Partie II : Étude d'une suite de variables aléatoires

On considère une urne contenant n boules numérotées de 1 à n, indiscernables au toucher. On effectue dans cette urne une suite de tirages avec remise, et on suppose que l'expérience est modélisée par un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$.
On note alors, pour tout k de $\mathbb{N}^*$, Y_k la variable aléatoire prenant pour valeur le nombre de numéros distincts qui ont été tirés lors des k premiers tirages.
Par convention, on pose : $Y_0 = 0$.

3. On note, pour tout k de $\mathbb{N}^*$, Z_k la variable aléatoire prenant la valeur 1 si le $k^{\text{ème}}$ tirage amène un numéro qui n'a pas été tiré lors des tirages précédents, et prenant la valeur 0 sinon.
On pourra remarquer que, en particulier, $Z_1 = 1$.

a) Déterminer la loi de Z_2.

Démonstration.

- En deux tirages, deux cas se présentent :
  - × soit on obtient le même numéro aux deux tirages, c'est-à-dire $[Z_2 = 0]$ est réalisé,
  - × soit on obtient deux numéros distincts sur les deux tirages, c'est-à-dire $[Z_2 = 1]$ est réalisé.

$$\boxed{\text{On en déduit : } Z_2(\Omega) \ = \ \{0, 1\}.}$$

- Pour tout $i \in \mathbb{N}^*$, on introduit la v.a.r. T_i correspondant au numéro obtenu au $i^{\text{ème}}$ tirage.
Lors du $i^{\text{ème}}$ tirage, l'expérience possède n issues différentes (on peut tirer n'importe laquelle des n boules) qui sont équiprobables.

$$\boxed{\text{On en déduit : } \forall i \in [\![1, n]\!],\ T_i \hookrightarrow \mathcal{U}([\![1, n]\!]).}$$

Notons au passage que les v.a.r. T_i sont indépendantes car les tirages le sont.

- La famille $([T_1 = k])_{k \in [\![1,n]\!]}$ forme un système complet d'événements.
Ainsi, par formule des probabilités totales :

$$\begin{array}{rcll}
\mathbb{P}([Z_2 = 0]) & = & \sum\limits_{k=1}^{n} \mathbb{P}([T_1 = k] \cap [Z_2 = 0]) & \\
& = & \sum\limits_{k=1}^{n} \mathbb{P}([T_1 = k] \cap [T_2 = k]) & (*) \\
& = & \sum\limits_{k=1}^{n} \mathbb{P}([T_1 = k]) \times \mathbb{P}([T_2 = k]) & \textit{(car } T_1 \textit{ et } T_2 \textit{ sont indépendantes)} \\
& = & \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{n} \times \dfrac{1}{n} & \textit{(car } T_1 \hookrightarrow \mathcal{U}([\![1,n]\!]) \textit{ et } T_2 \hookrightarrow \mathcal{U}([\![1,n]\!])\textit{)} \\
& = & \cancel{n} \times \dfrac{1}{n^{\cancel{2}}} \ = \ \dfrac{1}{n} &
\end{array}$$

$$\boxed{\text{D'où : } Z_2 \hookrightarrow \mathcal{B}\left(1 - \frac{1}{n}\right).}$$

$(*)$: l'événement $[T_1 = k] \cap [Z_2 = 0]$ est réalisé si et seulement si :

× $[T_1 = k]$ est réalisé, c'est à dire qu'on a obtenu la boule numérotée k lors du 1$^{\text{er}}$ tirage.

× **et** $[Z_2 = 0]$ est réalisé, c'est à dire que le 2$^{\text{ème}}$ tirage a amené un numéro qui a déjà été tiré. On a donc obtenu, lors de ce 2$^{\text{ème}}$ tirage, la même boule qu'au 1$^{\text{er}}$ tirage à savoir la la boule numérotée k.

On en déduit : $[T_1 = k] \cap [Z_2 = 0] = [T_1 = k] \cap [T_2 = k]$.

Commentaire

Comme l'énoncé introduit des variables aléatoires pour cet exercice (plutôt que des événements), on a ici privilégié l'introduction des v.a.r. T_i. Cependant, la démonstration s'effectue également en introduisant les événements $B_{i,j}$:

$$B_{i,j} \ = \ \text{« obtenir le numéro } j \text{ au } i^{\text{ème}} \text{ tirage »}$$

$\square$

b) Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Calculer, pour tout j de $[\![1,k]\!]$, la valeur de $\mathbb{P}_{[Y_k=j]}\big([Z_{k+1}=1]\big)$.
En déduire : $\mathbb{P}\big([Z_{k+1}=1]\big) = 1 - \dfrac{1}{n}\mathbb{E}(Y_k)$.

Démonstration.

- Commençons par déterminer $Y_k(\Omega)$. Deux cas se présentent :
  - × si $k < n$.
    Dans ce cas, lors des k premiers tirages on obtient au maximum k numéros distincts.
    $$\boxed{\text{Si } k < n \text{ alors } Y_k(\Omega) = [\![1,k]\!].}$$
  - × si $k \geqslant n$.
    Dans ce cas, lors des k premiers tirages on obtient au maximum n numéros distincts (on ne peut obtenir plus de numéros distincts que de boules présentes dans l'urne).
    $$\boxed{\text{Si } k \geqslant n \text{ alors } Y_k(\Omega) = [\![1,n]\!].}$$

$$\boxed{\text{On déduit de cette étude : } Y_k(\Omega) \ = \ [\![1,\min(k,n)]\!].}$$

- Soit $j \in [\![1,k]\!]$. Deux cas se présentent :
  - × si $j > \min(k,n)$, alors : $[Y_k = j] = \varnothing$.
    (comme on a supposé $j \in [\![1,k]\!]$, cela correspond au cas où $n < j \leqslant k$)

    Dans ce cas, la probabilité conditionnelle $\mathbb{P}_{[Y_k=j]}([Z_{k+1}=1])$ n'est pas définie.

    Commentaire

    Il est assez naturel de faire cette disjonction de cas si on a déterminé correctement l'ensemble image dans la question précédente. Au vu de l'énoncé, il semble que le concepteur n'a pas pensé à ce cas. En conséquence, ne pas faire cette disjonction n'a certainement pas été sanctionné dans le barème officiel.

  - × si $j \leqslant \min(k,n)$.
    (comme on a supposé $j \in [\![1,k]\!]$, cela correspond au cas où $j \leqslant n$)

    Si l'événement $[Y_k = j]$ est réalisé, c'est que l'on a obtenu j numéros distincts lors des k premiers tirages. Dans ce cas, l'événement $[Z_{k+1} = 1]$ est réalisé si et seulement si le $(k+1)^{\text{ème}}$ tirage amène un numéro qui n'a pas été obtenu précédemment. Autrement dit, si l'on obtenu l'une des $n-j$ boules non encore piochées lors des k premiers tirages.
    Chaque boule étant piochée de manière équiprobable :

    $$\mathbb{P}_{[Y_k=j]}([Z_{k+1}=1]) \ = \ \frac{n-j}{n} \ = \ 1 - \frac{j}{n}$$

    $$\boxed{\forall j \in [\![1,\min(k,n)]\!],\ \mathbb{P}_{[Y_k=j]}([Z_{k+1}=1]) \ = \ 1 - \frac{j}{n}.}$$

- La famille $([Y_k = j])_{j\in[\![1,\min(k,n)]\!]}$ forme un système complet d'événements (SCE).
Ainsi, d'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}([Z_{k+1}=1]) &= \sum_{j=1}^{\min(k,n)} \mathbb{P}([Y_k = j] \cap [Z_{k+1}=1]) \\
&= \sum_{j=1}^{\min(k,n)} \mathbb{P}([Y_k = j])\, \mathbb{P}_{[Y_k=j]}([Z_{k=1}=1]) && \textit{(car : } \forall j \in [\![1,k]\!], \ \mathbb{P}([Y_k=j]) \neq 0\textit{)} \\
&= \sum_{j=1}^{\min(k,n)} \mathbb{P}([Y_k = j]) \left(1 - \frac{j}{n}\right) \\
&= \sum_{j=1}^{\min(k,n)} \mathbb{P}([Y_k = j]) - \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{\min(k,n)} j\, \mathbb{P}([Y_k = j]) \\
&= 1 - \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{\min(k,n)} j\, \mathbb{P}([Y_k = j]) && \textit{(car } ([Y_k=j])_{j\in[\![1,\min(k,n)]\!]} \textit{ est un SCE)} \\
&= 1 - \frac{1}{n}\, \mathbb{E}(Y_k) && \textit{(par définition de l'espérance)}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Finalement : } \forall k \in \mathbb{N}^*,\ \mathbb{P}([Z_{k+1}=1]) \ = \ 1 - \frac{1}{n}\, \mathbb{E}(Y_k)}$$

□

c) Soit $k \in \mathbb{N}^*$. En remarquant que $Y_k = \sum\limits_{j=1}^{k} Z_j$, montrer :

$$\mathbb{P}\big(\,[Z_{k+1}=1]\,\big) = 1 - \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{k} \mathbb{P}\big(\,[Z_j = 1]\,\big)$$

Démonstration.

- Comme $Y_k = \sum\limits_{j=1}^{k} Z_j$, d'après la question précédente :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}([Z_{k+1}=1]) &= 1 - \frac{1}{n}\, \mathbb{E}\left(\sum_{j=1}^{k} Z_j\right) \\
&= 1 - \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{k} \mathbb{E}(Z_j) && \textit{(par linéarité de l'espérance)}
\end{aligned}$$

- Or, par définition de l'espérance, pour tout $j \in [\![1,k]\!]$:

$$\mathbb{E}(Z_j) \ = \ \cancel{0 \times \mathbb{P}([Z_j = 0])} + 1 \times \mathbb{P}([Z_j = 1]) \ = \ \mathbb{P}([Z_j = 1])$$

$$\boxed{\text{On en déduit : } \mathbb{P}([Z_{k+1}=1]) \ = \ 1 - \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{k} \mathbb{P}([Z_j = 1]).}$$

□

d) En déduire, pour tout k de $\mathbb{N}^*$: $\mathbb{P}\big([Z_k = 1]\big) = \left(1 - \dfrac{1}{n}\right)^{k-1}$.

Démonstration.
Démontrons par récurrence : $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{P}(k)$ où $\mathcal{P}(k)$: $\mathbb{P}([Z_k = 1]) = \left(1 - \dfrac{1}{n}\right)^{k-1}$.

- ▶ **Initialisation** :
  D'une part, Z_1 est la v.a.r. constante égale à 1. En particulier, on a donc : $\mathbb{P}([Z_1 = 1]) = 1$.
  D'autre part, : $\left(1 - \dfrac{1}{n}\right)^{1-1} = \left(1 - \dfrac{1}{n}\right)^{0} = 1$.
  D'où $\mathcal{P}(1)$.
- ▶ **Hérédité** : soit $k \in \mathbb{N}^*$.
  Supposons : $\forall j \in [\![1, k]\!]$, $\mathcal{P}(j)$, et démontrons $\mathcal{P}(k+1)$ $\left(i.e.\ \mathbb{P}([Z_{k+1} = 1]) = \left(1 - \dfrac{1}{n}\right)^{k}\right)$.

$$\begin{array}{rcll}
\mathbb{P}([Z_{k+1} = 1]) & = & 1 - \dfrac{1}{n} \sum\limits_{j=1}^{k} \mathbb{P}([Z_j = 1]) & \textit{(d'après la question précédente)} \\[2ex]
& = & 1 - \dfrac{1}{n} \sum\limits_{j=1}^{k} \left(1 - \dfrac{1}{n}\right)^{j-1} & \textit{(par hypothèses de récurrence)} \\[2ex]
& = & 1 - \dfrac{1}{n} \sum\limits_{j=0}^{k-1} \left(1 - \dfrac{1}{n}\right)^{j} & \\[2ex]
& = & 1 - \dfrac{1}{n} \dfrac{1 - \left(1 - \frac{1}{n}\right)^k}{\cancel{1} - \left(\cancel{1} - \frac{1}{n}\right)} & \textit{(car } 1 - \dfrac{1}{n} \neq 1\textit{)} \\[2ex]
& = & 1 - \cancel{\dfrac{1}{n}} \dfrac{1 - \left(1 - \frac{1}{n}\right)^k}{\cancel{\frac{1}{n}}} & \\[2ex]
& = & \cancel{1} - \cancel{1} + \left(1 - \dfrac{1}{n}\right)^{k} = \left(1 - \dfrac{1}{n}\right)^{k} &
\end{array}$$

  D'où $\mathcal{P}(k)$.

$$\boxed{\text{Par principe de récurrence : } \forall k \in \mathbb{N}^*,\ \mathbb{P}([Z_k = 1]) = \left(1 - \dfrac{1}{n}\right)^{k-1}.}$$

□

e) Déterminer alors, pour tout k de $\mathbb{N}$, l'espérance de Y_k.

Démonstration.
Soit $k \in \mathbb{N}^*$.

- On rappelle qu'on a démontré en question ***3.b)*** :

$$\begin{array}{rrcl}
 & \mathbb{P}([Z_{k+1} = 1]) & = & 1 - \dfrac{1}{n}\, \mathbb{E}(Y_k) \\[2ex]
\text{donc} & \mathbb{P}([Z_{k+1} = 1]) - 1 & = & -\dfrac{1}{n}\, \mathbb{E}(Y_k) \\[2ex]
\text{d'où} & -n\big(\mathbb{P}([Z_{k+1} = 1]) - 1\big) & = & \mathbb{E}(Y_k)
\end{array}$$

- On obtient, grâce à la question précédente :

$$\mathbb{E}(Y_k) \;=\; -n\left(\left(1-\frac{1}{n}\right)^k - 1\right) \;=\; n\left(1-\left(1-\frac{1}{n}\right)^k\right)$$

- De plus, d'après l'énoncé : $Y_0 = 0$. Donc : $\mathbb{E}(Y_0) = 0$.

$$\boxed{\mathbb{E}(Y_0) = 0 \text{ et } \forall k \in \mathbb{N}^*,\ \mathbb{E}(Y_k) = n\left(1-\left(1-\frac{1}{n}\right)^k\right)}$$

□

4. On note, pour tout k de $\mathbb{N}$, G_k le polynôme de $\mathbb{R}_n[X]$ défini par :

$$G_k = \sum_{i=0}^{n} \mathbb{P}\big(\,[Y_k = i]\,\big)\ X^i$$

a) Déterminer les polynômes G_0, G_1 et G_2.

Démonstration.

- Par définition de G_0 :

$$G_0(X) \;=\; \sum_{i=0}^{n} \mathbb{P}([Y_0 = i])\ X^i$$

Or Y_0 est la v.a.r. constante égale à 0. Donc :

$$\mathbb{P}([Y_0 = 0]) = 1 \quad \text{et} \quad \forall i \in \mathbb{N}^*,\ \mathbb{P}([Y_0 = i]) = 0$$

On en déduit :

$$G_0(X) \;=\; \mathbb{P}([Y_0 = 0])\ X^0 + \cancel{\sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}([Y_0 = i])\ X^i} \;=\; 1$$

$$\boxed{G_0(X) = 1}$$

- Par définition de G_1 :

$$G_1(X) \;=\; \sum_{i=0}^{n} \mathbb{P}([Y_1 = i])\ X^i$$

  × Déterminons la loi de Y_1.
  En un seul tirage, on obtient obligatoirement un numéro (distinct). Donc $Y_1(\Omega) = \{1\}$.

$$\boxed{\text{La v.a.r. } Y_1 \text{ est la v.a.r. constante égale à } 1.}$$

  × En particulier :

$$\mathbb{P}([Y_1 = 1]) = 1 \quad \text{et} \quad \forall i \in \mathbb{N}\setminus\{1\},\ \mathbb{P}([Y_1 = i]) = 0$$

  × On en déduit :

$$G_1(X) \;=\; \cancel{\mathbb{P}([Y_1 = 0])\ X^0} + \mathbb{P}([Y_1 = 1])\ X^1 + \cancel{\sum_{i=2}^{n} \mathbb{P}([Y_1 = i])\ X^i} \;=\; X$$

$$\boxed{G_1(X) = X}$$

- Par définition de G_2 :
$$G_2(X) \ = \ \sum_{i=0}^{n} \mathbb{P}([Y_2 = i]) \ X^i$$
  × Déterminons la loi de Y_2.
  En deux tirages, deux cas se présentent :
    - soit on obtient le même numéro aux deux tirages, c'est-à-dire $[Y_2 = 1]$ est réalisé,
    - soit on obtient deux numéros distincts sur les deux tirages, c'est-à-dire $[Y_2 = 2]$ est réalisé.

  On en déduit : $Y_2(\Omega) \ = \ \{1, 2\}$.

  × L'événement $[Y_2 = 1]$ est réalisé si et seulement si un seul numéro a été tiré lors des deux premiers tirages. Autrement dit, le 2ème tirage a amené le même numéro que le premier.
$$\boxed{\text{Ainsi : } [Y_2 = 1] \ = \ [Z_2 = 0].}$$
  On en déduit, d'après la question ***3.a)*** :
$$\mathbb{P}([Y_2 = 1] \ = \ \mathbb{P}([Z_2 = 0]) \ = \ \frac{1}{n}$$
  Comme la famille $([Y_2 = 1] \, , [Y_2 = 2])$ est un système complet d'événements :
$$\mathbb{P}([Y_2 = 2]) \ = \ 1 - \mathbb{P}([Y_2 = 1]) \ = \ 1 - \frac{1}{n}$$
  Et donc, bien sûr :
$$\forall i \in \mathbb{N} \setminus \{1, 2\}, \ \mathbb{P}([Y_2 = i]) = 0$$
  × Finalement :
$$\begin{aligned} G_2(X) \ &= \ \cancel{\mathbb{P}([Y_2 = 0]) \ X^0} + \mathbb{P}([Y_2 = 1]) \ X^1 + \mathbb{P}([Y_2 = 2]) \ X^2 + \cancel{\sum_{i=3}^{n} \mathbb{P}([Y_2 = i]) \ X^i} \\ &= \ \frac{1}{n} \ X + \left(1 - \frac{1}{n}\right) X^2 \end{aligned}$$
$$\boxed{G_2(X) = \frac{1}{n} \ X + \left(1 - \frac{1}{n}\right) X^2}$$
□

b) Montrer, pour tout k de $\mathbb{N}$ et tout i de $[\![0, n]\!]$:
$$\mathbb{P}([Y_{k+1} = i]) = \frac{i}{n} \ \mathbb{P}\big([Y_k = i] \big) + \left(1 - \frac{i-1}{n}\right) \ \mathbb{P}\big([Y_k = i - 1]\big)$$

Démonstration.
Soit $k \in \mathbb{N}$.

- Traitons tout d'abord le cas $k = 0$ qui amène à une étude particulière.
  En effet, rappelons que les v.a.r. Y_0 et Y_1 sont constantes :
$$Y_0 = 0 \quad \text{et} \quad Y_1 = 1$$
  Soit $i \in [\![0, n]\!]$. Par définition des v.a.r. Y_0 et Y_1 :
$$\mathbb{P}([Y_0 = i]) = \begin{cases} 1 & \text{si } i = 0 \\ 0 & \text{si } i = 1 \\ 0 & \text{si } i \in [\![2, n]\!] \end{cases} \qquad \text{et} \qquad \mathbb{P}([Y_0 = i - 1]) = \begin{cases} 0 & \text{si } i = 0 \\ 1 & \text{si } i = 1 \\ 0 & \text{si } i \in [\![2, n]\!] \end{cases}$$

On en déduit :

$$\frac{i}{n}\ \mathbb{P}\big(\,[Y_0 = i]\,\big) + \left(1 - \frac{i-1}{n}\right)\ \mathbb{P}\big([Y_0 = i-1]\big) \ = \ \left\{ \begin{array}{cl} \frac{0}{n} & \text{si } i = 0 \\ 1 - \frac{1-1}{n} & \text{si } i = 1 \\ 0 & \text{si } i \in [\![2, n]\!] \end{array} \right.$$

et on retrouve bien la valeur de $\mathbb{P}\big(\,[Y_1 = i]\,\big)$ puisque :

$$\mathbb{P}\big(\,[Y_1 = i]\,\big) \ = \ \left\{ \begin{array}{ll} 0 & \text{si } i = 0 \\ 1 & \text{si } i = 1 \\ 0 & \text{si } i \in [\![2, n]\!] \end{array} \right.$$

$$\boxed{\text{Finalement : } \forall i \in [\![0, n]\!],\ \mathbb{P}([Y_1 = i]) \ = \ \left(1 - \frac{i-1}{n}\right)\ \mathbb{P}([Y_0 = i-1]) + \frac{i}{n}\ \mathbb{P}([Y_0 = i]).}$$

- Considérons maintenant $k \in \mathbb{N}^*$ et $i \in [\![2, n]\!]$.
  (Les cas $i = 0$ et $i = 1$ sont un peu à part car amène à considérer un nombre négatif de numéros distincts puisqu'alors $i - 1 \leqslant 0$. Ces cas sont traités en fin de question.)

  L'événement $[Y_{k+1} = i]$ est réalisé si et seulement si i numéros distincts ont été tirés lors des $k+1$ premiers tirages. Cela résulte de deux cas :

  × soit on a obtenu i numéros distincts lors des k premiers tirages et le tirage suivant (le $(k+1)^{\text{ème}}$) a amené un numéro déjà obtenu.

  Autrement dit, l'événement : $[Y_k = i] \ \cap \ [Z_{k+1} = 0]$ est réalisé.

  × soit on a obtenu $i-1$ numéros distincts lors des k premiers tirages et le tirage suivant (le $(k+1)^{\text{ème}}$) a amené un nouveau numéro.

  Autrement dit, l'événement : $[Y_k = i-1] \ \cap \ [Z_{k+1} = 1]$ est réalisé.

  $$\boxed{\text{On en déduit : } [Y_{k+1} = i] \ = \ \big([Y_k = i] \ \cap \ [Z_{k+1} = 0]\big) \ \cup \ \big([Y_k = i-1] \ \cap \ [Z_{k+1} = 1]\big).}$$

  Par incompatibilité des événements :

  $$\begin{aligned} \mathbb{P}([Y_{k+1} = i]) \ &= \ \mathbb{P}\left([Y_k = i-1] \cap [Z_{k+1} = 1]\right) + \mathbb{P}\left([Y_k = i] \cap [Z_{k+1} = 0]\right) \\ &= \ \mathbb{P}([Y_k = i-1])\ \mathbb{P}_{[Y_k = i-1]}\left([Z_{k+1} = 1]\right) + \mathbb{P}([Y_k = i])\ \mathbb{P}_{[Y_k = i]}\left([Z_{k+1} = 0]\right) \end{aligned}$$

  Cette dernière égalité est valide car $\mathbb{P}([Y_k = i-1]) \neq 0$ et $\mathbb{P}([Y_k = i]) \neq 0$ puisque $i \geqslant 2$.

  Déterminons maintenant $\mathbb{P}_{[Y_k = i-1]}\left([Z_{k+1} = 1]\right)$ et $\mathbb{P}_{[Y_k = i]}\left([Z_{k+1} = 0]\right)$.

  × Si l'événement $[Y_k = i-1]$ est réalisé, c'est que lors des k premiers tirages, on a tiré $i-1$ numéros distincts. Dans ce cas, l'événement $[Z_{k+1} = 1]$ est réalisé si et seulement si on pioche l'un des $n - (i-1)$ numéros restants.

  $$\boxed{\text{On en déduit : } \mathbb{P}_{[Y_k = i-1]}\left([Z_{k+1} = 1]\right) \ = \ \frac{n-(i-1)}{n} \ = \ 1 - \frac{i-1}{n}.}$$

  × Si l'événement $[Y_k = i]$ est réalisé, c'est que lors des k premiers tirages, on a tiré i numéros distincts. Dans ce cas, l'événement $[Z_{k+1} = 0]$ est réalisé si et seulement si on pioche l'un de ces i numéros.

  $$\boxed{\text{On en déduit : } \mathbb{P}_{[Y_k = i]}\left([Z_{k+1} = 0]\right) \ = \ \frac{i}{n}.}$$

$$\boxed{\text{Finalement, on obtient bien : } \forall k \in \mathbb{N}^*,\ \forall i \in [\![2, n]\!],\ \mathbb{P}([Y_{k+1} = i]) = \left(1 - \frac{i-1}{n}\right) \mathbb{P}([Y_k = i-1]) + \frac{i}{n}\, \mathbb{P}([Y_k = i]).}$$

Commentaire

On pouvait aussi démontrer ce résultat en utilisant la formule des probabilités totales.

La famille $([Y_k = j])_{j \in [\![1,n]\!]}$ forme un système complet d'événements.
Ainsi, d'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{P}([Y_{k+1} = i]) & = & \sum\limits_{j=0}^{n} \mathbb{P}([Y_k = j] \cap [Y_{k+1} = i]) \\ & = & \cancel{\sum\limits_{j=0}^{i-2} \mathbb{P}([Y_k = j] \cap [Y_{k+1} = i])} + \mathbb{P}([Y_k = i-1] \cap [Y_{k+1} = i]) \\ & + & \mathbb{P}([Y_k = i] \cap [Y_{k+1} = i]) + \cancel{\sum\limits_{j=i+1}^{k} \mathbb{P}([Y_k = j] \cap [Y_{k+1} = i])} \end{array}$$

En effet, pour tout $j \notin \{i-1, i\}$: $[Y_k = j] \cap [Y_{k+1} = i] \ = \ \varnothing$.
Il suffit alors de remarquer :

$$\begin{array}{rrcl} & [Y_k = i-1] \cap [Y_{k+1} = i] & = & [Y_k = i-1] \cap [Z_{k+1} = 1] \\ \text{et} & [Y_k = i] \cap [Y_{k+1} = i] & = & [Y_k = i] \cap [Z_{k+1} = 0] \end{array}$$

- Il reste alors à traiter les cas où $k \in \mathbb{N}^*$ et $i \in \{0, 1\}$.
  - × Si $i = 0$, il suffit de remarquer :

$$[Y_{k+1} = 0] = \varnothing \quad \text{et} \quad [Y_k = -1] = \varnothing \quad \text{et} \quad [Y_k = 0] = \varnothing$$

$$\boxed{\text{On a bien : } \mathbb{P}([Y_{k+1} = 0]) = 0 = \left(1 - \frac{0-1}{n}\right) \times 0 + \frac{0}{n} \times 0.}$$

  - × Si $i = 1$, on remarque, en raisonnant comme précédemment :

$$[Y_{k+1} = 1] \ = \ [Y_k = 1] \cap [Y_{k+1} = 1]$$

On en déduit :

$$\begin{array}{rcll} \mathbb{P}([Y_{k+1} = 1]) & = & \mathbb{P}([Y_k = 1] \cap [Y_{k+1} = 1]) & \\ & = & \mathbb{P}\left([Y_k = 1] \cap [Z_{k+1} = 0]\right) & \\ & = & \mathbb{P}([Y_k = 1])\ \mathbb{P}_{[Y_k = 1]}\left([Z_{k+1} = 0]\right) & \\ & = & \mathbb{P}([Y_k = 1])\ \dfrac{1}{n} & \textit{(en raisonnant une nouvelle fois comme précédemment)} \\ & = & \left(1 - \dfrac{1-1}{n}\right) \mathbb{P}([Y_k = 1-1]) + \dfrac{1}{n}\, \mathbb{P}([Y_k = 1]) & \end{array}$$

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \ \mathbb{P}([Y_{k+1} = 1]) \ = \ \left(1 - \frac{1-1}{n}\right) \mathbb{P}([Y_k = 1-1]) + \frac{1}{n}\, \mathbb{P}([Y_k = 1])}$$

□

c) Montrer, pour tout k de $\mathbb{N}$:

$$G_{k+1} = \frac{1}{n}\ X(1-X)G_k' + XG_k$$

Démonstration.
Soit $k \in \mathbb{N}$.

- Tout d'abord : $G_k'(X) \ = \ \sum\limits_{i=0}^{n} \mathbb{P}([Y_k = i])\ i\, X^{i-1} \ = \ \sum\limits_{i=1}^{n} i\, \mathbb{P}([Y_k = i])\, X^{i-1}$.
- Ensuite, d'après la question précédente :

$$\begin{aligned} G_{k+1}(X) &= \sum_{i=0}^{n} \mathbb{P}([Y_{k+1} = i])\ X^i \\ &= \sum_{i=0}^{n} \left(\left(1 - \frac{i-1}{n}\right)\ \mathbb{P}([Y_k = i-1]) + \frac{i}{n}\ \mathbb{P}([Y_k = i])\right)\ X^i \\ &= \sum_{i=0}^{n} \left(1 - \frac{i-1}{n}\right)\ \mathbb{P}([Y_k = i-1])\ X^i + \sum_{i=0}^{n} \frac{i}{n}\ \mathbb{P}([Y_k = i])\ X^i \qquad (*) \end{aligned}$$

- Étudions la première somme de l'égalité $(*)$.

$$\begin{aligned} & \sum_{i=0}^{n} \left(1 - \frac{i-1}{n}\right)\ \mathbb{P}([Y_k = i-1])\ X^i \\ = \ & \sum_{i=1}^{n} \left(1 - \frac{i-1}{n}\right)\ \mathbb{P}([Y_k = i-1])\ X^i && \textit{(car } [Y_k = -1] = \varnothing\textit{)} \\ = \ & \sum_{i=0}^{n-1} \left(1 - \frac{i}{n}\right)\ \mathbb{P}([Y_k = i])\ X^{i+1} && \textit{(par décalage d'indice)} \\ = \ & \sum_{i=0}^{n-1} \mathbb{P}([Y_k = i])\ X^{i+1} - \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} i\ \mathbb{P}([Y_k = i])\ X^{i+1} \\ = \ & X \sum_{i=0}^{n-1} \mathbb{P}([Y_k = i])\ X^{i} - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n-1} i\ \mathbb{P}([Y_k = i])\ X^{i+1} && \textit{(car } 0\ \mathbb{P}([Y_k = 0])\, X^1 = 0\textit{)} \\ = \ & X\big(G_k(X) - \mathbb{P}([Y_k = n])\, X^n\big) - \frac{1}{n}\ X^2 \sum_{i=1}^{n-1} i\ \mathbb{P}([Y_k = i])\ X^{i-1} \\ = \ & X\ G_k(X) - \mathbb{P}([Y_k = n])\ X^{n+1} - \frac{1}{n}\ X^2\big(G_k'(X) - n\ \mathbb{P}([Y_k = n])\ X^{n-1}\big) \\ = \ & X\ G_k(X) - \cancel{\mathbb{P}([Y_k = n])\ X^{n+1}} - \frac{1}{n}\ X^2\ G_k'(X) + \cancel{\mathbb{P}([Y_k = n])\ X^{n+1}} \\ = \ & X\ G_k(X) - \frac{1}{n}\ X^2\ G_k'(X) \end{aligned}$$

- Étudions la seconde somme de l'égalité $(*)$.

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{n} \frac{i}{n}\ \mathbb{P}([Y_k = i])\ X^i &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} i\ \mathbb{P}([Y_k = i])\ X^i \quad \textit{(car } 0\ \mathbb{P}([Y_k = 0])\, X^0 = 0\textit{)} \\ &= \frac{1}{n}\ X \sum_{i=1}^{n} i\ \mathbb{P}([Y_k = i])\ X^i \ = \ \frac{1}{n}\ X\ G_k'(X) \end{aligned}$$

En reprenant $(*)$, on obtient :

$$\boxed{G_{k+1}(X) \ = \ X\ G_k(X) - \frac{1}{n}\ X^2\ G_k'(X) + \frac{1}{n}\ X\ G_k'(X) \ = \ X\, G_k(X) + \frac{1}{n}\ X(1-X)G_k'(X).}$$ □

d) En déduire, pour tout k de $\mathbb{N}$: $G_k = \varphi^k(G_0)$.

Démonstration.
Démontrons par récurrence : $\forall k \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(k)$ où $\mathcal{P}(k)$: $G_k = \varphi^k(G_0)$.

- **Initialisation** :
  Comme $\varphi^0 = \mathrm{id}_E$, on a : $\varphi^0(G_0) = G_0$.
  D'où $\mathcal{P}(0)$.
- **Hérédité** : soit $k \in \mathbb{N}$.
  Supposons $\mathcal{P}(k)$ et démontrons $\mathcal{P}(k+1)$ (*i.e.* $G_{k+1} = \varphi^{k+1}(G_0)$).

$$\begin{array}{rcll} G_{k+1}(X) & = & \dfrac{1}{n}\, X(1-X)\ G'_k(X) + X\ G_k(X) & \textit{(d'après la question précédente)} \\ & = & \big(\varphi(G_k)\big)(X) & \textit{(par définition de } \varphi\textit{)} \\ & = & \Big(\varphi\big(\varphi^k(G_0)\big)\Big)(X) & \textit{(par hypothèse de récurrence)} \\ & = & \big(\varphi^{k+1}(G_0)\big)(X) & \end{array}$$

D'où $\mathcal{P}(k+1)$.

$$\boxed{\text{Par principe de récurrence : } \forall k \in \mathbb{N},\ G_k = \varphi^k(G_0).}$$

□

5. *a)* Pour tout k de $\mathbb{N}$, calculer $G_k(1)$ et $G'_k(1)$.

Démonstration.
Soit $k \in \mathbb{N}$.

- Par définition de G_k :

$$G_k(1) \ = \ \sum_{i=0}^{n} \mathbb{P}([Y_k = i])\ 1^i \ = \ \sum_{i=0}^{n} \mathbb{P}([Y_k = i])$$

  Or la famille $([Y_k = i])_{i \in [\![0,n]\!]}$ est un système complet d'événements, donc : $\sum\limits_{i=0}^{n} \mathbb{P}([Y_k = i]) = 1$

$$\boxed{\text{Ainsi : } G_k(1) = 1.}$$

- Par définition de G'_k :

$$G'_k(1) \ = \ \sum_{i=0}^{n} i\ \mathbb{P}([Y_k = i]) 1^i \ = \ \sum_{i=0}^{n} i\ \mathbb{P}([Y_k = i]) \ = \ \mathbb{E}(Y_k)$$

$$\boxed{G'_k(1) = \mathbb{E}(Y_k).}$$

□

b) En déduire, pour tout k de $\mathbb{N}$: $\mathbb{E}(Y_{k+1}) = \left(1 - \dfrac{1}{n}\right) \mathbb{E}(Y_k) + 1$.

Démonstration.
Soit $k \in \mathbb{N}$.

- Tout d'abord, d'après la question précédente : $\mathbb{E}(Y_{k+1}) = G'_{k+1}(1)$.
- Or, d'après la question ***4.c)*** :

$$G_{k+1}(X) \;=\; \frac{1}{n} \; X(1-X) \; G'_k(X) + X \; G_k(X)$$

On en déduit :

$$\begin{array}{rcl} G'_{k+1}(X) & = & \dfrac{1}{n}\Big((1-X) \; G'_k(X) + X\big(-G'_k(X) + (1-X)G''_k(X)\big)\Big) + G_k(X) + X \; G'_k(X) \\ & = & \dfrac{1}{n} \; (1-2X)G'_k(X) + \dfrac{1}{n} \; (1-X)G''_k(X) + G_k(X) + X \; G'_k(X) \end{array}$$

Ainsi :

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{E}(Y_{k+1}) & = & G'_{k+1}(X) \\ & = & \dfrac{1}{n} \; (1-2)G'_k(1) + \cancel{\dfrac{1}{n} \; (1-1)G''_k}(1) + G_k(1) + 1 \; G'_k(1) \\ & = & \left(1 - \dfrac{1}{n}\right) G'_k(1) + G_k(1) \;\; = \;\; \left(1 - \dfrac{1}{n}\right) \mathbb{E}(Y_k) + 1 \qquad \textit{(d'après } \textbf{\textit{5.a)}}\textit{)} \end{array}$$

$$\boxed{\mathbb{E}(Y_{k+1}) = \left(1 - \dfrac{1}{n}\right) \mathbb{E}(Y_k) + 1}$$

□

c) Retrouver alors, pour tout k de $\mathbb{N}$, l'expression de $\mathbb{E}(Y_k)$ obtenue en question ***6.e)***.

Démonstration.

- Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on note $u_k = \mathbb{E}(Y_k)$.
  Alors, d'après la question précédente :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \;\; u_{k+1} = \left(1 - \frac{1}{n}\right) \; u_k + 1$$

  La suite $(u_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ est donc arithmético-géométrique.
- L'équation de point fixe associée à la suite (u_k) est :

$$x = \left(1 - \frac{1}{n}\right) \; x + 1$$

  Elle admet pour unique solution : $\lambda = n$.

- On écrit :

$$\begin{array}{rclcccl} u_{k+1} & = & \left(1 - \dfrac{1}{n}\right) & \times & u_k & + \;\; 1 & (L_1) \\ \lambda & = & \left(1 - \dfrac{1}{n}\right) & \times & \lambda & + \;\; 1 & (L_2) \\ \text{et donc} \quad u_{k+1} - \lambda & = & \left(1 - \dfrac{1}{n}\right) & \times & (u_k - \lambda) & & (L_1)-(L_2) \end{array}$$

  Notons alors (v_k) la suite de terme général $v_k = u_k - \lambda$.

- La suite (v_k) est géométrique de raison $1 - \frac{1}{n}$.
  Ainsi, pour tout $k \in \mathbb{N}$:
  $$v_k \;=\; \left(1 - \frac{1}{n}\right)^k \times v_0 \;=\; \left(1 - \frac{1}{n}\right)^k \times (u_0 - \lambda)$$
  On a donc, pour tout $k \in \mathbb{N}$:
  $$u_k \;=\; v_k + \lambda \;=\; \left(1 - \frac{1}{n}\right)^k \times (u_0 - \lambda) + \lambda$$
- Enfin : $u_0 \;=\; \mathbb{E}(Y_0) \;=\; 0$.

$$\boxed{\text{On en déduit : } \forall k \in \mathbb{N},\ \mathbb{E}(Y_k) = -n\ \left(1 - \frac{1}{n}\right)^k + n = n\left(1 - \left(1 - \frac{1}{n}\right)^k\right).}$$
□

6. On rappelle que les polynômes $P_0, \dots, P_n$ sont définis à la question ***5.*** par :
$$\text{pour tout } j \text{ de } [\![0, n]\!],\ \ P_j = X^j(1 - X)^{n-j}$$

a) Calculer $\sum\limits_{j=0}^{n} \binom{n}{j} P_j$.

Démonstration.
On calcule :
$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} P_j(X) &= \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} X^j (1 - X)^{n-j} && \textit{(par définition de } P_j\textit{)} \\ &= \left(\cancel{X} + (1 - \cancel{X})\right)^n && \textit{(par formule du binôme de Newton)} \\ &= 1 \end{aligned}$$
$$\boxed{\sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} P_j(X) = 1}$$
□

b) Montrer, pour tout j de $[\![0, n]\!]$:
$$P_j = \sum_{i=j}^{n} \binom{n-j}{i-j} (-1)^{i-j} X^i$$

Démonstration.
On calcule :
$$\begin{aligned} \sum_{i=j}^{n} \binom{n-j}{i-j} (-1)^{i-j}\ X^i &= \sum_{k=0}^{n-j} \binom{n-j}{k} (-1)^k\ X^{k+j} && \textit{(avec le changement d'indice } k = i - j\textit{)} \\ &= X^j \sum_{k=0}^{n-j} \binom{n-j}{k} (-1)^k\ X^k \\ &= X^j \sum_{k=0}^{n-j} \binom{n-j}{k} (-X)^k\ 1^{n-j-k} \\ &= X^j\ (-X + 1)^{n-j} && \textit{(par formule du binôme de Newton)} \\ &= P_j(X) \end{aligned}$$
$$\boxed{\sum_{i=j}^{n} \binom{n-j}{i-j} (-1)^{i-j} X^i = P_j(X)}$$
□

c) En déduire, pour tout k de $\mathbb{N}$:

$$\varphi^k(G_0) = \sum_{i=0}^{n} \left(\sum_{j=0}^{i} \binom{n}{j} \binom{n-j}{i-j} \left(\frac{j}{n}\right)^k (-1)^{i-j} \right) X^i$$

Démonstration.

- Tout d'abord, d'après la question ***6.a)*** :

$$G_0(X) \ = \ 1 \ = \ \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} P_j(X)$$

- Soit $k \in \mathbb{N}$. Comme φ est une application linéaire, il en est de même de φ^k. Ainsi :

$$\varphi^k(G_0) \ = \ \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} \varphi^k(P_j)$$

- De plus, d'après la question ***2.a)*** : $\forall j \in [\![0, n]\!]$, $\varphi(P_j) = \dfrac{j}{n} P_j$.
  On en déduit, par récurrence immédiate :

$$\forall j \in [\![0, n]\!], \ \varphi^k(P_j) = \left(\frac{j}{n}\right)^k \ P_j$$

  On en déduit :

$$\varphi^k(G_0) \ = \ \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} \left(\frac{j}{n}\right)^k P_j$$

- Enfin, d'après la question précédente :

$$P_j(X) = \sum_{i=j}^{n} \binom{n-j}{i-j} (-1)^{i-j} X^i$$

  D'où :

$$\begin{aligned} \big(\varphi^k(G_0)\big)(X) \ &= \ \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} \left(\frac{j}{n}\right)^k \left(\sum_{i=j}^{n} \binom{n-j}{i-j} (-1)^{i-j} X^i \right) \\ &= \ \sum_{0 \leqslant j \leqslant i \leqslant n} \left(\binom{n}{j} \binom{n-j}{i-j} \left(\frac{j}{n}\right)^k (-1)^{i-j} X^i \right) \\ &= \ \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{i} \left(\binom{n}{j} \binom{n-j}{i-j} \left(\frac{j}{n}\right)^k (-1)^{i-j} X^i \right) \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{On en déduit : } \forall k \in \mathbb{N}, \ \big(\varphi^k(G_0)\big)(X) = \sum_{i=0}^{n} \left(\sum_{j=0}^{i} \binom{n}{j} \binom{n-j}{i-j} \left(\frac{j}{n}\right)^k (-1)^{i-j} \right) X^i}$$

□

d) Montrer finalement, pour tout k de $\mathbb{N}$ et pour tout i de $[\![0,n]\!]$:

$$\mathbb{P}([Y_k = i]) = \binom{n}{i} \sum_{j=0}^{i} \binom{i}{j} (-1)^{i-j} \left(\frac{j}{n}\right)^k$$

Démonstration.
Soit $k \in \mathbb{N}$.

- D'après la question ***4.d)*** :

$$\begin{array}{ccc} G_k & = & \varphi^k(G_0) \\ \shortparallel & & \shortparallel \\ \displaystyle\sum_{i=0}^{n} \mathbb{P}([Y_k = i])\ X^i & & \displaystyle\sum_{i=0}^{n} \left(\sum_{j=0}^{i} \binom{n}{j} \binom{n-j}{i-j} \left(\frac{j}{n}\right)^k (-1)^{i-j} \right) X^i \end{array}$$

(d'après la question précédente)

- Or la famille $(Q_0, Q_1, \ldots, Q_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.
  (on rappelle : $\forall i \in [\![0,n]\!]$, $Q_i(X) = X^i$)
  Donc la décomposition du polynôme G_k sur cette base est unique.
  En particulier, pour tout $i \in [\![0,n]\!]$:

$$\mathbb{P}([Y_k = i]) = \sum_{j=0}^{i} \binom{n}{j} \binom{n-j}{i-j} \left(\frac{j}{n}\right)^k (-1)^{i-j}$$

- Montrons alors maintenant, pour tout $(i,j) \in [\![0,n]\!]$ tel que $j \leqslant i$:

$$\binom{n}{j} \binom{n-j}{i-j} = \binom{n}{i} \binom{i}{j}$$

  × D'une part :

$$\binom{n}{j} \binom{n-j}{i-j} = \frac{n!}{j!\,\cancel{(n-j)!}}\ \frac{\cancel{(n-j)!}}{(i-j)!\,\big((n-\cancel{j}) - (i-\cancel{j})\big)!} = \frac{n!}{j!\,(i-j)!\,(n-i)!}$$

  × D'autre part :

$$\binom{i}{j} \binom{n}{i} = \frac{\cancel{i!}}{j!\,(i-j)!}\ \frac{n!}{\cancel{i!}\,(n-i)!} = \frac{n!}{j!\,(i-j)!\,(n-i)!}$$

$$\boxed{\text{Ainsi, pour tout } (i,j) \in [\![0,n]\!] \text{ tel que } j \leqslant i : \binom{n}{j} \binom{n-j}{i-j} = \binom{n}{i} \binom{i}{j}.}$$

- On en déduit :

$$\mathbb{P}([Y_k = i]) = \sum_{j=0}^{i} \binom{n}{i} \binom{i}{j} \left(\frac{j}{n}\right)^k (-1)^{i-j} = \binom{n}{i} \sum_{j=0}^{i} \binom{i}{j} \left(\frac{j}{n}\right)^k (-1)^{i-j}$$

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N},\ \forall i \in [\![0,n]\!],\ \mathbb{P}([Y_k = i]) = \binom{n}{i} \sum_{j=0}^{i} \binom{i}{j} \left(\frac{j}{n}\right)^k (-1)^{i-j}}$$

Commentaire

La relation sur les coefficients binomiaux peut aussi se faire par dénombrement.
Pour ce faire, on considère un ensemble E à n éléments.
(on peut penser à une pièce qui contient n individus)
On souhaite alors construire une partie P à i éléments de cet ensemble contenant j éléments distingués *(on peut penser à choisir dans la pièce un groupe de i individus dans lequel figurent j représentants de ces individus)*.
Pour ce faire, on peut procéder de deux manières :

1) On choisit d'abord la partie à i éléments de E : $\binom{n}{i}$ possibilités.

On distingue ensuite j éléments de cet ensemble P : $\binom{i}{j}$ possibilités.
(on choisit d'abord les i individus et on élit ensuite j représentants de ces individus)

Ainsi, il y a $\binom{i}{j}\ \binom{n}{i}$ manières de construire P.

2) On choisit d'abord, dans E, les j éléments à distinguer : $\binom{n}{j}$ possibilités.

On choisit ensuite $i-j$ éléments dans E, pour former P, en y ajoutant les j éléments précédents : $\binom{n-j}{i-j}$ possibilités.
(on choisit d'abord les j représentants puis on leur adjoint un groupe de $i-j$ individus)

Ainsi, il y a $\binom{n}{j}\ \binom{n-j}{i-j}$ manières de construire P.

On retrouve ainsi le résultat.

□

Exercice 3 (ESCP 2003)

Soient a et b deux entiers naturels non nuls et s leur somme.
Une urne contient initialement a boules noires et b boules blanches indiscernables au toucher.
On effectue dans cette urne une suite infinie de tirages au hasard d'une boule selon le protocole suivant :

- × si la boule tirée est blanche, elle est remise dans l'urne,
- × si la boule tirée est noire, elle est remplacée dans l'urne par une boule blanche prise dans une réserve annexe.

Avant chaque tirage, l'urne contient donc toujours s boules.
On désigne par $(\Omega, \mathscr{B}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé qui modélise cette expérience et, pour tout entier naturel n non nul, on note :

- × B_n l'événement « la $n^{\text{ème}}$ boule tirée est blanche » ;
- × X_n la variable aléatoire désignant le nombre de boules blanches tirées au cours des n premiers tirages ;
- × u_n l'espérance de la variable aléatoire X_n, c'est-à-dire $u_n = \mathbb{E}(X_n)$.

1. Étude d'un ensemble de suites

Soit A l'ensemble des suites $(x_n)_{n\geqslant 1}$ de réels qui vérifient :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad s\, x_{n+1} = (s-1)\, x_n + b + n$$

a) Soit α et β deux réels et $(v_n)_{n\geqslant 1}$ la suite définie par : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = \alpha\, n + \beta$.
Déterminer en fonction de b et de s les valeurs de α et β pour que la suite $(v_n)_{n\geqslant 1}$ appartienne à A.

Démonstration.

- Supposons que $(v_n) \in A$. Alors :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ s\, v_{n+1} = (s-1)v_n + b + n$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On obtient :

$$\begin{aligned}
& s\, v_{n+1} = (s-1)v_n + b + n \\
\Leftrightarrow\ & s(\alpha(n+1) + \beta) = (s-1)(\alpha\, n + \beta) + n + b \\
\Leftrightarrow\ & s(n+1)\, \alpha + s\, \beta = n(s-1)\, \alpha + (s-1)\, \beta + n + b \\
\Leftrightarrow\ & \big(s(n+1) - n(s-1)\big)\, \alpha + \big(\cancel{s} - (\cancel{s} - 1)\big)\, \beta = n + b \\
\Leftrightarrow\ & (\cancel{sn} + s - \cancel{ns} + n)\, \alpha + \beta = n + b \\
\Leftrightarrow\ & (s+n)\, \alpha + \beta = n + b
\end{aligned}$$

En particulier, pour $n = 1$ et $n = 2$, on obtient :

$$\left\{ \begin{array}{rcrcl} (s+1)\, \alpha & + & \beta & = & 1+b \\ (s+2)\, \alpha & + & \beta & = & 2+b \end{array} \right. \underset{}{\overset{L_2 \leftarrow L_2 - L_1}{\Longleftrightarrow}} \left\{ \begin{array}{rcrcl} (s+1)\, \alpha & + & \beta & = & 1+b \\ \alpha & & & = & 1 \end{array} \right.$$

$$\overset{L_1 \leftarrow L_1 - (s+1) L_2}{\Longleftrightarrow} \left\{ \begin{array}{lrcl} & \beta & = & b - s \\ \alpha & & = & 1 \end{array} \right.$$

Donc : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = n + b - s$.

- Vérifions maintenant que la suite (v_n) définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ v_n = n + b - s$$

appartient bien à A.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

× D'une part :

$$s\, v_{n+1} \ = \ s(n+1) + b - s \ = \ sn + s + sb - s^2$$

× D'autre part :

$$\begin{aligned}
(s-1)v_n + b + n &= (s-1)(n + b - s) + b + n \\
&= sn - \cancel{n} + bs - \cancel{b} - s^2 + s + \cancel{b} + \cancel{n} \\
&= sn + bs - s^2 + s
\end{aligned}$$

On a bien, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $s\, v_{n+1} = (s-1)v_n + b + n$.

$$\boxed{\text{La suite } (v_n) \text{ appartient à } A \text{ si et seulement si } \alpha = 1 \text{ et } \beta = b - s.}$$

□

b) Soit $(x_n)_{n\geqslant 1}$ une suite appartenant à A, $(v_n)_{n\geqslant 1}$ la suite déterminée à la question précédente et $(y_n)_{n\geqslant 1}$ la suite définie par : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $y_n = x_n - v_n$.
Montrer que la suite $(y_n)_{n\geqslant 1}$ est une suite géométrique et expliciter, pour tout entier naturel n non nul, y_n puis x_n en fonction de x_1, b, s et n.

Démonstration.

- Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{array}{rcl} y_{n+1} & = & x_{n+1} - v_{n+1} \\ & = & \dfrac{1}{s}\left((s-1)x_n + \cancel{b+n}\right) - \dfrac{1}{s}\left((s-1)v_n + \cancel{b+n}\right) \\ & = & \dfrac{s-1}{s}\,(x_n - v_n) \\ & = & \dfrac{s-1}{s}\,y_n \end{array}$$

$$\boxed{\text{La suite } (y_n) \text{ est donc géométrique de raison } \dfrac{s-1}{s}.}$$

- Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On en déduit :

$$y_n = \left(\frac{s-1}{s}\right)^{n-1} y_1$$

Or : $y_1 = x_1 - v_1 = x_1 - (1 + b - s)$.

$$\boxed{\text{Ainsi : } \forall n \in \mathbb{N}^*,\ y_n = \left(\frac{s-1}{s}\right)^{n-1} (x_1 - 1 - b + s).}$$

- De plus : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $x_n = y_n + v_n$.

$$\boxed{\text{Finalement : } \forall n \in \mathbb{N}^*,\ x_n = \left(\frac{s-1}{s}\right)^{n-1} (x_1 - 1 - b + s) + n + b - s.}$$

□

2. Expression de la probabilité $\mathbb{P}(B_{n+1})$ à l'aide de u_n

a) Donner, en fonction de b et de s, les valeurs respectives de $\mathbb{P}(B_1)$ et du nombre u_1.

Démonstration.

- Lors du premier tirage, on pioche parmi les s boules disponibles, dont b blanches. Chaque issue est équiprobable.

$$\boxed{\text{Ainsi : } \mathbb{P}(B_1) = \frac{b}{s}.}$$

- Tout d'abord : $X_1(\Omega) = \{0, 1\}$.
  En effet, au premier tirage, seules deux issues sont possibles :
  × on pioche une boule blanche, c'est-à-dire $[X_1 = 1]$ est réalisé,
  × on pioche une boule noire, c'est-à-dire $[X_1 = 0]$ est réalisé.

  De plus : $\mathbb{P}([X_1 = 1]) = \mathbb{P}(B_1) = \dfrac{b}{s}$.

$$\boxed{\text{On en déduit : } X_1 \hookrightarrow \mathcal{B}\left(\frac{b}{s}\right).\ \text{Donc : } u_1 = \mathbb{E}(X_1) = \frac{b}{s}.}$$

□

b) Calculer la probabilité $\mathbb{P}(B_2)$ et vérifier l'égalité : $\mathbb{P}(B_2) = \dfrac{b+1-u_1}{s}$.

Démonstration.
La famille $(B_1, \overline{B_1})$ forme un système complet d'événements.
Ainsi, d'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(B_2) &= \mathbb{P}(B_1 \cap B_2) + \mathbb{P}\left(\overline{B_1} \cap B_2\right) \\ &= \mathbb{P}(B_1)\,\mathbb{P}_{B_1}(B_2) + \mathbb{P}\left(\overline{B_1}\right)\,\mathbb{P}_{\overline{B_1}}(B_2) \quad \textit{(car } \mathbb{P}(B_1) \neq 0 \textit{ et } \mathbb{P}\left(\overline{B_1}\right) \neq 0\textit{)}\end{aligned}$$

Déterminons $\mathbb{P}_{B_1}(B_2)$ et $\mathbb{P}_{\overline{B_1}}(B_2)$.

- Si l'événement B_1 est réalisé, c'est qu'on a pioché une boule blanche au premier tirage. Elle est remise dans l'urne.
  Dans ce cas, l'événement B_2 est réalisé si et seulement si on a pioché une boule blanche au $2^{\text{ème}}$ tirage dans l'urne contenant toujours a boules noires et b boules blanches. Ainsi :
  $$\mathbb{P}_{B_1}(B_2) = \frac{b}{s}$$
- Si l'événement $\overline{B_1}$ est réalisé, c'est qu'on a pioché une boule noire au premier tirage. Elle est remplacée par une boule blanche dans l'urne.
  Dans ce cas, l'événement B_2 est réalisé si et seulement si on a pioché une boule blanche au $2^{\text{ème}}$ tirage dans l'urne contenant alors $a-1$ boules noires et $b+1$ boules blanches. Ainsi :
  $$\mathbb{P}_{\overline{B_1}}(B_2) = \frac{b+1}{s}$$

On obtient :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(B_2) &= \frac{b}{s} \times \frac{b}{s} + \left(1 - \frac{b}{s}\right)\left(\frac{b+1}{s}\right) \\ &= \frac{1}{s}\left(\frac{b^2}{s} + (b+1)\left(1 - \frac{b}{s}\right)\right) \\ &= \frac{1}{s}\left(\cancel{\frac{b^2}{s}} + b - \cancel{\frac{b^2}{s}} + 1 - \frac{b}{s}\right) = \frac{b+1-\frac{b}{s}}{s}\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Or } u_1 = \frac{b}{s} \text{ d'après la question précédente, donc : } \mathbb{P}(B_2) = \frac{b+1-u_1}{s}.}$$

□

c) Soit n un entier naturel vérifiant $1 \leqslant n \leqslant a$.

Montrer : $\forall k \in [\![0, n]\!]$, $\mathbb{P}_{[X_n = k]}(B_{n+1}) = \dfrac{b+n-k}{s}$. En déduire l'égalité : $\mathbb{P}(B_{n+1}) = \dfrac{b+n-u_n}{s}$.

Démonstration.

- Notons tout d'abord qu'en n tirages, on peut piocher de 0 à n boules blanches.
  $$\boxed{\text{On en déduit : } X_n(\Omega) = [\![0, n]\!].}$$
- Soit $k \in [\![0, n]\!]$.
  Si l'événement $[X_n = k]$ est réalisé c'est qu'on a tiré k boules blanches au cours des n premiers tirages. On a donc également tiré $(n-k)$ boules noires que l'on a toutes remplacées par des boules blanches.
  Dans ce cas, l'événément B_{n+1} est réalisé si et seulement si on a tiré une boule blanche lors du $(n+1)^{\text{ème}}$ tirage dans une urne qui contient alors $a-(n-k)$ boules noires et $b+(n-k)$ boules blanches (ce qui est possible car $n \leqslant a$).
  $$\boxed{\text{Ainsi : } \forall k \in [\![0, n]\!],\ \mathbb{P}_{[X_n = k]}(B_{n+1}) = \frac{b+n-k}{s}.}$$

- La famille $([X_n = k])_{k\in[\![0,n]\!]}$ est un système complet d'événements.
  Ainsi, d'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{array}{rcll}
\mathbb{P}(B_{n+1}) & = & \sum\limits_{k=0}^{n} \mathbb{P}\left([X_n = k] \cap B_{n+1}\right) & \\
& = & \sum\limits_{k=0}^{n} \mathbb{P}([X_n = k])\, \mathbb{P}_{[X_n=k]}(B_{n+1}) & \textit{(car } \mathbb{P}([X_n = k]) \neq 0\textit{)} \\
& = & \sum\limits_{k=0}^{n} \mathbb{P}([X_n = k])\ \dfrac{b+n-k}{s} & \textit{(d'après le point précédent)} \\
& = & \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{b+n}{s}\ \mathbb{P}([X_n = k]) - \dfrac{1}{s} \sum\limits_{k=0}^{n} k\, \mathbb{P}([X_n = k]) & \\
& = & \dfrac{b+n}{s} \sum\limits_{k=0}^{n} \mathbb{P}([X_n = k]) - \dfrac{1}{s}\ \mathbb{E}(X_n) & \textit{(par définition de l'espérance)} \\
& = & \dfrac{b+n}{s} \times 1 - \dfrac{1}{s}\ \mathbb{E}(X_n) & \textit{(car } ([X_n = k])_{k\in[\![0,n]\!]} \textit{ est un système complet d'événements)} \\
& = & \dfrac{b+n}{s} - \dfrac{1}{s}\ u_n & \textit{(par définition de } u_n\textit{)} \\
& = & \dfrac{b+n-u_n}{s} &
\end{array}$$

$$\boxed{\mathbb{P}(B_{n+1}) \ = \ \dfrac{b+n-u_n}{s}}$$

□

d) Soit n un entier naturel vérifiant $n > a$.
Si $k \in [\![0, n-a-1]\!]$, quel est l'événement $[X_n = k]$?
Si $k \in [\![n-a, n]\!]$, justifier l'égalité : $\mathbb{P}_{[X_n=k]}(B_{n+1}) = \dfrac{b+n-k}{s}$.
Montrer enfin que l'égalité : $\mathbb{P}(B_{n+1}) = \dfrac{b+n-u_n}{s}$ est encore vérifiée.

Démonstration.

- Si $k \in [\![0, n-a-1]\!]$, alors l'événement $[X_n = k]$ est réalisé si et seulement si on a pioché k boules blanches lors des n premiers tirages. Cela signifie que l'on a pioché $n-k$ boules noires. Or :

$$0 \leqslant k \leqslant n-a-1 \ \Leftrightarrow\ 0 \geqslant -k \geqslant -n+a+1 \ \Leftrightarrow\ n \geqslant n-k \geqslant \cancel{n} - \cancel{n} + a + 1$$

  L'urne contient initialement a boules noires, il est donc impossible d'en pioché plus de $a+1$.

$$\boxed{\text{On en déduit : } \forall k \in [\![0, n-a-1]\!],\ [X_n = k] = \varnothing.}$$

- Si $k \in [\![n-a, n]\!]$.
  Si l'événement $[X_n = k]$ est réalisé, alors on a tiré k boules blanches au cours des n premiers tirages. On a donc également tiré $(n-k)$ boules noires que l'on a toutes remplacées par des boules blanches. À la fin du $n^{\text{ème}}$ tirage, l'urne contient donc $a-(n-k)$ boules noires et $b+(n-k)$ boules blanches. Ce qui est possible car :

$$n-a \leqslant k \leqslant n \ \Leftrightarrow\ -n+a \geqslant -k \geqslant -n \ \Leftrightarrow\ \cancel{n} - \cancel{n} + a \geqslant n-k \geqslant 0$$

$$\boxed{\text{On en déduit : } \forall k \in [\![n-a, n]\!],\ \mathbb{P}_{[X_n=k]}(B_{n+1}) = \dfrac{b+n-k}{s}.}$$

- Comme, pour tout $k \in [\![0, n-a-1]\!]$, $[X_n = k] = \varnothing$, on en déduit : $X(\Omega) = [\![n-a, n]\!]$.
  Donc la famille $([X_n = k])_{k \in [\![n-a,n]\!]}$ forme un système complet d'événements.

> Ainsi, en appliquant la formule des probabilités totales sur ce système complet d'événements et avec les mêmes arguments qu'en question précédente, on obtient :
> $$\mathbb{P}(B_{n+1}) = \frac{b+n-u_n}{s}$$
> □

3. **Calcul des nombres u_n et $\mathbb{P}(B_n)$**

a) Soit n un entier naturel non nul. établir, pour tout entier k de l'intervalle $[n+1-a, n]$ l'égalité :

$$\mathbb{P}\big([X_{n+1} = k]\big) = \frac{a-n+k}{s}\,\mathbb{P}\big([X_n = k]\big) + \frac{b+n-k+1}{s}\,\mathbb{P}\big([X_n = k-1]\big)$$

Vérifier cette égalité pour $k = n+1$, $k = n-a$ et pour tout $k \in [\![1, n-a-1]\!]$.

Démonstration.

- Soit $k \in [\![n+1-a, n]\!]$.
  La famille $(B_{n+1}, \overline{B_{n+1}})$ est un système complet d'événements.
  Ainsi, par formule des probabilités totales :
  $$\mathbb{P}([X_{n+1} = k]) = \mathbb{P}([X_{n+1} = k] \cap B_{n+1}) + \mathbb{P}\big([X_{n+1} = k] \cap \overline{B_{n+1}}\big)$$
- Or :
  × tout d'abord :
  $$[X_{n+1} = k] \cap B_{n+1} = [X_n = k-1] \cap B_{n+1}$$
  × de plus :
  $$[X_{n+1} = k] \cap \overline{B_{n+1}} = [X_n = k] \cap \overline{B_{n+1}}$$
- On en déduit :

$$\begin{aligned}
& \mathbb{P}([X_{n+1} = k]) \\
= \; & \mathbb{P}([X_n = k-1] \cap B_{n+1}) + \mathbb{P}\big([X_n = k] \cap \overline{B_{n+1}}\big) \\
= \; & \mathbb{P}([X_n = k-1])\,\mathbb{P}_{[X_n = k-1]}(B_{n+1}) + \mathbb{P}([X_n = k])\,\mathbb{P}_{[X_n = k]}\big(\overline{B_{n+1}}\big) && \textit{(car } (k-1, k) \in \big(X_n(\Omega)\big)^2 \textit{ avec } X_n(\Omega) = [\![n-a, n]\!]\textit{)} \\
= \; & \mathbb{P}([X_n = k-1])\,\frac{b+n-k+1}{s} + \mathbb{P}([X_n = k])\,\big(1 - \mathbb{P}_{[X_n = k]}(B_{n+1})\big) && \textit{(d'après } \textbf{2.d)}\textit{)} \\
= \; & \mathbb{P}([X_n = k-1])\,\frac{b+n-k+1}{s} + \mathbb{P}([X_n = k])\left(1 - \frac{b+n-k}{s}\right) && \textit{(d'après } \textbf{2.d)}\textit{)} \\
= \; & \frac{b+n-k+1}{s}\,\mathbb{P}([X_n = k-1]) + \mathbb{P}([X_n = k])\,\frac{a-n+k}{s} && \textit{(car } a = s-b\textit{)}
\end{aligned}$$

> On en déduit, pour tout $k \in [\![n-a, n]\!]$:
> $$\mathbb{P}([X_{n+1} = k]) = \frac{b+n-k+1}{s}\,\mathbb{P}([X_n = k-1]) + \frac{a-n+k}{s}\,\mathbb{P}([X_n = k]).$$

- Cas $k = n+1$.
  - $\times$ D'une part, l'événement $[X_{n+1} = n+1]$ est réalisé si et seulement si on a tiré que des boules blanches. Donc :
  $$[X_{n+1} = n+1] \ = \ [X_n = n] \cap B_{n+1}$$
  Donc :
  $$\begin{aligned} \mathbb{P}([X_{n+1} = n+1]) &= \mathbb{P}([X_n = n] \cap B_{n+1}) \ = \ \mathbb{P}([X_n = n]) \ \mathbb{P}_{[X_n=n]}(B_{n+1}) \\ &= \mathbb{P}([X_n = n]) \ \frac{b + \cancel{n} - \cancel{n}}{s} && \textit{(d'après } \textbf{2.d)}\textit{)} \\ &= \frac{b}{s} \ \mathbb{P}([X_n = n]) \end{aligned}$$
  - $\times$ D'autre part, comme $[X_n = n+1] = \varnothing$:
  $$\frac{a - n + (n+1)}{s} \ \cancel{\mathbb{P}([X_n = n+1])} + \frac{b + \cancel{n} - (\cancel{n} + \cancel{1}) + \cancel{1}}{s} \ \mathbb{P}([X_n = n]) \ = \ \frac{b}{s} \ \mathbb{P}([X_n = n])$$
  $$\boxed{\text{L'égalité est toujours vérifiée pour } k = n+1.}$$
- Cas $k = n - a$.
  - $\times$ D'une part, on a toujours :
  $$\mathbb{P}([X_{n+1} = n-a]) \ = \ \mathbb{P}([X_n = n-a-1] \cap B_{n+1}) + \mathbb{P}\big([X_n = n-a] \cap \overline{B_{n+1}}\big)$$
  Or :
  $$[X_n = n-a-1] \cap B_{n+1} \ = \ \varnothing \cap B_{n+1} \ = \ \varnothing$$
  On en déduit :
  $$\begin{aligned} \mathbb{P}([X_{n+1} = n-a]) &= \mathbb{P}\big([X_n = n-a] \cap \overline{B_{n+1}}\big) \\ &= \mathbb{P}([X_n = n-a]) \ \mathbb{P}_{[X_n=n-a]}(\overline{B_{n+1}}) \\ &= \mathbb{P}([X_n = n-a]) \ \big(1 - \mathbb{P}_{[X_n=n-a]}(B_{n+1})\big) \\ &= \mathbb{P}([X_n = n-a]) \ \left(1 - \frac{b + n - (n-a)}{s}\right) \\ &= \left(1 - \frac{a+b}{s}\right) \ \mathbb{P}([X_n = n-a]) \\ &= \cancel{(1-1)} \ \mathbb{P}([X_n = n-a]) \ = \ 0 \end{aligned}$$
  - $\times$ D'autre part :
  $$\begin{aligned} & \frac{a - n + (n-a)}{s} \ \mathbb{P}([X_n = n-a]) + \frac{b + n - (n-a) + 1}{s} \ \mathbb{P}([X_n = n-a-1]) \\ = \ & 0 \times \mathbb{P}([X_n = n-a]) + \frac{b+a+1}{s} \times 0 \ = \ 0 \end{aligned}$$
  où l'avant-dernière égalité est vérifiée car $[X_n = n-a-1] = \varnothing$.
  $$\boxed{\text{L'égalité est toujours vérifiée pour } k = n-a.}$$

- Cas $k \in [\![1, n-a-1]\!]$.
  - × D'une part, l'événement $[X_{n+1} = k]$ est réalisé si et seulement si on a pioché k boules blanches lors des $(n+1)$ premiers tirages. Cela signifie que l'on a pioché $n-k$ boules noires. Or :
  $$1 \leqslant k \leqslant n-a-1 \ \Leftrightarrow \ -1 \geqslant -k \geqslant -n+a+1 \ \Leftrightarrow \ n-1 \geqslant n-k \geqslant \cancel{n} - \cancel{n} + a + 1$$
  L'urne contient initialement a boules noires, il est donc impossible d'en pioché plus de $a+1$. On en déduit : $\forall k \in [\![1, n-a-1]\!]$, $[X_{n+1} = k] = \varnothing$. Donc :
  $$\mathbb{P}([X_{n+1} = k]) \ = \ 0$$
  - × D'autre part, comme d'après ***2.d)*** $[X_n = k] = \varnothing$ et $[X_n = k-1] = \varnothing$, on a :
  $$\frac{a-n+k}{s} \ \cancel{\mathbb{P}([X_n = n+1])} + \frac{b+n-k+1}{s} \ \cancel{\mathbb{P}([X_n = n])} \ = \ 0$$
  $$\boxed{\text{L'égalité est vérifiée pour } k \in [\![1, n-a-1]\!].}$$ □

b) Calculer, pour tout entier naturel n non nul, u_{n+1} en fonction de u_n et de n.
En déduire que la suite $(u_n)_{n \geqslant 1}$ appartient à l'ensemble A étudié dans la question 1.

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

- Par définition de $u_{n+1} = \mathbb{E}(X_{n+1})$:

$$\begin{array}{rll}
& u_{n+1} & \\
= & \sum\limits_{k=0}^{n+1} k\,\mathbb{P}([X_{n+1} = k]) \ = \ \sum\limits_{k=1}^{n+1} k\,\mathbb{P}([X_{n+1} = k]) & \\
= & \sum\limits_{k=1}^{n+1} k \left(\dfrac{b+n-k+1}{s} \ \mathbb{P}([X_n = k-1]) + \dfrac{a-n+k}{s} \ \mathbb{P}([X_n = k]) \right) & \textit{(d'après 3.a))} \\
= & \sum\limits_{k=1}^{n+1} k \ \dfrac{b+n-k+1}{s} \ \mathbb{P}([X_n = k-1]) + \sum\limits_{k=1}^{n+1} k \ \dfrac{a-n+k}{s} \ \mathbb{P}([X_n = k]) & \\
= & \sum\limits_{k=0}^{n} (k+1) \ \dfrac{b+n-k}{s} \ \mathbb{P}([X_n = k]) + \sum\limits_{k=1}^{n+1} k \ \dfrac{a-n+k}{s} \ \mathbb{P}([X_n = k]) & \textit{(par décalage d'indice)} \\
= & \sum\limits_{k=0}^{n} k \ \dfrac{b+n-k}{s} \ \mathbb{P}([X_n = k]) + \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{b+n-k}{s} \ \mathbb{P}([X_n = k]) & \\
+ & \sum\limits_{k=1}^{n} k \ \dfrac{a-n+k}{s} \ \mathbb{P}([X_n = k]) + (n+1) \dfrac{a+1}{s} \ \mathbb{P}([X_n = n+1]) & \\
= & \sum\limits_{k=0}^{n} k \ \dfrac{b+n-k}{s} \ \mathbb{P}([X_n = k]) + \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{b+n-k}{s} \ \mathbb{P}([X_n = k]) & \\
+ & \sum\limits_{k=0}^{n} k \ \dfrac{a-n+k}{s} \ \mathbb{P}([X_n = k]) & \textit{(car } [X_n = n+1] = \varnothing\textit{)} \\
= & \sum\limits_{k=0}^{n} k \left(\dfrac{b+n-k}{s} + \dfrac{a-n+k}{s} \right) \mathbb{P}([X_n = k]) + \mathbb{P}(B_{n+1}) &
\end{array}$$

  En effet, d'après les questions ***2.c)*** et ***2.d)*** :
  $$\mathbb{P}(B_{n+1}) \ = \ \sum_{k=0}^{n} \frac{b+n-k}{s} \ \mathbb{P}([X_n = k])$$

On en déduit :

$$\begin{aligned}
u_{n+1} &= \sum_{k=0}^{n} k \ \frac{a+b}{s} \ \mathbb{P}([X_n = k]) + \frac{b+n-u_n}{s} \qquad \textit{(d'après } \textbf{\textit{2.d)}}\textit{)} \\
&= \sum_{k=0}^{n} k \ \frac{s}{s} \ \mathbb{P}([X_n = k]) + \frac{b+n-u_n}{s} \\
&= \sum_{k=0}^{n} k \ \mathbb{P}([X_n = k]) + \frac{b+n-u_n}{s} \\
&= \mathbb{E}(X_n) + \frac{b+n-u_n}{s} \\
&= u_n + \frac{b+n-u_n}{s}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \ u_{n+1} = \frac{s-1}{s} \ u_n + \frac{b+n}{s}}$$

- Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
  En multipliant par s l'égalité précédente, on obtient :

$$s \, u_{n+1} \ = \ (s-1)u_n + b + n$$

$$\boxed{\text{La suite } (u_n)_{n\geqslant 1} \text{ appartient à } A.}$$

□

c) Donner, pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, les valeurs de u_n et de $\mathbb{P}(B_{n+1})$ en fonction de b, s et n.

Démonstration.

- Soit $n \in \mathbb{N}^*$. D'après la question ***1.b)*** :

$$u_n \ = \ \left(\frac{s-1}{s}\right)^{n-1} (u_1 - 1 - b + s) + n + b - s$$

$$\boxed{\text{D'après } \textbf{\textit{2.a)}} : \forall n \in \mathbb{N}^*, \ u_n = \left(\frac{s-1}{s}\right)^{n-1} \left(\frac{b}{s} - 1 - b + s\right) + n + b - s.}$$

- Soit $n \in \mathbb{N}^*$. D'après les questions ***2.c)*** et ***2.d)*** :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(B_{n+1}) &= \frac{b+n-u_n}{s} \\
&= \frac{1}{s}\left(\cancel{b+n} - \left(\left(\frac{s-1}{s}\right)^{n-1} (u_1 - 1 - b + s) + \cancel{n+b} - s\right)\right) \qquad \textit{(d'après le point précédent)} \\
&= -\frac{1}{s}\left(\frac{s-1}{s}\right)^{n-1} \left(\frac{b}{s} - 1 - b + s\right) + 1
\end{aligned}$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \ \mathbb{P}(B_{n+1}) = 1 - \frac{1}{s}\left(\frac{s-1}{s}\right)^{n-1} \left(\frac{b}{s} - 1 - b + s\right)}$$

□

d) Quelles sont les limites des suites $(u_n)_{n\geqslant 1}$ et $\big(\mathbb{P}(B_n)\big)_{n\geqslant 1}$?

Démonstration.

- La suite $\left(\left(\dfrac{s-1}{s}\right)^{n-1}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite géométrique de raison $\dfrac{s-1}{s}$ avec $\left|\dfrac{s-1}{s}\right| < 1$.
  Donc :
  $$\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{s-1}{s}\right)^{n-1} = 0$$
- De plus $\lim\limits_{n\to+\infty} n+b-s = +\infty$.

$$\boxed{\text{On en déduit : } \lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty.}$$

- Enfin :
  $$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(B_{n+1}) \ = \ 1 - \frac{1}{s} \times 0 \times \left(\frac{b}{s} - 1 - b + s\right) \ = \ 1 - 0$$

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(B_{n+1}) = 1}$$

□