DS4 (version A)

Exercice 1 (EDHEC S 2015)

Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on pose $I_n = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^n\,(x+1)}\,dx$.

1. Vérifier que I_n est une intégrale convergente.

2. ***a)*** Déterminer deux réels a et b tels que pour tout x différent de -1 et de 0, on ait :

$$\frac{1}{x\,(x+1)} = \frac{a}{x} - \frac{b}{x+1}$$

b) En déduire la valeur de I_1.

3. ***a)*** Montrer que pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, on a :

$$0 \leqslant I_n \leqslant \frac{1}{2(n-1)}$$

b) En déduire l'existence et la valeur de $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$.

4. ***a)*** Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, calculer $I_n + I_{n+1}$.

b) Montrer que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante.

c) En déduire un équivalent de I_n puis donner la nature de la série de terme général I_n.

5. Pour tout n de $\mathbb{N}$, on pose $J_n = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^n\,(x+1)^2}\,dx$.

a) Montrer que J_n est une intégrale convergente.

b) Calculer J_0.

6. ***a)*** Pour tout k de $\mathbb{N}^*$, exprimer $J_k + J_{k-1}$ en fonction de I_k.

b) Déterminer alors pour tout n de $\mathbb{N}^*$, l'expression de $\sum\limits_{k=1}^{n} (-1)^{k-1}\, I_k$ en fonction de J_n.

c) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}\ ,\ n \geqslant 2\ ,\ 0 \leqslant J_n \leqslant \dfrac{1}{4(n-1)}$. Donner la valeur de $\lim\limits_{n\to+\infty} J_n$.
En déduire que la série de terme général $(-1)^{n-1}\, I_n$ est convergente et donner sa somme.

7. À l'aide des questions ***4.a)*** et ***6.a)***, compléter les commandes Scilab suivantes afin qu'elles permettent le calcul de I_n et J_n pour une valeur de n, supérieure ou égale à 2, entrée par l'utilisateur.

```
n = input('Entrer une valeur de n supérieure ou égale à 2 : ')
I = log(2) ; J = 1/2 ; J = ----
for k = 2:n
  I = ---- ; J = ---- ;
end
disp(I, 'la valeur de I est :')
disp(J, 'la valeur de J est :')
```

Exercice 2 (EDHEC S 2018)

Si k est un entier naturel non nul, alors pour tout endomorphisme f d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E, on note $f^k = f \circ f \circ \cdots \circ f$ (où l'endomorphisme f apparaît k fois dans cette composition) et on pose $f^0 = \mathrm{id}_E$, où id_E est l'endomorphisme identité de E. On dit que l'endomorphisme f est nilpotent d'indice k ($k \in \mathbb{N}^*$) si $f^k = 0$ et $f^{k-1} \neq 0$. De plus, on note I_2 la matrice identité de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ et on dit qu'une matrice A de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ est nilpotente d'indice k ($k \in \mathbb{N}^*$) si $A^k = 0$ et $A^{k-1} \neq 0$ (avec la convention $A^0 = I_2$).

Partie 1

Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ une matrice non nulle de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.

1. Calculer $A^2 - (a+d)\,A$ en fonction de I_2.

2. On suppose dans cette question que A est nilpotente d'indice k.

a) Établir l'égalité : $ad - bc = 0$.

b) Montrer que k est supérieur ou égal à 2.

c) En déduire alors : $a + d = 0$.

3. Conclure : A nilpotente $\Leftrightarrow A^2 = 0$.

Partie 2

Dans cette partie, f désigne un endomorphisme non nul d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E de dimension 2.

4. ***a)*** Montrer que, si $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Im}(f)$, alors on a : $f^2 = 0$.

b) On suppose que $f^2 = 0$. Montrer : $\mathrm{Im}(f) \subset \mathrm{Ker}(f)$. Établir alors que $\mathrm{rg}(f) = 1$ puis conclure : $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Im}(f)$.

c) En déduire, à l'aide de la **Partie 1**, l'équivalence : f est nilpotent $\Leftrightarrow \mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Im}(f)$.

On suppose dans toute la suite que f est nilpotent et on en étudie quelques propriétés.

5. Montrer qu'il existe une base de E dans laquelle la matrice A de f est : $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

6. On souhaite montrer par l'ébsurde qu'il est impossible de trouver deux endomorphismes u et v de E, nilpotents et tels que $f = u \circ v$. On suppose donc que ces deux endomorphismes existente.

a) Montrer les inclusions : $\mathrm{Im}(f) \subset \mathrm{Im}(u)$ et $\mathrm{Ker}(v) \subset \mathrm{Ker}(f)$.

b) En déduire les égalités : $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Im}(u)$ et $\mathrm{Ker}(v) = \mathrm{Ker}(f)$.

c) En déduire l'égalité : $\mathrm{Ker}(u) = \mathrm{Im}(v)$.

d) Conclure.

Exercice 3 (EDHEC E 2012)

On désigne par n un entier naturel supérieur ou égal à 2. On note p un réel de $]0,1[$ et on pose $q = 1-p$.
On dispose d'une pièce donnant 'Pile' avec la probabilité p et 'Face' avec la probabilité q.
On lance cette pièce et on arrête les lancers dans l'une des deux situations suivantes :

- soit si l'on a obtenu 'Pile',
- soit si l'on a obtenu n fois 'Face'.

Pour tout entier naturel k non nul, on note P_k (respectivement F_k l'événement « on obtient 'Pile' (respectivement 'Face') au $k^{\text{ème}}$ lancer ».
On note T_n le nombre de lancers effectués, X_n le nombre de 'Pile' obtenus et enfin Y_n le nombre de 'Face' obtenus. On admet que T_n , X_n et Y_n sont des variables aléatoires toutes les trois définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ que l'on ne cherchera pas à préciser.

1. Loi de T_n.

a) Pour tout k de $[\![1, n-1]\!]$, déterminer, en distinguant le cas $k = 1$, la probabilité $\mathbb{P}([T_n = k])$.

b) Déterminer $\mathbb{P}([T_n = n])$.

c) Vérifier : $\sum\limits_{k=1}^{n} \mathbb{P}([T_n = k]) = 1$.

d) Établir que T_n possède une espérance et vérifier : $\mathbb{E}(T_n) = \dfrac{1-q^n}{1-q}$.

2. Loi de X_n.

a) Donner la loi de X_n.

b) Vérifier : $\mathbb{E}(X_n) = 1 - q^n$.

3. Loi de Y_n.

a) Déterminer, pour tout k de $[\![0, n-1]\!]$, la probabilité $\mathbb{P}([Y_n = k])$.

b) Déterminer $\mathbb{P}([Y_n = n])$.

c) Écrire une égalité liant les variables aléatoires T_n, X_n et Y_n, puis en déduire $\mathbb{E}(Y_n)$.

4. Montrer que la suite $(T_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en loi vers une variable aléatoire T dont on donnera la loi.

5. Simulation informatique.
On rappelle que l'appel `grand(1,1,'bin',1,p)` renvoie une réalisation d'une v.a.r. suivant une loi de Bernoulli de paramètre `p`. Compléter les quatre instructions manquantes pour que le programme suivant simule l'expérience aléatoire décrite ci-dessus et pour qu'il affiche, dans cet ordre, les valeurs prises par les variables aléatoires T_n, X_n et Y_n, à l'exécution de l'instruction `disp([t, x, y])`.

```
p = input('Entrez un reel p :')
n = input('Entrez un entier n :')
t = 0 ; x = 0 ; y = 0 ;
while (x == 0) & (t < n)
  ----------
  if lancer == 0 then
    ----------
    ----------
  else
    ----------
  end
end
disp([t, x, y])
```

Exercice 4 (EML S 2014)

On note E le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ continues, E_1 le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$. On remarquera que E_1 est inclus dans E.
On note, pour tout élément f de E, $T(f)$ l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie, pour tout $x \in \mathbb{R}$, par :

$$T(f)(x) \;=\; \frac{1}{2} \int_{x-1}^{x+1} f(t)\ dt$$

Partie I : Propriétés générales de T

1. Établir que, pour tout élément f de E, $T(f)$ appartient à E_1 et que, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\big(T(f)\big)'(x) \;=\; \frac{1}{2}\big(f(x+1) - f(x-1)\big)$$

On note $T : E \to E$ l'application qui, à f, associe $T(f)$.

2. Montrer que T est un endomorphisme de E.

3. Est-ce que T est surjectif ?

4. Soit $f \in E$. Montrer que, si f est paire (respectivement impaire), alors $T(f)$ est paire (respectivement impaire).
À cet effet, on pourra utiliser le changement de variable $u = -t$ dans une intégrale.

5. Soit $f \in E$.

a) On suppose que l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\ dt$ converge.
On introduit alors la fonction $R : x \mapsto \displaystyle\int_{x}^{+\infty} f(t)\ dt$. Montrer : $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} R(x) = 0$.

b) Montrer que, si l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\ dt$ converge, alors $T(f)(x)$ tend vers 0 lorsque x tend vers $+\infty$ et lorsque x tend vers $-\infty$.

Partie II : Un exemple

On note, pour tout $a \in \mathbb{R}$: $f_a : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f_a(t) = \mathrm{e}^{at} \end{array}$

6. Calculer, pour tout $a \in \mathbb{R}$ et tout $x \in \mathbb{R}$, $T(f_a)(x)$.
On note : $\varphi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ a & \mapsto & \varphi(a) = \begin{cases} \dfrac{\mathrm{e}^{a} - \mathrm{e}^{-a}}{2a} & \text{si } a \neq 0 \\ 1 & \text{si } a = 0 \end{cases} \end{array}$

7. Établir : $\forall a \in \mathbb{R},\ T(f_a) = \varphi(a)\, f_a$.

8. Montrer que φ est continue sur $\mathbb{R}$ et dérivable sur $]-\infty, 0[$ et $]0, +\infty[$.
Calculer, pour tout $a \in \mathbb{R}$, $\varphi'(a)$. *On admet que φ est dérivable en 0 et $\varphi'(0) = 0$.*
Étudier, selon $a \in \mathbb{R}$, le signe de $\mathrm{e}^{a}\,(a-1) + \mathrm{e}^{-a}\,(a+1)$.
En déduire les variations de φ et tracer l'allure de sa représentation graphique.

9. En déduire que, pour tout $\lambda \in [1, +\infty[$, il existe $f \in E \setminus \{0\}$ tel que : $T(f) = \lambda\, f$.