DS4 (version A)

Exercice 1 (EDHEC S 2015)

Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on pose $I_n = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^n\,(x+1)}\,dx$.

1. Vérifier que I_n est une intégrale convergente.

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

- La fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x^n(x+1)}$ est continue sur $[1,+\infty[$ en tant qu'inverse d'une fonction continue sur $[1,+\infty[$ et qui ne s'annule pas sur cet intervalle.
- De plus :
  - × $\forall x \in [1,+\infty[,\ \dfrac{1}{x^{n+1}} \geqslant 0$
  - × $\dfrac{1}{x^n(x+1)} \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{x^{n+1}}$ (car : $x+1 \underset{x\to+\infty}{\sim} x$ et donc : $x^n(x+1) \underset{x\to+\infty}{\sim} x^n\ x = x^{n+1}$)
  - × L'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{n+1}}\,dx$ est une intégrale de Riemann, impropre en $+\infty$, d'exposant $n+1$ ($n+1>1$). Elle est donc convergente.

$$\boxed{\text{Par critère d'équivalence des intégrales généralisées de fonctions continues positives, pour tout } n \in \mathbb{N}^*,\ I_n \text{ est convergente.}}$$

□

2. a) Déterminer deux réels a et b tels que pour tout x différent de -1 et de 0, on ait :

$$\frac{1}{x\,(x+1)} = \frac{a}{x} - \frac{b}{x+1}$$

Démonstration.
Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$.

$$\begin{array}{rll}
 & \forall x \in \mathbb{R}\setminus\{-1,0\},\ \dfrac{a}{x} - \dfrac{b}{x+1} = \dfrac{1}{x(x+1)} & \\
\Leftrightarrow & \forall x \in \mathbb{R}\setminus\{-1,0\},\ a(x+1) - bx = 1 & \textit{(car } x(x+1) \neq 0\textit{)} \\
\Leftrightarrow & \forall x \in \mathbb{R}\setminus\{-1,0\},\ (a-b)x + (a-1) = 0 & \\
\Leftrightarrow & \left\{\begin{array}{ccccc} a & - & b & = & 0 \\ a & - & 1 & = & 0 \end{array}\right. & \textit{(par identification)} \\
\Leftrightarrow & \{a = b = 1 &
\end{array}$$

$$\boxed{\text{Finalement } a = b = 1, \text{ c'est-à-dire : } \forall x \in \mathbb{R}\setminus\{-1,0\},\ \frac{1}{x(x+1)} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}.}$$

Commentaire

Détaillons l'argument de l'identification. Il y a deux manières de voir les choses.

1) Tout d'abord :

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 0\}, \ (a-b)x + (a-1) = 0$$

Autrement dit, le polynôme $P(X) = (a-b)X + (a-1)$ admet une infinité de racines (tous les réels sauf -1 et 0). C'est donc le polynôme nul. Ainsi, tous ses coefficients sont nuls, c'est-à-dire :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} a-b & = & 0 \\ a-1 & = & 0 \end{array} \right.$$

2) En notant $P_0(X) = 1$ et $P_1(X) = X$, on obtient :

$$\begin{array}{rcl} \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 0\}, \ (a-b)x + (a-1) = 0 & \Leftrightarrow & (a-b)X + (a-1) = 0 \\ & \Leftrightarrow & (a-b)P_1 + (a-1)P_0 = 0_{\mathbb{R}[X]} \end{array}$$

Or la famille (P_0, P_1) est une famille libre de $\mathbb{R}[X]$. Donc :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} a-b & = & 0 \\ a-1 & = & 0 \end{array} \right.$$

□

b) En déduire la valeur de I_1.

Démonstration.

- D'après la question ***1.***, on sait déjà que I_1 est convergente.
- Soit $A \in [1, +\infty[$.

$$\begin{array}{rcll} \displaystyle\int_1^A \frac{1}{x(x+1)} \, dx & = & \displaystyle\int_1^A \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} \, dx & \textit{(d'après la question précédente)} \\ & = & \displaystyle\int_1^A \frac{1}{x} \, dx - \int_1^A \frac{1}{x+1} \, dx & \textit{(par linéarité de l'intégrale)} \\ & = & \Big[\ln\big(|x|\big) \Big]_1^A - \Big[\ln\big(|x+1|\big) \Big]_1^A & \\ & = & \ln(A) - \cancel{\ln(1)} - \big(\ln(A+1) - \ln(2) \big) & \\ & = & \ln\left(\dfrac{A}{A+1}\right) + \ln(2) & \end{array}$$

- Or : $\displaystyle\lim_{A \to +\infty} \frac{A}{A+1} = 1$. Donc : $\displaystyle\lim_{A \to +\infty} \ln\left(\frac{A}{A+1}\right) = \ln(1) = 0$.

$$\boxed{\text{On en déduit : } I_1 = \ln(2).}$$

Commentaire

On rappelle que la linéarité de l'intégrale n'est vérifiée que pour des intégrales **convergentes**. Les intégrales $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x} \, dx$ et $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x+1} \, dx$ étant divergentes, il était indispensable pour cette question de se placer sur un segment (ici $[1, A]$) pour pouvoir appliquer la linéarité.

□

3. a) Montrer que pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, on a :

$$0 \leqslant I_n \leqslant \frac{1}{2(n-1)}$$

Démonstration.
Soit $n \geqslant 2$.

- Soit $x \in [1, +\infty[$.

$$\begin{array}{lll} \text{Alors} & x \geqslant 1 & \\ \text{donc} & 1 + x \geqslant 2 & \\ \text{d'où} & \dfrac{1}{1+x} \leqslant \dfrac{1}{2} & \textit{(par décroissance de } t \mapsto \dfrac{1}{t} \textit{ sur }]0, +\infty[\textit{)} \\ \text{et} & \dfrac{1}{x^n(x+1)} \leqslant \dfrac{1}{2x^n} & \textit{(car } x > 0\textit{)} \end{array}$$

$$\boxed{\text{On obtient : } 0 \leqslant \frac{1}{x^n(x+1)} \leqslant \frac{1}{2x^n}.}$$

- Soit $A \in [1, +\infty[$.
  Par croissance de l'intégrale, les bornes étant dans l'ordre croissant :

$$0 \leqslant \int_1^A \frac{1}{x^n(x+1)}\, dx \leqslant \int_1^A \frac{1}{2x^n}\, dx$$

  Tout d'abord, d'après la question ***1.***, I_n est convergente. Donc :

$$\lim_{A \to +\infty} \int_1^A \frac{1}{x^n(x+1)}\, dx = I_n$$

  D'autre part :

$$\begin{array}{rcl} \displaystyle\int_1^A \frac{1}{2x^n}\, dx & = & \displaystyle\frac{1}{2} \int_1^A x^{-n}\, dx \; = \; \frac{1}{2} \left[\frac{1}{-n+1}\, x^{-n+1} \right]_1^A \\ & = & \displaystyle -\frac{1}{2(n-1)} \left(A^{-n+1} - 1\right) \; = \; \frac{1}{2(n-1)} \left(1 - \frac{1}{A^{n-1}}\right) \\ & \underset{A \to +\infty}{\longrightarrow} & \displaystyle\frac{1}{2(n-1)} \end{array}$$

$$\boxed{\text{Ainsi, par passage à la limite lorsque } A \text{ tend vers } +\infty, \text{ on obtient bien : } 0 \leqslant I_n \leqslant \frac{1}{2(n-1)}.}$$

Commentaire

On retiendra que la détermination d'un encadrement d'une intégrale s'effectue toujours de la façon suivante :

1) détermination d'un encadrement de son intégrande,

2) utilisation de la croissance de l'intégrale.

□

b) En déduire l'existence et la valeur de $\lim\limits_{n \to +\infty} I_n$.

Démonstration.
D'après la question précédente :

$$\forall n \geqslant 2,\ 0 \leqslant I_n \leqslant \frac{1}{2(n-1)}$$

Or :

× $\lim\limits_{n \to +\infty} 0 = 0$

× $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{2(n-1)} = 0$

$$\boxed{\text{Par théorème d'encadrement : } \lim_{n \to +\infty} I_n = 0.}$$

□

4. a) Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, calculer $I_n + I_{n+1}$.

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $A \in [1, +\infty[$.

$$\begin{array}{rll} & \displaystyle\int_1^A \frac{1}{x^n(x+1)}\,dx + \int_1^A \frac{1}{x^{n+1}(x+1)}\,dx & \\ = & \displaystyle\int_1^A \left(\frac{1}{x^n(x+1)} + \frac{1}{x^{n+1}(x+1)}\right) dx & \textit{(par linéarité de l'intégrale)} \\ = & \displaystyle\int_1^A \left(\frac{x}{x^{n+1}(x+1)} + \frac{1}{x^{n+1}(x+1)}\right) dx & \\ = & \displaystyle\int_1^A \frac{\cancel{x+1}}{x^{n+1}\cancel{(x+1)}}\,dx & \\ = & \displaystyle\int_1^A \frac{1}{x^{n+1}}\,dx & \\ = & \displaystyle\left[-\frac{1}{n}\,\frac{1}{x^n}\right]_1^A & \\ = & \displaystyle -\frac{1}{n}\left[\frac{1}{x^n}\right]_1^A & \\ = & \displaystyle -\frac{1}{n}\left(\frac{1}{A^n} - 1\right) & \\ \underset{A \to +\infty}{\longrightarrow} & \displaystyle\frac{1}{n} & \end{array}$$

$$\boxed{\text{On en déduit : } \forall n \in \mathbb{N}^*,\ I_n + I_{n+1} = \frac{1}{n}.}$$

□

b) Montrer que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante.

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

- Par définition de I_{n+1} et I_n, on obtient :

$$\begin{aligned} I_{n+1} - I_n &= \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{n+1}(x+1)}\, dx - \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^n(x+1)}\, dx \\ &= \int_1^{+\infty} \left(\frac{1}{x^{n+1}(x+1)} - \frac{1}{x^n(x+1)} \right) dx && \textit{(car } I_{n+1} \textit{ et } I_n \textit{ sont convergentes)} \\ &= \int_1^{+\infty} \frac{1-x}{x^{n+1}(x+1)}\, dx \end{aligned}$$

- Soit $x \in [1, +\infty[$. On a :

$$\begin{aligned} \frac{1-x}{x^{n+1}(x+1)} \leqslant 0 &\Leftrightarrow 1 - x \leqslant 0 && \textit{(car } x^{n+1}(x+1) > 0\textit{)} \\ &\Leftrightarrow 1 \leqslant x \end{aligned}$$

Cette dernière assertion est vraie.

$$\boxed{\text{Donc, par équivalence : } \forall x \geqslant 1,\ \frac{1-x}{x^{n+1}(x+1)} \leqslant 0.}$$

- Par croissance de l'intégrale, les bornes étant dans l'ordre croissant, et puisque les intégrales en présence sont convergentes :

$$\underbrace{\int_1^{+\infty} \frac{1-x}{x^{n+1}(x+1)}\, dx}_{= I_{n+1} - I_n} \leqslant 0$$

$$\boxed{\text{La suite } (I_n) \text{ est donc décroissante.}}$$

□

c) En déduire un équivalent de I_n puis donner la nature de la série de terme général I_n.

Démonstration.

- Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
  × La suite (I_n) est décroissante.

$$\begin{array}{cll} \text{Donc} & I_{n+1} \leqslant I_n & \\ \text{et} & I_n + I_{n+1} \leqslant 2\, I_n & \\ \text{ainsi} & \dfrac{1}{n} \leqslant 2\, I_n & \textit{(d'après } \textbf{\textit{4.a)}}\textit{)} \\ \text{d'où} & \dfrac{1}{2n} \leqslant I_n & \end{array}$$

  × D'après la question ***3.a)*** : $I_n \leqslant \dfrac{1}{2(n-1)}$.

$$\boxed{\text{on en déduit : } \forall n \in \mathbb{N}^*,\ \frac{1}{2n} \leqslant I_n \leqslant \frac{1}{2(n-1)}.}$$

- Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On obtient alors :

$$1 \leqslant \frac{I_n}{\frac{1}{2n}} \leqslant \frac{\cancel{2}n}{\cancel{2}(n-1)} = \frac{n}{n-1}$$

Or :

× $\lim\limits_{n \to +\infty} 1 = 1$.

× $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{n}{n-1} = 1$. En effet : $\dfrac{n}{n-1} \underset{n \to +\infty}{\sim} \dfrac{n}{n} = 1$.

Par théorème d'encadrement : $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{I_n}{\frac{1}{2n}} = 1$.

$$\boxed{\text{Finalement : } I_n \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{1}{2n}.}$$

- On obtient :

× $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{1}{2n} \geqslant 0$

× $I_n \underset{n \to +\infty}{\sim} \dfrac{1}{2n}$

× La série $\sum\limits_{n \geqslant 1} \dfrac{1}{n}$ est une série de Riemann d'exposant 1 ($1 \not> 1$). Elle est donc divergente.

On en déduit que la série $\sum\limits_{n \geqslant 1} \dfrac{1}{2n}$ l'est également.

(on ne change pas la nature d'une série en multipliant son terme général par un réel non nul)

$$\boxed{\text{Par critère d'équivalence des séries à termes positifs, } \sum_{n \geqslant 1} I_n \text{ est divergente.}}$$

□

5. Pour tout n de $\mathbb{N}$, on pose $J_n = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^n\,(x+1)^2}\, dx$.

a) Montrer que J_n est une intégrale convergente.

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}$.

- La fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x^n(x+1)^2}$ est continue sur $[1, +\infty[$ en tant qu'inverse d'une fonction continue sur $[1, +\infty[$ et qui ne s'annule pas sur cet intervalle.
- De plus :

× $\forall x \in [1, +\infty[$, $\dfrac{1}{x^{n+2}} \geqslant 0$

× $\dfrac{1}{x^n(x+1)^2} \underset{x \to +\infty}{\sim} \dfrac{1}{x^n\, x^2} = \dfrac{1}{x^{n+2}}$

× L'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{n+2}}\, dx$ est une intégrale de Riemann, impropre en $+\infty$, d'exposant $n+2$ ($n+2 > 1$). Elle est donc convergente.

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{Par critère d'équivalence des intégrales généralisées de fonctions continues positives,}\\ \text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ J_n \text{ est convergente.}\end{array}}$$

□

b) Calculer J_0.

Démonstration.

- On sait déjà que l'intégrale J_0 est convergente d'après la question précédente.
- Soit $A \in [1, +\infty[$.

$$\int_1^A \frac{1}{(x+1)^2}\,dx = \left[-\frac{1}{x+1} \right]_1^A = -\frac{1}{A+1} + \frac{1}{2} \underset{A\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{2}$$

$$\boxed{\text{On en déduit : } J_0 = \frac{1}{2}.}$$

□

6. a) Pour tout k de $\mathbb{N}^*$, exprimer $J_k + J_{k-1}$ en fonction de I_k.

Démonstration.
Soit $k \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned}
J_k + J_{k-1} &= \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^k(x+1)^2}\,dx + \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{k-1}(x+1)^2}\,dx \\
&= \int_1^{+\infty} \left(\frac{1}{x^k(x+1)^2} + \frac{1}{x^{k-1}(x+1)^2} \right) dx && \textit{(car } J_k \textit{ et } J_{k-1} \textit{ sont convergentes)} \\
&= \int_1^{+\infty} \frac{\cancel{1+x}}{x^k(x+1)^{\cancel{2}}}\,dx = \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^k(x+1)}\,dx \\
&= I_k
\end{aligned}$$

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N}^*,\ J_k + J_{k-1} = I_k}$$

□

b) Déterminer alors pour tout n de $\mathbb{N}^*$, l'expression de $\sum\limits_{k=1}^{n} (-1)^{k-1}\, I_k$ en fonction de J_n.

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} I_k &= \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \left(J_k + J_{k-1} \right) && \textit{(d'après } \textbf{\textit{6.a)}}\textit{)} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \left((-1)^{k-1}\, J_k + (-1)^{k-1}\, J_{k-1} \right) \\
&= \sum_{k=1}^{n} \left((-1)^{k-1}\, J_k - (-1)^{k-2}\, J_{k-1} \right) \\
&= (-1)^{n-1}\, J_n - (-1)^{-1}\, J_0 && \textit{(par télescopage)} \\
&= (-1)^{n-1}\, J_n + J_0
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{On en déduit, d'après la question } \textbf{\textit{5.b)}} : \forall n \in \mathbb{N}^*,\ \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} I_k = (-1)^{n-1} J_n + \frac{1}{2}.}$$

□

c) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}\ ,\ n \geqslant 2\ ,\ 0 \leqslant J_n \leqslant \dfrac{1}{4(n-1)}$. Donner la valeur de $\lim\limits_{n\to+\infty} J_n$.
En déduire que la série de terme général $(-1)^{n-1}\, I_n$ est convergente et donner sa somme.

Démonstration.

- Soit $n \geqslant 2$. Soit $x \in [1,+\infty[$.

$$\begin{array}{cll} \text{Alors} & x \geqslant 1 & \\ \text{donc} & x+1 \geqslant 2 & \\ \text{et} & \dfrac{1}{(x+1)^2} \leqslant \dfrac{1}{4} & \textit{(par décroissance de } t \mapsto \dfrac{1}{t^2} \textit{ sur }]0,+\infty[\textit{)} \\ \text{d'où} & \dfrac{1}{x^n(x+1)^2} \leqslant \dfrac{1}{4\,x^n} & \textit{(car } x > 0\textit{)} \end{array}$$

$$\boxed{\text{On obtient : } \forall x \in [1,+\infty[,\ 0 \leqslant \dfrac{1}{x^n(x+1)^2} \leqslant \dfrac{1}{4\,x^n}.}$$

- Soit $A \in [1,+\infty[$.
  Par croissance de l'intégrale, les bornes étant dans l'ordre croissant :

$$0 \quad \leqslant \quad \int_1^A \frac{1}{x^n(x+1)^2}\, dx \quad \leqslant \quad \frac{1}{4}\int_1^A \frac{1}{x^n}\, dx$$

$$\begin{array}{ccc} \Big\downarrow {\scriptstyle A\to+\infty} & & \Big\downarrow {\scriptstyle A\to+\infty} \\ J_n & & \dfrac{1}{4(n-1)} \quad \textit{(d'après le calcul fait en } \textbf{\textit{3.a)}}\textit{)} \end{array}$$

$$\boxed{\text{Finalement : } \forall n \geqslant 2,\ 0 \leqslant J_n \leqslant \dfrac{1}{4(n-1)}.}$$

Commentaire

On utilise ici la même méthode de résolution qu'en question ***3.a)***. Insistons : pour démontrer une inégalité sur des **intégrales**, il faut prendre le réflexe de commencer par démontrer une inégalité sur les **intégrandes**.

- De plus :
  × $\lim\limits_{n\to+\infty} 0 = 0$,
  × $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{4(n-1)} = 0$.

$$\boxed{\text{Par théorème d'encadrement : } \lim\limits_{n\to+\infty} J_n = 0.}$$

- Soit $n \in \mathbb{N}^*$. D'après la question ***6.a)*** :

$$\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} I_k = \frac{1}{2} + (-1)^{n-1} J_n$$

  Or, comme $J_n \geqslant 0$: $-J_n \leqslant (-1)^{n-1} J_n \leqslant J_n$. De plus : $\lim\limits_{n\to+\infty} J_n = 0$.
  Ainsi, par théorème d'encadrement : $\lim\limits_{n\to+\infty} (-1)^{n-1} J_n = 0$.

$$\boxed{\text{On en déduit que la série } \sum_{n\geqslant 1} (-1)^{n-1} I_n \text{ converge et } \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^{k-1} I_k = \dfrac{1}{2}.}$$

□

7. À l'aide des questions ***4.a)*** et ***6.a)***, compléter les commandes **Scilab** suivantes afin qu'elles permettent le calcul de I_n et J_n pour une valeur de n, supérieure ou égale à 2, entrée par l'utilisateur.

```
n = input('Entrer une valeur de n supérieure ou égale à 2 : ')
I = log(2) ; J = 1/2 ; J = ----
for k = 2:n
  I = ---- ; J = ---- ;
end
disp(I, 'la valeur de I est :')
disp(J, 'la valeur de J est :')
```

Démonstration.

- **Début du programme**
  On commence par demander à l'utilisateur d'entrer une valeur pour l'entier `n`.

```
n = input('Entrer une valeur de n supérieure ou égale à 2 : ')
```

On initialise ensuite les variables `I` et `J` :

× on initialise `I` à $I_1 = \ln(2)$ (d'après ***2.b)***).

× on initialise `J` à $J_0 = \dfrac{1}{2}$ (d'après ***5.b)***).

```
I = log(2) ; J = 1/2 ;
```

On met ensuite à jour la variable `J`. On souhaite qu'elle contienne la valeur J_1.
Or, d'après la question ***6.a)*** : $J_1 = I_1 - J_0$. On écrit donc :

```
I = log(2) ; J = 1/2 ; J = I - J ;
```

- **Structure itérative**
  On met ensuite en place une structure itérative (boucle for) pour mettre à jour les variables `I` et `J`. Pour cela on utilise :

× pour la variable `I`, la relation de la question ***4.a)*** : $I_n = \dfrac{1}{n-1} - I_{n-1}$,

× pour la variable `J`, la relation de la question ***6.a)*** : $J_n = I_n - J_{n-1}$.

On obtient alors :

```
for k = 2:n
  I = 1/(k-1) - I ; J = I - J ;
end
```

- **Fin du programme**
  À l'issue de cette boucle for, la variable `I` contient la valeur I_n, et `J` contient la valeur J_n.
  On termine en affichant ces valeurs :

```
disp(I, 'la valeur de I est :')
disp(J, 'la valeur de J est :')
```

Commentaire

Afin de permettre une bonne compréhension des mécanismes en jeu, on a détaillé la réponse à cette question. Cependant, compléter correctement le programme **Scilab** démontre la bonne compréhension de la simulation demandée et permet certainement d'obtenir la majorité des points alloués à cette question. □

Exercice 2 (EDHEC S 2018 Sujet 2)

Si k est un entier naturel non nul, alors pour tout endomorphisme f d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E, on note $f^k = f \circ f \circ \cdots \circ f$ (où l'endomorphisme f apparaît k fois dans cette composition) et on pose $f^0 = \mathrm{id}_E$, où id_E est l'endomorphisme identité de E. On dit que l'endomorphisme f est nilpotent d'indice k ($k \in \mathbb{N}^*$) si $f^k = 0$ et $f^{k-1} \neq 0$. De plus, on note I_2 la matrice identité de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ et on dit qu'une matrice A de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ est nilpotente d'indice k ($k \in \mathbb{N}^*$) si $A^k = 0$ et $A^{k-1} \neq 0$ (avec la convention $A^0 = I_2$).

Commentaire

- Il est important de bien comprendre cette définition pour aborder sereinement cet exercice. Malheureusement, ce paragraphe, s'il présente bien la définition d'**endomorphisme nilpotent d'indice** k, oublie la définition d'**endomorphisme nilpotent** dont on se sert dans la suite.
- Définissons ce terme :

  L'endomorphisme $f \in \mathscr{L}(E)$ est nilpotent $\Leftrightarrow$ $\exists k \in \mathbb{N}^*$, l'endomorphisme f est nilpotent d'indice k

  $\Leftrightarrow$ $\exists k \in \mathbb{N}^*$, $f^{k-1} \neq 0_{\mathscr{L}(E)}$ et $f^k = 0_{\mathscr{L}(E)}$

  Évidemment, on est dans le cadre d'une propriété **existentielle** ($\exists$) et non **universelle** ($\forall$). On notera par exemple que la propriété ne peut être vérifiée à la fois au rang 1 (exige $f^1 = 0_{\mathscr{L}(E)}$) et au rang 2 (exige $f^1 \neq 0_{\mathscr{L}(E)}$).
- En fait, l'indice de nilpotence (d'un endomorphisme nilpotent) est le plus petit entier $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $f^k = 0_{\mathscr{L}(E)}$. On peut d'ailleurs noter que non seulement $f^{k-1} \neq 0_{\mathscr{L}(E)}$ mais que ceci est aussi vérifié aux rangs précédents : $\forall i \in [\![0, k-1]\!]$, $f^i \neq 0_{\mathscr{L}(E)}$.

Partie 1

Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ une matrice non nulle de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.

1. Calculer $A^2 - (a+d)\,A$ en fonction de I_2.

Démonstration.

- Tout d'abord :

$$A^2 = A \times A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2+bc & ab+bd \\ ac+cd & bc+d^2 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{A^2 = \begin{pmatrix} a^2+bc & ab+bd \\ ac+cd & bc+d^2 \end{pmatrix}}$$

- D'autre part :

$$\begin{aligned} A^2 - (a+d)\,A &= \begin{pmatrix} a^2+bc & ab+bd \\ ac+cd & bc+d^2 \end{pmatrix} - (a+d)\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (a^2+bc)-(a^2+ad) & (ab+bd)-(ab+bd) \\ (ac+cd)-(ac+cd) & (bc+d^2)-(ad+d^2) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} bc-ad & 0 \\ 0 & bc-ad \end{pmatrix} = (bc-ad)\,I_2 = -(ad-bc)\,I_2 \end{aligned}$$

$$\boxed{A^2 - (a+d)\,A = -(ad-bc)\,I_2}$$

Commentaire

- L'égalité établie dans cette question provient d'un paragraphe qui n'est pas dans le programme mathématique en classes préparatoires commerciales.
  Pour la culture, donnons plus de détails sur ce point.
- Considérons la matrice : $A - X\, I_2 = \begin{pmatrix} a-X & b \\ c & d-X \end{pmatrix}$.
  Cette matrice est une matrice de polynôme, c'est-à-dire un élément de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R}[X])$.
  Notons alors :
  $$\begin{array}{rcl} \chi_A(X) & = & \det(A - X\, I_2) \\ & = & (a-X)(d-X) - bc \ = \ X^2 - (a+d)\, X + (ad - bc) \end{array}$$
  Le polynôme χ_A est nommé **polynôme caractéristique** de la matrice A.
  La question précédente démontre que χ_A est un polynôme annulateur de la matrice A.
  Cela permet de déduire les **valeurs propres possibles** de la matrice A. Il y a même mieux : $\mathrm{Sp}(A) = \{\text{racines de } \chi_A\}$ (cela dépasse très largement le programme).

□

2. On suppose dans cette question que A est nilpotente d'indice k.

a) Établir l'égalité : $ad - bc = 0$.

Démonstration.
D'après la question précédente : $-(ad-bc)\, I_2 \ = \ A^2 - (a+d)\, A$.
On en déduit, par multiplication à gauche et à droite par A^{k-1} :

$$\begin{array}{rcll} -(ad-bc)\, A^{k-1} & = & A^k - (a+d)\, A^{k+1} & \\ & = & 0_{\mathscr{M}_2(\mathbb{R})} & \textit{(car } A^k = 0_{\mathscr{M}_2(\mathbb{R})} \\ & & & \textit{et donc } A^{k+1} = 0_{\mathscr{M}_2(\mathbb{R})}\textit{)} \end{array}$$

La matrice A étant nilpotente d'indice k, on a : $A^{k-1} \neq 0_{\mathscr{M}_2(\mathbb{R})}$.

$$\boxed{\text{Comme } (ad-bc)\, A^{k-1} = 0_{\mathscr{M}_2(\mathbb{R})} \text{ et } A^{k-1} \neq 0_{\mathscr{M}_2(\mathbb{R})}, \text{ on a : } ad - bc = 0.}$$

Commentaire

- On pouvait procéder autrement en remarquant :
  $$A \text{ inversible} \ \Leftrightarrow \ \det(A) \neq 0 \ \Leftrightarrow \ ad - bc \neq 0$$
  L'objectif de cette question est donc de démontrer qu'une matrice nilpotente est non inversible.
- On peut alors procéder par l'absurde.
  Supposons que A est inversible.
  Alors, en multipliant par A^{-1} de part et d'autre de l'égalité $A^k = 0_{\mathscr{M}_2(\mathbb{R})}$:
  $$\begin{array}{ccc} A^{-1} \times A^k & = & A^{-1} \times 0_{\mathscr{M}_2(\mathbb{R})} \\ \shortparallel & & \shortparallel \\ A^{k-1} & & 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})} \end{array}$$
  Ce qui contredit la définition de nilpotence.

□

b) Montrer que k est supérieur ou égal à 2.

Démonstration.
On suppose dans l'énoncé que la matrice A est non nulle.
Ainsi, A n'est pas nilpotente d'indice 1.

Comme l'indice de nilpotence est un entier $k \in \mathbb{N}^*$, on en déduit que k est forcément supérieur ou égal à 2.

□

c) En déduire alors : $a + d = 0$.

Démonstration.

- D'après la question ***1.*** : $A^2 - (a+d)\,A \ = \ -(ad - bc)\,I_2$.
  On déduit alors de la question ***2.a)*** :
  $$A^2 \ = \ (a+d)\,A$$
- Comme $k \geqslant 2$, alors $k - 2 \geqslant 0$.
  On déduit, par multiplication à gauche et à droite par A^{k-2} :
  $$\begin{array}{ccc} A^k & = & (a+d)\,A^{k-1} \\ \shortparallel & & \\ 0_{\mathscr{M}_2(\mathbb{R})} & & \textit{(car } A \textit{ est nilpotente d'indice } k\textit{)} \end{array}$$
  La matrice A étant nilpotente d'indice k, on a : $A^{k-1} \neq 0_{\mathscr{M}_2(\mathbb{R})}$.

  Comme $(a+d)\,A^{k-1} = 0_{\mathscr{M}_2(\mathbb{R})}$ et $A^{k-1} \neq 0_{\mathscr{M}_2(\mathbb{R})}$, on a : $a + d = 0$.

□

3. Conclure : A nilpotente $\Leftrightarrow$ $A^2 = 0$.

Démonstration.

($\Leftarrow$) Supposons $A^2 = 0_{\mathscr{M}_2(\mathbb{R})}$. Par hypothèse : $A \neq 0_{\mathscr{M}_2(\mathbb{R})}$.

On en déduit que A est nilpotente d'indice 2. Ainsi, A est nilpotente.

($\Rightarrow$) Supposons que la matrice A est nilpotente. Alors :
- × d'après la question ***2.a)*** : $ad - bc = 0$.
- × d'après la question ***2.b)*** : $a + d = 0$.
- × d'après la question ***1.*** : $A^2 = (a+d)\,A - (ad - bc)\,I_2$.

On en déduit : $A^2 = 0$.

Commentaire

- Il faut bien comprendre que cette propriété est vérifiée car A est une matrice carrée d'ordre 2. Il faut donc lire :
  $$A \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \text{ nilpotente } \ \Leftrightarrow \ A^2 = 0$$
- Cette propriété se généralise. Plus précisément, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:
  $$A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \text{ nilpotente } \ \Leftrightarrow \ A^n = 0$$

□

Partie 2

Dans cette partie, f désigne un endomorphisme non nul d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E de dimension 2.

4. a) Montrer que, si $\text{Ker}(f) = \text{Im}(f)$, alors on a : $f^2 = 0$.

Démonstration.
Supposons $\text{Ker}(f) = \text{Im}(f)$.
Il s'agit de démontrer : $f^2 = 0_{\mathscr{L}(E)}$ ce qui signifie : $\forall x \in E,\ f^2(x) = 0_E$.
Soit $x \in E$. Alors :

$$f^2(x) \ = \ f(f(x)) \ = \ 0_E$$

En effet : $f(x) \in \text{Im}(f) = \text{Ker}(f)$.

$$\boxed{\text{En supposant : Ker}(f) = \text{Im}(f)\text{, on obtient bien : } f^2 = 0.}$$

Commentaire

- Cette partie est plus théorique que la précédente. L'endomorphisme f n'est pas connu. On connaît simplement des propriétés sur f et on cherche à en démontrer de nouvelles. Ce type d'exercice d'algèbre théorique peut donc paraître un peu abrupte. Pourtant, on se rend compte, à la lecture de cette démonstration, que de tels exercices peuvent donner lieu à des questions très simples. L'idée est simplement de vérifier que les définitions de base (comme le noyau et l'image d'une application linéaire) sont bien connues. En déroulant ces définitions, on obtient alors directement le résultat.
- Plus précisément, une telle question commence par la mise en place d'une structure de démonstration. Il faut savoir démontrer :
  - × une propriété quantifiée universellement : $\forall x \in E,\ p(x)$
    `Soit` $x \in E$ `...`
  - × une propriété quantifiée existentiellement : $\exists x \in E,\ p(x)$
    (il s'agit alors d'exhiber un élément $x \in E$ qui vérifie la propriété p)
  - × une inclusion d'ensemble : $A \subset B$
    `Soit` $x \in A$ `... alors` $x \in B$
  - × une égalité d'ensemble : $A = B$
    (on procède par double inclusion à l'aide de la structure de démonstration précédente)
  - × une implication : $p \Rightarrow q$
    `Supposons` p `et démontrons` q`.`
  - × une équivalence : $p \Leftrightarrow q$
    (on procède par double implication à l'aide de la structure de démonstration précédente)

  Ce n'est qu'une fois la structure de démonstration en place que l'on déroule les définitions.
- On peut en profiter pour remarquer que l'étape d'hérédité d'une récurrence n'est qu'une illustration de ces structures de démonstration. Il s'agit de démontrer la proposition :

  $$\forall n \in \mathbb{N},\ \mathcal{P}(n) \ \Rightarrow \ \mathcal{P}(n+1)$$

  En terme de rédaction, il n'y a donc guère le choix :
  `Soit` $n \in \mathbb{N}$`.`
  `Supposons` $\mathcal{P}(n)$ `et démontrons` $\mathcal{P}(n+1)$

$\square$

b) On suppose que $f^2 = 0$. Montrer : $\mathrm{Im}(f) \subset \mathrm{Ker}(f)$.
Établir alors que $\mathrm{rg}(f) = 1$ puis conclure : $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Im}(f)$.

Démonstration.

- Soit $y \in \mathrm{Im}(f)$.
  Il existe donc $x \in E$ tel que : $y = f(x)$.
  Alors :
  $$\begin{array}{rcl} f(y) & = & f(f(x)) \\ & = & f^2(x) \ = \ 0_E \qquad \textit{(car } f^2 = 0_{\mathscr{L}(E)}\textit{)} \end{array}$$
  Ainsi, $y \in \mathrm{Ker}(f)$.

  $$\boxed{\text{On en conclut : } \mathrm{Im}(f) \subset \mathrm{Ker}(f).}$$

Commentaire

- Insistons sur la facilité de cette démonstration. Comme expliqué dans la remarque précédente, il s'agit essentiellement de mettre en place la structure de démonstration et de dérouler les définitions.
- Précisons la manière d'agir.

  1 `Soit` $y \in \mathrm{Im}(f)$.
  2 `Il existe donc` $x \in E$ `tel que :` $y = f(x)$. `Alors :`
  3 $\qquad f(y) = \dots$
  4 $\qquad\qquad = \dots$
  5 $\qquad\qquad = 0_E$
  6 `Ainsi,` $y \in \mathrm{Ker}(f)$.

  × Les lignes 1 et 6 correspondent à la mise en place de la structure de démonstration : il s'agit de démontrer une inclusion. On choisit donc un élément dans $\mathrm{Im}(f)$ et on démontre qu'il est dans $\mathrm{Ker}(f)$.

  × La ligne 2 correspond au déroulé de la définition de l'image d'une application.
  Dire : $y \in \mathrm{Im}(f)$ c'est exactement dire que y s'écrit sous la forme $f(x)$ pour un $x \in E$.

  × La ligne 3 correspond au déroulé de la définition du noyau d'une application linéaire.
  Dire : $y \in \mathrm{Ker}(f)$ c'est exactement dire : $f(y) = 0_E$. Cela permet d'écrire le début de la ligne 3 ainsi que le résultat en ligne 5.

  C'est seulement à ce moment que l'on rentre dans la phase de démonstration à proprement parler et que l'on s'intéresse aux hypothèses (ici, le fait que l'on ait : $f^2 = 0_{\mathscr{L}(E)}$).
- Le message est clair : sur les 6 lignes de présentation, 4 proviennent de la présentation et seules 2 correspondent à la démonstration. Il n'est donc pas acceptable de ne pas savoir **commencer** ce type de questions, car cela démontre un défaut de connaissance du cours (définitions du chapitre et / ou structures de démonstration).

- D'après le théorème du rang :
  $$\underset{\displaystyle 2}{\underset{\shortparallel}{\dim(E)}} \ = \ \dim\big(\mathrm{Ker}(f)\big) \ + \ \dim\big(\mathrm{Im}(f)\big)$$

Or, comme $\text{Im}(f) \subset \text{Ker}(f)$, on en déduit :

$$\dim(\text{Im}(f)) \leqslant \dim(\text{Ker}(f))$$

Deux cas se présentent alors :

× soit $\dim(\text{Im}(f)) = \dim(\text{Ker}(f)) = 1$.

× soit $\dim(\text{Im}(f)) = 0$ et $\dim(\text{Ker}(f)) = 2$.
Dans ce cas : $\text{Im}(f) = \{0_E\}$ et donc $f = 0_{\mathscr{L}(E)}$, ce qui ext exclu par l'énoncé.

$$\boxed{\text{On en conclut : } \text{rg}(f) = 1.}$$

Commentaire

On peut préférer raisonner sur le noyau de f.
Comme $\text{Ker}(f) \subset E$, si on sait de plus $\dim\big(\text{Ker}(f)\big) = 2 = \dim(E)$ alors :

$$\text{Ker}(f) = E$$

Ainsi : $\forall u \in E,\ f(u) = 0_E$ et donc : $f = 0_{\mathscr{L}(E)}$.

- On a démontré :
  × $\text{Im}(f) \subset \text{Ker}(f)$,
  × $\dim\big(\text{Im}(f)\big) = 1 = \dim\big(\text{Ker}(f)\big)$.

$$\boxed{\text{On en déduit : } \text{Im}(f) = \text{Ker}(f).}$$ □

c) En déduire, à l'aide de la **Partie 1**, l'équivalence : f est nilpotent $\Leftrightarrow$ $\text{Ker}(f) = \text{Im}(f)$.

Démonstration.

- D'après la question ***4.b)*** : $f^2 = 0_{\mathscr{L}(E)} \Rightarrow \text{Ker}(f) = \text{Im}(f)$.
- D'après la question ***4.a)*** : $f^2 = 0_{\mathscr{L}(E)} \Leftarrow \text{Ker}(f) = \text{Im}(f)$.

$$\boxed{\text{On en déduit : } f^2 = 0_{\mathscr{L}(E)} \Leftrightarrow \text{Ker}(f) = \text{Im}(f).}$$

- Considérons $\mathscr{B}$ une base de E. Notons alors : $A = \text{Mat}_{\mathscr{B}}(f)$.

$$\begin{array}{rcll} f \text{ est nilpotent} & \Leftrightarrow & \exists k \in \mathbb{N}^*,\ f^{k-1} \neq 0_{\mathscr{L}(E)} \text{ et } f^k = 0_{\mathscr{L}(E)} & \\ & \Leftrightarrow & \exists k \in \mathbb{N}^*,\ A^{k-1} \neq 0_{\mathscr{L}(E)} \text{ et } A^k = 0_{\mathscr{L}(E)} & \textit{(par application de l'isomorphisme de représentation } \text{Mat}_{\mathscr{B}}(\cdot)\textit{)} \\ & \Leftrightarrow & A \text{ est nilpotente} & \\ & \Leftrightarrow & A^2 = 0_{\mathscr{M}_2(\mathbb{R})} & \textit{(d'après la } \textbf{Partie 1}\textit{)} \\ & \Leftrightarrow & f^2 = 0_{\mathscr{L}(E)} & \textit{(par application de la réciproque de } \text{Mat}_{\mathscr{B}}(\cdot)\textit{)} \end{array}$$

$$\boxed{\text{Ainsi : } f \text{ est nilpotent} \Leftrightarrow f^2 = 0_{\mathscr{L}(E)} \Leftrightarrow \text{Ker}(f) = \text{Im}(f).}$$

Commentaire

Il est aussi possible d'évoquer la « passerelle endomorphisme-matrice » en lieu et place de l'isomorphisme de représentation $\text{Mat}_{\mathscr{B}}(.)$. Quelle que soit la présentation, on retiendra :

$$f^2 = 0_{\mathscr{L}(E)} \Leftrightarrow \text{Mat}_{\mathscr{B}}\big(f^2\big) = \text{Mat}_{\mathscr{B}}\big(0_{\mathscr{L}(E)}\big) \Leftrightarrow \big(\text{Mat}_{\mathscr{B}}(f)\big)^2 = 0_{\mathscr{M}_2(\mathbb{R})} \Leftrightarrow A^2 = 0_{\mathscr{M}_2(\mathbb{R})}$$ □

On suppose dans toute la suite que f est nilpotent et on en étudie quelques propriétés.

5. Montrer qu'il existe une base de E dans laquelle la matrice A de f est : $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Démonstration.
On procède par **analyse-synthèse**.

Analyse.
Supposons qu'il existe une base $\mathscr{B}' = (e'_1, e'_2)$ de E dans laquelle la matrice représentant f est :

$$A = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Cela signifie que e'_1 et e'_2 sont deux vecteurs non nuls (sinon $\mathscr{B}'$ ne serait pas une base) tels que :
× $f\big(e'_1\big) = 0_E$. Autrement dit : $e'_1 \in \mathrm{Ker}(f)$.
× $f\big(e'_2\big) = e'_1$. Autrement dit : $e'_1 \in \mathrm{Im}(f)$.
Notons au passage que la seconde proposition assure la première.
En effet, comme f est nilpotent alors, d'après la question ***4.c)***, $\mathrm{Im}(f) \subset \mathrm{Ker}(f)$. Ainsi :

$$e'_1 \in \mathrm{Im}(f) \subset \mathrm{Ker}(f)$$

Synthèse.
- Comme $f \neq 0_{\mathscr{L}(E)}$, alors $\mathrm{Im}(f) \neq \{0_E\}$.
  On en déduit qu'il existe $e'_1 \neq 0_E$ tel que $e'_1 \in \mathrm{Im}(f)$.
  Par définition de $\mathrm{Im}(f)$, il existe alors $e'_2 \in E$ tel que : $e'_1 = f(e'_2)$.
  Notons que : $e'_2 \neq 0_E$ (on aurait sinon $e'_1 = 0_E$).
- Démontrons que la famille $\mathcal{F} = (e'_1, e'_2)$ est une base de E.
  On commence par démontrer que cette famille est libre.
  Soit $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$.
  Supposons : $\lambda_1 \cdot e'_1 + \lambda_2 \cdot e'_2 = 0_E$ $(*)$. Par définition de e'_1, on obtient :

$$\lambda_1 \cdot f(e'_2) + \lambda_2 \cdot e'_2 = 0_E$$

  En appliquant f de part et d'autre, on obtient par linéarité de f :

$$\lambda_1 \cdot f\big(f(e'_2)\big) + \lambda_2 \cdot f(e'_2) = f(0_E)$$

  Or :
  × $f(0_E) = 0_E$ car f est linéaire.
  × $f\big(f(e'_2)\big) = f^2\big(e'_2\big) = 0_E$.
  En effet, comme f est nilpotent, on déduit de la question ***4.c)*** que : $f^2 = 0_{\mathscr{L}(E)}$.
  × $f(e'_2) = e'_1$.
  L'égalité précédente se réécrit alors :

$$\lambda_2 \cdot e'_1 = 0_E$$

  et comme $e'_1 \neq 0_E$, alors $\lambda_2 = 0$.
  En reportant ce résultat dans l'égalité $(*)$, on obtient :

$$\lambda_1 \cdot e'_1 = 0_E$$

  et comme $e'_1 \neq 0_E$, alors $\lambda_1 = 0$.

$$\boxed{\text{On en déduit que la famille } \mathcal{F} \text{ est libre.}}$$

De plus : $\text{Card}(\mathcal{F}) = 2 = \dim(E)$.

$$\boxed{\text{Ainsi, la famille } \mathcal{F} \text{ est une base de } E.}$$

- Notons alors $\mathscr{B}'$ cette base.

$$\boxed{\text{On a alors : } A = \text{Mat}_{\mathscr{B}'}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.}$$

Commentaire

- Cet exercice est un classique des oraux `HEC`.
  Il s'agit donc d'une question difficile qu'il convient d'avoir déjà traitée avant.
- Il faut noter que le raisonnement par analyse-synthèse n'est mentionné que dans le programme ECS. Dans un sujet ECE, il ne peut être demandé de faire seul un tel raisonnement. L'énoncé peut par contre détailler ce type de raisonnement.
  C'était le cas dans la **Partie 2** du sujet `ESSEC-I 2018` :
  × la question ***6.*** était nommée **Analyse**.
  × la question ***7.*** était nommée **Synthèse**.
  Détaillons maintenant les attentes d'un tel raisonnement.
- Dans la première partie du raisonnement, on suppose qu'il existe une base $\mathscr{B}'$ dans laquelle la représentation matricielle de f est de la forme souhaitée. En se basant sur cette hypothèse, on obtient une caractérisation de la base $\mathscr{B}' = (e'_1, e'_2)$, qui consiste essentiellement à exiger :
  $$e'_1 \neq 0_E \qquad \text{et} \qquad e'_1 \in \text{Im}(f) \qquad \text{et} \qquad e'_2 \text{ est un antécédent de } e'_1 \text{ par } f$$
  Il faut bien comprendre que dans cette première partie du raisonnement, on a **supposé** (et non démontré !) l'existence d'une telle base $\mathscr{B}'$. C'est pourquoi il faut, dans la deuxième partie du raisonnement, démontrer l'existence d'une telle base $\mathscr{B}'$.
  L'idée est alors de construire la famille (e'_1, e'_2) telle que caractérisée dans la partie **analyse** et de **démontrer** que l'on obtient ainsi une base qui satisfait les exigences de la question.
- En résumé, un raisonnement par **analyse-synthèse** se déroule en deux temps :
  × **analyse** : on suppose l'existence d'un objet vérifiant certains critères (ici, on suppose l'existence de la base $\mathscr{B}' = (e'_1, e'_2)$). Si cet objet existe, il est alors d'une certaine forme ($e'_1 \neq 0_E$, et $e'_1 = f(e'_2) \in \text{Im}(f)$).
  × **synthèse** : on vérifie que l'objet obtenu lors de la phase d'analyse répond bien aux critères initiaux ($\mathscr{B}'$ ainsi construite est bien une base et $\text{Mat}_{\mathscr{B}'}(f)$ a la forme souhaitée).
  Cela permet de lever la réserve d'existence.
  Ce schéma de démonstration permet non seulement de conclure :
  $$\begin{array}{l} \text{l'objet répond à} \\ \text{certains critères} \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{l} \text{l'objet s'écrit sous une} \\ \text{forme particulière} \end{array}$$
  mais aussi de démontrer que chacune des deux propositions de l'équivalence est vérifiée. □

6. On souhaite montrer par l'absurde qu'il est impossible de trouver deux endomorphismes u et v de E, nilpotents et tels que $f = u \circ v$. On suppose donc que ces deux endomorphismes existent.

a) Montrer les inclusions : $\text{Im}(f) \subset \text{Im}(u)$ et $\text{Ker}(v) \subset \text{Ker}(f)$.

Commentaire

Cette question est une illustration simple des structures de démonstration.

Démonstration.

- Soit $y \in \mathrm{Im}(f)$.
Il existe donc $x \in E$ tel que : $y = f(x)$. Ainsi :

$$\begin{array}{rcll} y & = & f(x) & \\ & = & (u \circ v)(x) & \textit{(par définition de } f\textit{)} \\ & = & u(v(x)) & \end{array}$$

On en déduit : $y \in \mathrm{Im}(u)$.

$$\boxed{\mathrm{Im}(f) \subset \mathrm{Im}(u)}$$

- Soit $x \in \mathrm{Ker}(v)$. Alors :

$$\begin{array}{rcll} f(x) & = & (u \circ v)(x) & \textit{(par définition de } f\textit{)} \\ & = & u(v(x)) & \\ & = & u(0_E) & \textit{(car } x \in \mathrm{Ker}(v)\textit{)} \\ & = & 0_E & \textit{(car } u \textit{ est linéaire)} \end{array}$$

On en déduit : $x \in \mathrm{Ker}(f)$.

$$\boxed{\mathrm{Ker}(v) \subset \mathrm{Ker}(f)}$$

□

b) En déduire les égalités : $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Im}(u)$ et $\mathrm{Ker}(v) = \mathrm{Ker}(f)$.

Démonstration.

- Notons tout d'abord : $u \neq 0_{\mathscr{L}(E)}$ sinon on aurait : $f = 0_{\mathscr{L}(E)}$.
- D'après la question ***4.c)*** :

$$u \text{ est nilpotent } \Leftrightarrow u^2 = 0_{\mathscr{L}(E)} \Leftrightarrow \mathrm{Ker}(u) = \mathrm{Im}(u)$$

Ainsi, comme u est supposé nilpotent, $u^2 = 0_{\mathscr{L}(E)}$ et, d'après la question ***4.b)***, on obtient :

$$\mathrm{rg}(u) = 1$$

- D'après le théorème du rang :

$$\begin{array}{ccccc} \dim(E) & = & \dim\big(\mathrm{Ker}(u)\big) & + & \dim\big(\mathrm{Im}(u)\big) \\ \shortparallel & & & & \shortparallel \\ 2 & & & & 1 \end{array}$$

et ainsi : $\dim\big(\mathrm{Ker}(u)\big) = 1$

- Les points précédents restent vérifiés pour tout endomorphisme nilpotent non nul de E.

$$\boxed{\begin{array}{c} \text{On en déduit : } \dim\big(\mathrm{Im}(u)\big) = \dim\big(\mathrm{Im}(v)\big) = \dim\big(\mathrm{Im}(f)\big) = 1 \\ \text{et : } \dim\big(\mathrm{Ker}(u)\big) = \dim\big(\mathrm{Ker}(v)\big) = \dim\big(\mathrm{Ker}(f)\big) = 1. \end{array}}$$

- D'après la question précédente : $\mathrm{Im}(f) \subset \mathrm{Im}(u)$.

$$\boxed{\text{Or, comme } \dim(\mathrm{Im}(f)) = \dim(\mathrm{Im}(u)), \text{ alors : } \mathrm{Im}(f) = \mathrm{Im}(u).}$$

D'après la question précédente : $\mathrm{Ker}(v) \subset \mathrm{Ker}(f)$.

$$\boxed{\text{Or, comme } \dim(\mathrm{Ker}(v)) = \dim(\mathrm{Ker}(f)), \text{ alors : } \mathrm{Ker}(v) = \mathrm{Ker}(f).}$$

□

c) En déduire l'égalité : $\mathrm{Ker}(u) = \mathrm{Im}(v)$.

Démonstration.

- Comme u est un endomorphisme nilpotent non nul de E alors, d'après la question ***4.*** :

$$\mathrm{Ker}(u) = \mathrm{Im}(u)$$

Par le même argument : $\mathrm{Ker}(v) = \mathrm{Im}(v)$ et $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Im}(f)$.

- On en déduit :

$$\begin{array}{rcll} \mathrm{Ker}(u) & = & \mathrm{Im}(u) & \\ & = & \mathrm{Im}(f) & \textit{(d'après la question } \textbf{\textit{6.b)}}\textit{)} \\ & = & \mathrm{Ker}(f) & \\ & = & \mathrm{Ker}(v) & \textit{(d'après la question } \textbf{\textit{6.b)}}\textit{)} \\ & = & \mathrm{Im}(v) & \end{array}$$

$$\boxed{\text{On a bien : } \mathrm{Ker}(u) = \mathrm{Im}(v).}$$

□

d) Conclure.

Démonstration.

- Soit $x \in E$. Alors :

$$\begin{array}{rcll} f(x) & = & (u \circ v)(x) & \\ & = & u\big(v(x)\big) & \\ & = & 0_E & \textit{(car } v(x) \in \mathrm{Im}(v) = \mathrm{Ker}(u)\textit{)} \end{array}$$

$$\boxed{\text{Ainsi : } \forall x \in E,\ f(x) = 0_E.}$$

- Dans l'énoncé, on a supposé l'existence de f nilpotent non nul s'écrivant sous la forme $f = u \circ v$ avec u et v nilpotent.
Le point précédent contredit cette hypothèse.

$$\boxed{\text{On en conclut qu'il n'existe pas de tel endomorphisme } f.}$$

□

Exercice 3 (EDHEC E 2012)

On désigne par n un entier naturel supérieur ou égal à 2. On note p un réel de $]0,1[$ et on pose $q = 1-p$.
On dispose d'une pièce donnant Pile avec la probabilité p et Face avec la probabilité q.
On lance cette pièce et on arrête les lancers dans l'une des deux situations suivantes :

- soit si l'on a obtenu Pile,
- soit si l'on a obtenu n fois Face.

Pour tout entier naturel k non nul, on note P_k (respectivement F_k l'événement « on obtient Pile (respectivement Face) au $k^{\text{ème}}$ lancer ».
On note T_n le nombre de lancers effectués, X_n le nombre de Pile obtenus et enfin Y_n le nombre de Face obtenus. On admet que T_n , X_n et Y_n sont des variables aléatoires toutes les trois définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ que l'on ne cherchera pas à préciser.

1. Loi de T_n.

a) Pour tout k de $[\![1, n-1]\!]$, déterminer, en distinguant le cas $k = 1$, la probabilité $\mathbb{P}([T_n = k])$.

Démonstration.

- Cas $k = 1$.
L'événement $[T_n = 1]$ est réalisé si et seulement si on a effectué un seul lancer, c'est-à-dire si on a obtenu Pile au 1er lancer. Ainsi :

$$[T_n = 1] \; = \; P_1$$

$$\boxed{\text{On en déduit : } \mathbb{P}([T_n = 1]) = \mathbb{P}(P_1) = p.}$$

- Cas $k \in [\![2, n-1]\!]$.
L'événement $[T_n = k]$ est réalisé si et seulement si on a effectué k lancer. Comme $k < n$, cela équivaut à avoir obtenu le premier Pile au $k^{\text{ème}}$ lancer. Donc :

$$[T_n = k] \; = \; F_1 \cap \cdots \cap F_{k-1} \cap P_k$$

On en déduit :

$$\begin{array}{rcll} \mathbb{P}([T_n = k]) & = & \mathbb{P}(F_1 \cap \cdots \cap F_{k-1} \cap P_k) & \\ & = & \mathbb{P}(F_1) \times \cdots \times \mathbb{P}(F_{k-1}) \times \mathbb{P}(P_k) & \textit{(par indépendance des lancers)} \\ & = & q^{k-1}\, p & \end{array}$$

$$\boxed{\forall k \in [\![2, n-1]\!],\ \mathbb{P}([T_n = k]) = q^{k-1}\, p}$$

Commentaire

Afin de permettre une bonne compréhension de l'expérience, on détaille ici l'explication de la décomposition de chaque événement. Cependant la simple donnée de cette décomposition démontre la bonne compréhension de l'expérience et permet d'obtenir la totalité des points alloués à cette question.

□

b) Déterminer $\mathbb{P}([T_n = n])$.

Démonstration.
L'événement $[T_n = n]$ est réalisé si et seulement si :

- × soit on a obtenu Pile au $n^{\text{ème}}$ lancer.
  Dans ce cas, l'événement $F_1 \cap \cdots \cap F_{n-1} \cap P_n$ est réalisé.
- × soit on a obtenu n fois Face.
  Dans ce cas, l'événement $F_1 \cap \cdots \cap F_{n-1} \cap F_n$ est réalisé.

On en déduit :

$$\begin{array}{rcl} [T_n = n] & = & \big(F_1 \cap \cdots \cap F_{n-1} \cap P_n\big) \cup \big(F_1 \cap \cdots \cap F_{n-1} \cap F_n\big) \\ & = & \big(F_1 \cap \cdots \cap F_{n-1}\big) \cap \big(P_n \cup F_n\big) \\ & = & \big(F_1 \cap \cdots \cap F_{n-1}\big) \cap \Omega \\ & = & F_1 \cap \cdots \cap F_{n-1} \end{array}$$

Ainsi :

$$\begin{array}{rcll} \mathbb{P}([T_n = n]) & = & \mathbb{P}\left(\bigcap\limits_{i=1}^{n-1} F_i\right) & \\ & = & \prod\limits_{i=1}^{n-1} \mathbb{P}(F_i) & \textit{(par indépendance des lancers)} \\ & = & q^{n-1} & \end{array}$$

$$\boxed{\mathbb{P}([T_n = n]) = q^{n-1}}$$

□

c) Vérifier : $\sum\limits_{k=1}^{n} \mathbb{P}([T_n = k]) = 1$.

Démonstration.
D'après les questions précédentes :

$$\begin{array}{rcll} \sum\limits_{k=1}^{n} \mathbb{P}([T_n = k]) & = & \sum\limits_{k=1}^{n-1} \mathbb{P}([T_n = k]) \ + \ \mathbb{P}([T_n = n]) & \\ & = & \sum\limits_{k=1}^{n-1} q^{k-1}\, p \ + \ q^{n-1} & \\ & = & p \sum\limits_{k=1}^{n-1} q^{k-1} \ + \ q^{n-1} & \\ & = & p \sum\limits_{k=0}^{n-2} q^{k} \ + \ q^{n-1} & \\ & = & \cancel{p}\, \dfrac{1-q^{n-1}}{\cancel{1-q}} + q^{n-1} & \textit{(car } q \neq 1\textit{)} \end{array}$$

$$\boxed{\text{Finalement : } \sum\limits_{k=1}^{n} \mathbb{P}([T_n = k]) = 1 - \cancel{q^{n-1}} + \cancel{q^{n-1}} = 1.}$$

Commentaire

On s'efforcera toujours de donner du crédit à l'énoncé. En particulier, dans cette question, il est évident que l'objectif était de vérifier **par le calcul** : $\sum\limits_{k=1}^{n} \mathbb{P}([T_n = k]) = 1$, et non de conclure directement en remarquant que la famille $\big([T_n = k]\big)_{k \in [\![1,n]\!]}$ est un système complet d'événements.

□

d) Établir que T_n possède une espérance et vérifier : $\mathbb{E}(T_n) = \dfrac{1-q^n}{1-q}$.

Démonstration.

- La v.a.r. T_n admet une espérance car c'est une v.a.r. finie.
- D'aprés les questions ***1.a)*** et ***1.b)*** :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(T_n) &= \sum_{k=1}^{n} k\,\mathbb{P}([T_n = k]) \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} k\,\mathbb{P}([T_n = k]) + \mathbb{P}([T_n = n]) \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} k\,p\,q^{k-1} + n\,q^{n-1}\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{On obtient : } \mathbb{E}(T_n) = p \sum_{k=1}^{n-1} k\,q^{k-1} + n\,q^{n-1}.}$$

- Montrons maintenant : $p \sum\limits_{k=1}^{n-1} k\,q^{k-1} + n\,q^{n-1} = \dfrac{1-q^n}{1-q}$, c'est-à-dire :

$$(1-q)\left(p \sum_{k=1}^{n-1} k\,q^{k-1} + n\,q^{n-1}\right) = 1-q^n$$

On calcule :

$$\begin{aligned}&(1-q)\left(p \sum_{k=1}^{n-1} k\,q^{k-1} + n\,q^{n-1}\right) \\ =\ & p \sum_{k=1}^{n-1} k\,q^{k-1} + n\,q^{n-1} - p \sum_{k=1}^{n-1} k\,q^{k} - n\,q^n \\ =\ & p \sum_{k=0}^{n-2} (k+1)\,q^{k} - p \sum_{k=1}^{n-1} k\,q^{k} + n\,q^{n-1}(1-p) && \textit{(par décalage d'indice)} \\ =\ & p + p \sum_{k=1}^{n-2} (k+1)\,q^{k} - p \sum_{k=1}^{n-2} k\,q^{k} - p\,(n-1)\,q^{n-1} + n\,p\,q^{n-1} && \textit{(car } q = 1-p\textit{)} \\ =\ & p + p \sum_{k=1}^{n-2} (\cancel{k} + 1 - \cancel{k})q^k + (\cancel{n} - (\cancel{n} - 1))p\,q^{n-1} \\ =\ & p + p \sum_{k=1}^{n-2} q^k + p\,q^{n-1} \\ =\ & p + \cancel{p}\,q\,\frac{1-q^{n-2}}{\cancel{1-q}} + p\,q^{n-1} && \textit{(car } q \neq 1\textit{)} \\ =\ & p + q - q^{n-1} + p\,q^{n-1} \\ =\ & 1 - (1-p)\,q^{n-1} && \textit{(car } p+q = 1\textit{)} \\ =\ & 1 - q^n && \textit{(car } 1-p = q\textit{)}\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Finalement, on a bien : } \mathbb{E}(T_n) = \frac{1-q^n}{1-q}.}$$

□

2. Loi de X_n.

a) Donner la loi de X_n.

Démonstration.

- D'après l'expérience, deux cas seulement peuvent se produire :
  - $\times$ soit on s'arrête à l'obtention du 1er Pile (on a donc obtenu 1 Pile).
    Dans ce cas, X_n prend la valeur 1.
  - $\times$ soit on s'arrête après n Face (on n'a donc jamais obtenu Pile).
    Dans ce cas, X_n prend la valeur 0.

$$\boxed{\text{On en déduit : } X_n(\Omega) = \{0, 1\}.}$$

- De plus, l'événement $[X_n = 0]$ est réalisé si et seulement si on n'a jamais obtenu Pile au cours des n premiers lancers, c'est-à-dire si on a obtenu Face lors de ces n lancers. Donc :

$$[X_n = 0] \ = \ \bigcap_{i=1}^{n} F_i$$

On en déduit, par indépendance des lancers :

$$\mathbb{P}([X_n = 0]) \ = \ \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n} F_i\right) \ = \ \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}(F_i) \ = \ \prod_{i=1}^{n} q \ = \ q^n$$

- Comme $([X_n = 0], [X_n = 1])$ est un système complet d'événements, on obtient alors :

$$\mathbb{P}([X_n = 1]) \ = \ 1 - \mathbb{P}([X_n = 0]) \ = \ 1 - q^n$$

$$\boxed{\text{Finalement : } X_n \hookrightarrow \mathcal{B}(1 - q^n).}$$

□

b) Vérifier : $\mathbb{E}(X_n) = 1 - q^n$.

Démonstration.
Par définition de l'espérance :

$$\mathbb{E}(X_n) \ = \ \cancel{0 \times \mathbb{P}([X_n = 0])} + 1 \times \mathbb{P}([X_n = 1]) \ = \ 1 - q^n$$

$$\boxed{\text{On a bien : } \mathbb{E}(X_n) = 1 - q^n.}$$

□

3. Loi de Y_n.

a) Déterminer, pour tout k de $[\![0, n-1]\!]$, la probabilité $\mathbb{P}([Y_n = k])$.

Démonstration.
Soit $k \in [\![0, n-1]\!]$. Deux cas se présentent.

- Si $k = 0$: l'événement $[Y_n = 0]$ est réalisé si et seulement si on n'a obtenu aucun Face, c'est-à-dire si on a obtenu Pile dès le premier lancer. Donc :

$$[Y_n = 0] \ = \ P_1$$

Ainsi : $\mathbb{P}([Y_n = 0]) \ = \ \mathbb{P}(P_1) \ = \ p$.

- Si $k \in [\![1, n-1]\!]$: l'événement $[Y_n = k]$ est réalisé si et seulement si on a obtenu k Face, c'est-à-dire si on a obtenu le premier Pile au $(k+1)^{\text{ème}}$ lancer. Donc :

$$[Y_n = k] \ = \ F_1 \cap \cdots \cap F_k \cap P_{k+1}$$

On en déduit, par indépendance des lancers :

$$\mathbb{P}([Y_n = k]) \; = \; \mathbb{P}\left(\left(\bigcap_{i=1}^{k} F_i\right) \cap P_{k+1}\right) \; = \; \left(\prod_{i=1}^{k} \mathbb{P}(F_i)\right) \; \mathbb{P}(P_{k+1}) \; = \; q^k \, p$$

$$\boxed{\text{Finalement : } \forall k \in [\![0, n-1]\!],\ \mathbb{P}([Y_n = k]) = q^k \, p.}$$

□

b) Déterminer $\mathbb{P}([Y_n = n])$.

Démonstration.
L'événement $[Y_n = n]$ est réalisé si et seulement si on a obtenu n fois Face, c'est-à-dire si on a obtenu Face aux n premiers lancers. Donc :

$$[Y_n = n] \; = \; \bigcap_{i=1}^{n} F_i \; = \; [X_n = 0]$$

$$\boxed{\text{On en déduit : } \mathbb{P}([Y_n = n]) \; = \; q^n}$$

□

c) Écrire une égalité liant les variables aléatoires T_n, X_n et Y_n, puis en déduire $\mathbb{E}(Y_n)$.

Démonstration.

- Le nombre de lancers est égal à la somme du nombre de Pile et de Face obtenus.

$$\boxed{\text{On en déduit : } T_n = X_n + Y_n.}$$

- Ainsi : $Y_n = T_n - X_n$.
  Par conséquent, la v.a.r. Y_n admet une espérance en tant que comme de v.a.r. qui en admettent une.
- De plus :

$$\begin{array}{rcll}
\mathbb{E}(Y_n) & = & \mathbb{E}(T_n - X_n) & \\
& = & \mathbb{E}(T_n) - \mathbb{E}(X_n) & \textit{(par linéarité de l'espérance)} \\
& = & \dfrac{1-q^n}{1-q} - (1-q^n) & \textit{(d'après } \textbf{1.d)} \textit{ et } \textbf{2.b)}\textit{)} \\
& = & (1-q^n)\left(\dfrac{1}{1-q} - 1\right) & \\
& = & (1-q^n)\ \dfrac{\cancel{1} - (\cancel{1} - q)}{1-q} & \\
& = & (1-q^n)\ \dfrac{q}{1-q} &
\end{array}$$

$$\boxed{\mathbb{E}(Y_n) = \frac{q}{1-q}\,(1-q^n)}$$

□

4. Simulation informatique.
On rappelle que l'appel `grand(1,1,'bin',1,p)` renvoie une réalisation d'une v.a.r. suivant une loi de Bernoulli de paramètre `p`. Compléter les quatre instructions manquantes pour que le programme suivant simule l'expérience aléatoire décrite ci-dessus et pour qu'il affiche, dans cet ordre, les valeurs prises par les variables aléatoires T_n, X_n et Y_n, à l'exécution de l'instruction `disp([t, x, y])`.

```
1  p = input('Entrez un reel p :')
2  n = input('Entrez un entier n :')
3  t = 0 ; x = 0 ; y = 0 ;
4  while (x == 0) & (t < n)
5    ----------
6    if lancer == 0 then
7      ----------
8      ----------
9    else
10     ----------
11   end
12 end
13 disp([t, x, y])
```

Démonstration.
Dans ce programme, la variable `t` contiendra une réalisation de T_n, la variable `x` une réalisation de X_n et `y` une réalisation de Y_n. Pour cela, on procède comme suit.

- **Début du programme** : initialisation des variables.
  Il est d'abord demandé à l'utilisateur de rentrer les valeurs des variables `p` et `n`.

```
1  p = input('Entrez un reel p :')
2  n = input('Entrez un entier n :')
```

  Puis, les variables `t`, `x` et `y` sont initialisées à 0. En effet, aucun lancer n'a encore été effectué (en particulier, on n'a encore obtenu aucun Pile et aucun Face).

```
3  t = 0 ; x = 0 ; y = 0 ;
```

- **Structure conditionnelle**
  Les lignes 4 à 12 suivantes consistent à déterminer le rang du premier Pile (s'il existe), au cours des n lancers. On doit donc effectuer cette succession de lancers jusqu'à ce qu'on obtienne le premier Pile **ou** qu'on ait effectué n lancers. Autrement dit, on doit effectuer cette succession de lancers tant qu'on n'a pas obtenu Pile (c'est-à-dire tant que le nombre de Pile vaut 0) **et** que le nombre de lancers est inférieur strict à n.
  On met donc en place une structure itérative (boucle while) :

```
4  while (x == 0) & (t < n)
```

  La simulation d'un lancer est fournie par l'instruction donnée dans l'énoncé :

```
5    lancer = grand(1,1,'bin',1,p)
```

  À chaque nouveau lancer, deux cas se présentent :
  × soit on a obtenu Face (c'est-à-dire la variable `lancer` contient la valeur 0).
  × soit on a obtenu Pile (c'est-à-dire la variable `lancer` contient la valeur 1)
  Cette étape est codée par la structure conditionnelle suivante :

```
6    if lancer == 0 then
```

Alors :

× si on a obtenu Face.
Dans ce cas, on met à jour la variable `t` pour signaler qu'un nouveau lancer a eu lieu :

```
        t = t + 1
```

On met également à jour la variable `y` pour signaler qu'on a obtenu un Face de plus :

```
        y = y + 1
```

× si on a obtenu Pile.
Dans ce cas, on met toujours à jour la variable `t` pour signaler qu'un nouveau lancer a eu lieu :

```
        t = t + 1
```

On met également à jour la variable `x` pour signaler qu'on a obtenu un Pile :

```
        x = 1
```

- **Fin du programme**
On termine en affichant les valeurs des variables `t`, `x` et `y` :

```
disp([t, x, y])
```

Commentaire

On rappelle qu'un programme juste mais ne comportant pas le bon nombre de lignes permet tout de même de rapporter la totalité des points alloués à une question **Scilab**.
Ici, par exemple, pour respecter la forme du programme donné par l'énoncé on pouvait écrire :

```
            t = t + 1 ; x = 1
```

□

Exercice 4 (EML S 2014)

On note E le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ continues, E_1 le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$. On remarquera que E_1 est inclus dans E.
On note, pour tout élément f de E, $T(f)$ l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie, pour tout $x \in \mathbb{R}$, par :

$$T(f)(x) \ = \ \frac{1}{2} \int_{x-1}^{x+1} f(t) \ dt$$

Partie I : Propriétés générales de T

1. Établir que, pour tout élément f de E, $T(f)$ appartient à E_1 et que, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\big(T(f)\big)'(x) \ = \ \frac{1}{2}\big(f(x+1) - f(x-1)\big)$$

On note $T : E \to E$ l'application qui, à f, associe $T(f)$.

Démonstration.

- La fonction f est de classe $\mathcal{C}^0$ sur $\mathbb{R}$. Elle amdet donc une primitive F de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
  De plus :

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}, \ \big(T(f)\big)(x) \ &= \ \frac{1}{2} \int_{x-1}^{x+1} f(t) \ dt \\ &= \ \frac{1}{2} \ [\ F(t) \ ]_{x-1}^{x+1} = \frac{1}{2}\big(F(x+1) - F(x-1)\big) \qquad (*) \end{aligned}$$

  La fonction $G_1 : x \mapsto F(x+1)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ car G_1 est la composée : $G_1 = F \circ h$ où :
  × h est telle que :
    – h est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ car polynomiale,
    – $h(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}$.
  × F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
  De même, la fonction $G_2 : x \mapsto F(x-1)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

  En conséquence, la fonction $T(f)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, c'est-à-dire : $T(f) \in E_1$.

- On en déduit que la fonction $T(f)$ est dérivable et, d'après la relation $(*)$, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\big(T(f)\big)'(x) \ = \ \frac{1}{2}\big(1 \times F'(x+1) - 1 \times F'(x-1)\big) \ = \ \frac{1}{2}\big(f(x+1) - f(x-1)\big)$$

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \ \big(T(f)\big)'(x) = \frac{1}{2}\big(f(x+1) - f(x-1)\big)}$$

□

2. Montrer que T est un endomorphisme de E.

Démonstration.

- Montrons que T est linéaire.
  Soit $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$. Soit $(f_1, f_2) \in E^2$.
  Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} \big(T(\lambda_1 \cdot f_1 + \lambda_2 \cdot f_2)\big)(x) \ &= \ \frac{1}{2} \int_{x-1}^{x+1} \big(\lambda_1 \cdot f_1 + \lambda_2 \cdot f_2\big)(t) \ dt \\ &= \ \lambda_1 \ \frac{1}{2} \int_{x-1}^{x+1} f_1(t) \ dt + \lambda_2 \ \frac{1}{2} \int_{x-1}^{x+1} f_2(t) \ dt \qquad \textit{(par linéarité de l'intégration)} \\ &= \ \lambda_1\big(T(f_1)\big)(x) + \lambda_2\big(T(f_2)\big)(x) \ = \ \big(\lambda_1 \cdot T(f_1) + \lambda_2 \cdot T(f_2)\big)(x) \end{aligned}$$

Ceci est valable pour tout $x \in \mathbb{R}$. On a donc l'égalité : suivante :

$$T(\lambda_1 \cdot f_1 + \lambda_2 \cdot f_2) \ = \ \lambda_1 \cdot T(f_1) + \lambda_2 \cdot T(f_2)$$

On en déduit que T est linéaire.

Commentaire

- On notera que l'application T prend ses valeurs dans E qui est un ensemble de **fonctions**. Démontrer que T est linéaire, c'est par définition démontrer :

$$T(\lambda_1 \cdot f_1 + \lambda_2 \cdot f_2) \ = \ \lambda_1 \cdot T(f_1) + \lambda_2 \cdot T(f_2)$$

  qui est une égalité entre deux fonctions.
- On rappelle que pour démontrer l'égalité « $f = g$ », où f et g sont deux fonctions, on montre :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \ f(x) = g(x)$$

- Pour démontrer que T est linéaire, on démontre donc :

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R}, \ \big(T(\lambda_1 \cdot f_1 + \lambda_2 \cdot f_2)\big)(x) \ &= \ \big(\lambda_1 \cdot T(f_1) + \lambda_2 \cdot T(f_2)\big)(x) \\ &= \ \lambda_1 \ \big(T(f_1)\big)(x) + \lambda_2 \ \big(T(f_2)\big)(x)\end{aligned}$$

- Montrons enfin : $\forall f \in E$, $T(f) \in E$.
  Soit $f \in E$. D'après la question ***1.*** : $T(f) \in E_1$.
  Comme $E_1 \subset E$, on en déduit : $T(f) \in E$.

$$\boxed{\text{Finalement, } T \text{ est un endomorphisme de } E.}$$

□

3. Est-ce que T est surjectif ?

Démonstration.
Montrons que T n'est pas surjectif.

- Pour montrer que T n'est pas surjectif, on cherche une fonction $h \in E$ qui n'admet pas d'antécédent dans E par l'application T. Autrement dit, on cherche une fonction $h \in E$ qui ne peut s'écrire sous la forme $T(f)$ (où $F \in E$). Pour ce faire, il suffit de trouver une fonction $h \in E$ qui ne vérifie pas les propriétés vérifiées par les fonctions $T(f)$ où $f \in E$.
- D'après la question ***1.*** : $\forall f \in E$, $T(f) \in E_1$.
  Il suffit alors de choisir une fonction h qui appartient à E (donc continue sur $\mathbb{R}$), mais qui n'appartient pas à E_1 (donc pas de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$).
- On choisit, par exemple : $h : x \mapsto |x|$. La fonction h :
  × est continue sur $\mathbb{R}$, donc $h \in E$.
  × n'est pas de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, donc $h \notin E_1$.
  (en fait, h n'est pas de classe $\mathcal{C}^1$ en 0)
- On procède par l'absurde.
  Supposons que T est surjectif.
  Comme $h \in E$, h admet un antécédent dans E par l'application T.
  Autrement dit, il existe $f \in E$ telle que : $T(f) = h$.
  Or, d'après la question ***1.***, $T(f) \in E_1$, c'est-à-dire $h \in E_1$, ce qui est absurde.

$$\boxed{\text{La fonction } h \in E \text{ n'admettant pas d'antécédent par } T, \text{ l'application } T \text{ n'est pas surjective.}}$$

Commentaire

- Il faut faire attention à la formulation d'une question. Ici, on demande :

  « Est-ce que T est surjective ? »

  Cette question est une instance de la formulation plus générale :

  « Est-ce que tel objet vérifie telle propriété ? »

  Pour ce type de question, la réponse attendue est, (presque) toujours : `NON`.
- L'attitude à adopter ici ne consiste pas à essayer de démontrer que T est surjective, mais bien qu'**elle ne l'est pas**. Il s'agit alors d'exhiber une fonction de E (donc continue sur $\mathbb{R}$) qui n'admet pas d'antécédent dans E par l'application T.

$\square$

4. Soit $f \in E$. Montrer que, si f est paire (respectivement impaire), alors $T(f)$ est paire (respectivement impaire).
À cet effet, on pourra utiliser le changement de variable $u = -t$ dans une intégrale.

Démonstration.

- Supposons que f est paire. Soit $x \in \mathbb{R}$.
  Il s'agit de calculer :

$$\big(T(f)\big)(-x) \;=\; \frac{1}{2} \int_{-x-1}^{-x+1} f(t)\ dt$$

On effectue le changement de variable $u = -t$.

$$\left|\begin{array}{l} u = -t \quad \text{(donc } t = -u) \\ \hookrightarrow du = -\ dt \quad \text{ et } \quad dt = -\ du \\ \\ \bullet\ t = -x-1 \ \Rightarrow\ u = x+1 \\ \bullet\ t = -x+1 \ \Rightarrow\ u = x-1 \end{array}\right.$$

Ce changement de variable est valide car $\varphi : u \mapsto -u$ est $\mathcal{C}^1$ sur $[x-1, x+1]$. On obtient :

$$\begin{array}{rcll} \big(T(f)\big)(-x) & = & \dfrac{1}{2} \displaystyle\int_{x+1}^{x-1} f(-u)\ (-du) & \\ & = & \dfrac{-1}{2} \displaystyle\int_{x+1}^{x-1} f(-u)\ du & \\ & = & \dfrac{1}{2} \displaystyle\int_{x-1}^{x+1} f(-u)\ du & \\ & = & \dfrac{1}{2} \displaystyle\int_{x-1}^{x+1} f(u)\ du & \textit{(car } f \textit{ est paire)} \\ & = & \big(T(f)\big)(x) & \end{array}$$

On en déduit que, si f est paire, alors la fonction $T(f)$ est paire.

- On raisonne de même si f est impaire. On a alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\big(T(f)\big)(-x) \;=\; \frac{1}{2} \int_{x-1}^{x+1} f(-u)\ du \;=\; \frac{-1}{2} \int_{x-1}^{x+1} f(u)\ du \;=\; -\big(T(f)\big)(x)$$

Ainsi, si f est impaire, alors la fonction $T(f)$ est elle aussi impaire.

$\square$

5. Soit $f \in E$.

a) On suppose que l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\ dt$ converge.

On introduit alors la fonction $R : x \mapsto \displaystyle\int_{x}^{+\infty} f(t)\ dt$. Montrer : $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} R(x) = 0$.

Démonstration.
Soit $x \in \mathbb{R}$.

- Comme l'intégrale impropre $\displaystyle\int_{-\infty}^{x} f(t)\ dt$ est convergente, alors, par définition, les intégrales impropres $\displaystyle\int_{-\infty}^{x} f(t)\ dt$ et $\displaystyle\int_{x}^{+\infty} f(t)\ dt$ sont convergentes.
- On a alors, par relation de Chasles :

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\ dt &= \int_{-\infty}^{x} f(t)\ dt + \int_{x}^{+\infty} f(t)\ dt \\ &= \int_{-\infty}^{x} f(t)\ dt + R(x)\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{On en déduit : } R(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\ dt - \int_{-\infty}^{x} f(t)\ dt.}$$

Or :

× $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)$ est un réel indépendant de x. On a donc :

$$\lim_{x\to+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\ dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\ dt$$

× comme l'intégrale impropre $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\ dt$ est convergente, alors, par définition :

$$\lim_{x\to+\infty} \int_{-\infty}^{x} f(t)\ dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\ dt$$

$$\boxed{\text{On en déduit que } R \text{ admet une limite en } +\infty \text{ et : } \lim_{x\to+\infty} R(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\ dt - \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\ dt = 0.}$$

□

b) Montrer que, si l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\ dt$ converge, alors $T(f)(x)$ tend vers 0 lorsque x tend vers $+\infty$ et lorsque x tend vers $-\infty$.

Démonstration.
Supposons que l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\ dt$ converge.

- Soit $x \in \mathbb{R}$.
  Les intégrales impropres en présence étant convergentes, on a, par relation de Chasles :

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\ dt &= \int_{-\infty}^{x-1} f(t)\ dt + \int_{x-1}^{x+1} f(t)\ dt + \int_{x+1}^{+\infty} f(t)\ dt \\ &= \int_{-\infty}^{x-1} f(t)\ dt + \big(T(f)\big)(x) + R(x+1)\end{aligned}$$

Ainsi :
$$\begin{aligned}\big(T(f)\big)(x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\ dt - \int_{-\infty}^{x-1} f(t)\ dt - R(x+1)\\ &= \int_{x-1}^{+\infty} f(t)\ dt - R(x+1)\\ &= R(x-1) - R(x+1)\end{aligned}$$

Or, d'après la question précédente : $\lim\limits_{x\to+\infty} R(x) = 0$.

$$\boxed{\text{On en déduit : } \lim\limits_{x\to+\infty} \big(T(f)\big)(x) = 0 - 0 = 0.}$$

- Soit $x \in \mathbb{R}$. On note $S : x \mapsto \displaystyle\int_{-\infty}^{x} f(t)\ dt$.

$$\boxed{\text{Avec le même raisonnement qu'en question précédente, on démontre : } \lim\limits_{x\to-\infty} S(x) = 0.}$$

De plus, comme dans le point précédent :
$$\begin{aligned}\big(T(f)\big)(x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\ dt - \int_{-\infty}^{x-1} f(t)\ dt - \int_{x+1}^{+\infty} f(t)\ dt\\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\ dt - \int_{x+1}^{+\infty} f(t)\ dt - S(x-1)\\ &= \int_{-\infty}^{x+1} f(t)\ dt - S(x-1)\\ &= S(x+1) - S(x-1)\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{On en déduit : } \lim\limits_{x\to-\infty} \big(T(f)\big)(x) = 0.}$$

□

Partie II : Un exemple

On note, pour tout $a \in \mathbb{R}$: $f_a : \begin{array}{rcl}\mathbb{R} & \to & \mathbb{R}\\ x & \mapsto & f_a(t) = \mathrm{e}^{at}\end{array}$

6. Calculer, pour tout $a \in \mathbb{R}$ et tout $x \in \mathbb{R}$, $T(f_a)(x)$.

On note : $\varphi : \begin{array}{rcl}\mathbb{R} & \to & \mathbb{R}\\ a & \mapsto & \varphi(a) = \begin{cases}\dfrac{\mathrm{e}^a - \mathrm{e}^{-a}}{2a} & \text{si } a \neq 0\\ 1 & \text{si } a = 0\end{cases}\end{array}$

Démonstration.

Soit $a \in \mathbb{R}$. Deux cas se présentent.

- Si $a = 0$. Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\big(T(f_0)\big)(x) = \frac{1}{2}\int_{x-1}^{x+1} 1\ dt = \frac{1}{2}\ [\ t\ ]_{x-1}^{x+1} = \frac{1}{2}\big(\cancel{x}+1-(\cancel{x}-1)\big) = 1$$

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ \big(T(f_0)\big)(x) = 1}$$

- Si $a \neq 0$. Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\big(T(f_a)\big)(x) \ = \ \frac{1}{2} \int_{x-1}^{x+1} \mathrm{e}^{at} \, dt \ = \ \frac{1}{2} \left[\frac{1}{a} \, \mathrm{e}^{at} \right]_{x-1}^{x+1} \ = \ \frac{1}{2a} \left(\mathrm{e}^{a(x+1)} - \mathrm{e}^{a(x-1)} \right) \ = \ \frac{\mathrm{e}^{a} - \mathrm{e}^{-a}}{2a} \, \mathrm{e}^{ax}$$

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \ \big(T(f_a)\big)(x) = \frac{\mathrm{e}^{a} - \mathrm{e}^{-a}}{2a} \, \mathrm{e}^{ax}}$$ □

7. Établir : $\forall a \in \mathbb{R}$, $T(f_a) = \varphi(a) \, f_a$.

Démonstration.
Soit $a \in \mathbb{R}$. On distingue toujours deux cas.

- Si $a = 0$, alors, d'après la question précédente : $\forall x \in \mathbb{R}$, $\big(T(f_0)\big(x\big) = 1 = \varphi(0) \, f_0(x)$.

$$\boxed{T(f_0) = \varphi(0) \, f_0}$$

- Si $a \neq 0$, alors, d'après la question précédente :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \ \big(T(f_a)\big)(x) = \frac{\mathrm{e}^{a} - \mathrm{e}^{-a}}{2a} \, \mathrm{e}^{ax} = \varphi(a) \, f_a(x)$$

$$\boxed{\text{Si } a \neq 0 : T(f_a) = \varphi(a) \, f_a}$$ □

8. Montrer que φ est continue sur $\mathbb{R}$ et dérivable sur $]-\infty, 0[$ et $]0, +\infty[$.
Calculer, pour tout $a \in \mathbb{R}$, $\varphi'(a)$. *On admet que φ est dérivable en 0 et $\varphi'(0) = 0$.*
Étudier, selon $a \in \mathbb{R}$, le signe de $\mathrm{e}^{a} \, (a-1) + \mathrm{e}^{-a} \, (a+1)$.
En déduire les variations de φ et tracer l'allure de sa représentation graphique.

Démonstration.

- La fonction φ est dérivable (et donc continue) sur $]-\infty, 0[$ et $]0, +\infty[$ en tant que quotient de fonctions dérivables sur ces intervalles et dont le dénominateur ne s'annule pas sur ces intervalles.
- Montrons que la fonction φ est continue en 0.
  × La fonction exp admet comme développement limité d'ordre 1 en 0 :

$$\mathrm{e}^{a} = 1 + a + \underset{a \to 0}{o}(a)$$

  × De même, la fonction $x \mapsto \mathrm{e}^{-x}$ admet comme développement limité d'ordre 1 en 0 :

$$\mathrm{e}^{-a} = 1 - a + \underset{a \to 0}{o}(a)$$

  On en déduit :

$$\mathrm{e}^{a} - \mathrm{e}^{-a} \ = \ \left(\cancel{1} + a + \underset{a \to 0}{o}(a) \right) - \left(\cancel{1} - a + \underset{a \to 0}{o}(a) \right) \ = \ 2a + \underset{a \to 0}{o}(a)$$

  D'où : $\mathrm{e}^{a} - \mathrm{e}^{-a} \underset{a \to 0}{\sim} 2a$. Ainsi :

$$\varphi(a) = \frac{\mathrm{e}^{a} - \mathrm{e}^{-a}}{2a} \ \underset{a \to 0}{\sim} \ \frac{2a}{2a} = 1$$

  Finalement : $\lim\limits_{a \to 0} \varphi(a) \ = \ 1 \ = \ \varphi(0)$. Donc φ est continue en 0.

$$\boxed{\text{On en conclut que } \varphi \text{ est continue sur } \mathbb{R} \text{ et dérivable sur }]-\infty, 0[\text{ et }]0, +\infty[.}$$

- Soit $a \in \mathbb{R}^*$.

$$\varphi'(a) \ = \ \frac{(\mathrm{e}^{a} + \mathrm{e}^{-a}) \, 2a - 2 \, (\mathrm{e}^{a} - \mathrm{e}^{-a})}{4 \, a^2} \ = \ \frac{(a-1)\mathrm{e}^{a} + (a+1)\mathrm{e}^{-a}}{2 \, a^2}$$

$$\boxed{\forall a \in \mathbb{R}^*, \ \varphi'(a) = \frac{(a-1)\mathrm{e}^{a} + (a+1)\mathrm{e}^{-a}}{2 \, a^2} \ \text{ et } \varphi'(0) = 0 \ \text{(d'après l'énoncé)}}$$

- La fonction $g : a \mapsto \mathrm{e}^a(a-1) + \mathrm{e}^{-a}(a+1)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$.
  Soit $a \in \mathbb{R}$.
  $$g'(a) \; = \; \mathrm{e}^a(a-1) + \mathrm{e}^a - \mathrm{e}^{-a}(a+1) + \mathrm{e}^{-a} \; = \; a\,\mathrm{e}^a - a\,\mathrm{e}^{-a} \; = \; a\left(\mathrm{e}^a - \mathrm{e}^{-a}\right)$$
  Deux cas se présentent alors.
  × Si $a > 0$, alors, comme $a > 0$, $g'(a)$ est du signe de $\mathrm{e}^a - \mathrm{e}^{-a}$. Ainsi :
  $$g'(a) \geqslant 0 \;\Leftrightarrow\; \mathrm{e}^a - \mathrm{e}^{-a} \geqslant 0 \;\Leftrightarrow\; \mathrm{e}^a \geqslant \mathrm{e}^{-a} \;\Leftrightarrow\; a \geqslant -a$$
  où la dernière équivalence est obtenue par stricte croissance de la fonction ln sur $]0, +\infty[$.
  Or, comme $a \geqslant 0$, l'inégalité $a \geqslant -a$ est vraie. Ainsi, par équivalence, $g'(a) \geqslant 0$.
  × Si $a \leqslant 0$, alors, comme $a \leqslant 0$, $g'(a)$ est de signe opposé à $\mathrm{e}^a - \mathrm{e}^{-a}$. Ainsi :
  $$g'(a) \geqslant 0 \;\Leftrightarrow\; \mathrm{e}^a - \mathrm{e}^{-a} \leqslant 0 \;\Leftrightarrow\; \mathrm{e}^a \leqslant \mathrm{e}^{-a} \;\Leftrightarrow\; a \leqslant -a$$
  où la dernière équivalence est obtenue par stricte croissance de la fonction ln sur $]0, +\infty[$.
  Or, comme $a \leqslant 0$, l'inégalité $a \leqslant -a$ est vraie. Donc, par équivalence, $g'(a) \geqslant 0$.

  $$\boxed{\text{Finalement, pour tout } a \in \mathbb{R} : g'(a) \geqslant 0.}$$

- On obtient le tableau de variations suivant :

a	$-\infty$		0		$+\infty$
Signe de $g'(a)$		$+$	0	$+$	
Variations de g	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

- Détaillons les éléments de ce tableau :
  × $g(0) = \mathrm{e}^0\,(0-1) + \mathrm{e}^0\,(0+1) = -1 + 1 = 0$
  × Tout d'abord : $\lim\limits_{a \to -\infty} a\,\mathrm{e}^a = \lim\limits_{a \to +\infty} -a\,\mathrm{e}^{-a} = 0$ par croissances comparées.
  De plus : $\lim\limits_{a \to -\infty} \mathrm{e}^a = 0$ et $\lim\limits_{a \to -\infty} (a+1)\,\mathrm{e}^{-a} = -\infty$.
  Or, pour tout $a \in \mathbb{R}^*$: $g(a) = \mathrm{e}^a(a-1) + \mathrm{e}^{-a}(a+1) = a\,\mathrm{e}^a - \mathrm{e}^a + (a+1)\mathrm{e}^{-a}$.
  Donc : $\lim\limits_{a \to -\infty} g(a) = -\infty$
  × Ensuite : $\lim\limits_{a \to +\infty} a\,\mathrm{e}^{-a} = 0$ par croissances comparées.
  De plus : $\lim\limits_{a \to +\infty} \mathrm{e}^{-a} = 0$ et $\lim\limits_{a \to +\infty} (a-1)\mathrm{e}^a = +\infty$.
  Or, pour tout $a \in \mathbb{R}^*$: $g(a) = \mathrm{e}^a(a-1) + \mathrm{e}^{-a}(a+1) = (a-1)\mathrm{e}^a + a\,\mathrm{e}^{-a} + \mathrm{e}^{-a}$.
  Donc : $\lim\limits_{a \to +\infty} g(a) = +\infty$

  $$\boxed{\text{On en déduit : } \forall a \leqslant 0,\ g(a) \leqslant 0 \text{ et } \forall a \geqslant 0,\ g(a) \geqslant 0.}$$

- De plus, pour tout $a \in \mathbb{R}^*$:
  $$\varphi'(a) \; = \; \frac{(a-1)\mathrm{e}^a + (a+1)\mathrm{e}^{-a}}{2\,a^2} \; = \; \frac{g(a)}{2\,a^2}$$
  Or $2\,a^2 > 0$, donc $\varphi'(a)$ est du signe de $g(a)$.

On obtient alors le tableau de variations suivant :

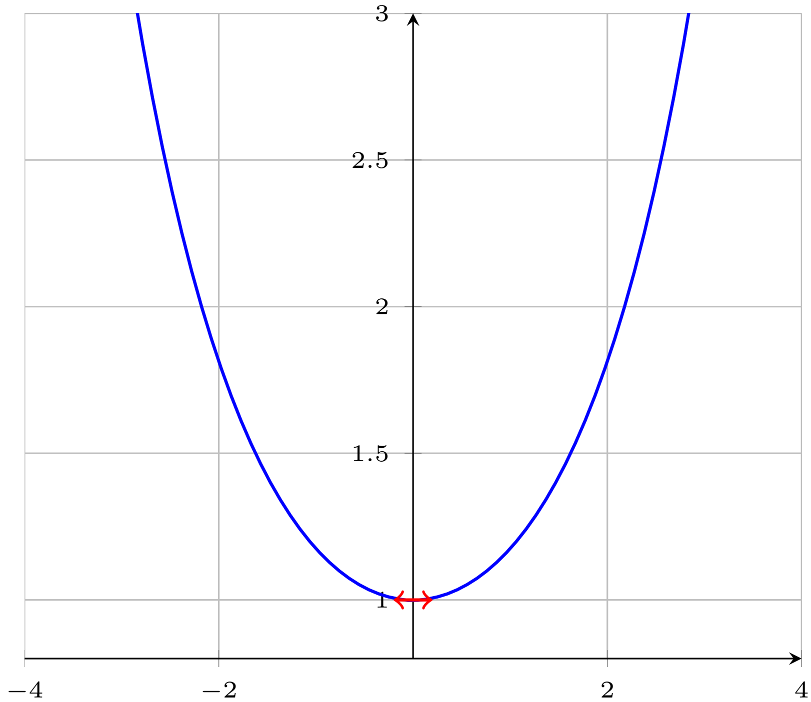
a	$-\infty$		0		$+\infty$
Signe de $\varphi'(a)$		$-$	0	$+$	
Variations de φ	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

- Détaillons les éléments de ce tableau.
  - $\times$ Tout d'abord : $\lim\limits_{a\to+\infty} \dfrac{e^a}{2a} = +\infty$ par croissances comparées. De plus : $\lim\limits_{a\to+\infty} \dfrac{e^{-a}}{2a} = 0$.

    Or : $\forall a \in \mathbb{R}^*$, $\varphi(a) = \dfrac{e^a - e^{-a}}{2a} = \dfrac{e^a}{2a} - \dfrac{e^{-a}}{2a}$.

    D'où : $\lim\limits_{a\to+\infty} \varphi(a) = +\infty$.
  - $\times$ Ensuite : $\lim\limits_{a\to-\infty} \dfrac{e^{-a}}{2a} = +\infty$ par croissances comparées. De plus : $\lim\limits_{a\to-\infty} \dfrac{e^a}{2a} = 0$.

    D'où : $\lim\limits_{a\to-\infty} \varphi(a) = +\infty$.
- On obtient le graphe suivant :



Commentaire

On peut remarquer que la fonction φ est paire : sa courbe représentative présente une symétrie par rapport à l'axe des ordonnées. Il était bien sûr possible de le montrer par le calcul en démontrant : $\forall a \in \mathbb{R}$, $\varphi(-a) = \varphi(a)$. □

9. En déduire que, pour tout $\lambda \in [1, +\infty[$, il existe $f \in E \setminus \{0\}$ tel que : $T(f) = \lambda\, f$.

Démonstration.
Soit $\lambda \in [1, +\infty[$.

- D'après la question ***8.***, la fonction φ est :
  - × continue sur $[0, +\infty[$,
  - × strictement croissante sur $[0, +\infty[$.

  Ainsi, φ réalise une bijection de $[0, +\infty[$ sur $\varphi([0, +\infty[)$, où :

$$\varphi([0, +\infty[) \;=\; \left[\varphi(0), \lim_{a \to +\infty} \varphi(a)\right[\;=\; [1, +\infty[$$

  Or $\lambda \in [1, +\infty[$, donc il existe $a_0 \in [0, +\infty[$ tel que $\varphi(a_0) = \lambda$.
- Or, d'après la question ***7.*** :

$$T(f_{a_0}) \;=\; \varphi(a_0)\, f_{a_0} \;=\; \lambda\, f_{a_0}$$

  Donc il existe bien $f = f_{a_0}$ telle que $T(f) = \lambda\, f$.
- De plus $f_{a_0} \in E \setminus \{0_E\}$.
  En effet, comme $f_{a_0} : t \mapsto \mathrm{e}^{a_0\, t}$, on a directement que f_{a_0} est continue et non nulle sur $\mathbb{R}$.

$$\boxed{\text{Finalement, pour tout } \lambda \in [1, +\infty[\text{, il existe bien } f \in E \setminus \{0\} \text{ telle que } T(f) = \lambda\, f.}$$

Commentaire

- Nous venons de démontrer que l'endomorphisme T admet une infinité de valeurs propres (tous les réels supérieurs à 1). Cela peut paraître surprenant. Rappelons en effet qu'une endomorphisme d'un espace vectoriel de **dimension finie** $n \in \mathbb{N}^*$ admet au plus n valeurs propres distinctes.
- Ici, E est l'ensemble des fonctions continues sur $\mathbb{R}$. C'est un espace vectoriel de dimension infinie. Dans ce cas, un endomorphisme de E peut admettre une infinité de valeurs propres distinctes (c'est le résultat démontré ici).

□