DS4 (version B)

Exercice 1 (EDHEC S 2018)

Si k est un entier naturel non nul, alors pour tout endomorphisme f d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E, on note $f^k = f \circ f \circ \cdots \circ f$ (où l'endomorphisme f apparaît k fois dans cette composition) et on pose $f^0 = \mathrm{id}_E$, où id_E est l'endomorphisme identité de E. On dit que l'endomorphisme f est nilpotent d'indice k ($k \in \mathbb{N}^*$) si $f^k = 0$ et $f^{k-1} \neq 0$. De plus, on note I_2 la matrice identité de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ et on dit qu'une matrice A de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ est nilpotente d'indice k ($k \in \mathbb{N}^*$) si $A^k = 0$ et $A^{k-1} \neq 0$ (avec la convention $A^0 = I_2$).

Partie 1

Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ une matrice non nulle de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.

1. Calculer $A^2 - (a+d)\,A$ en fonction de I_2.

2. On suppose dans cette question que A est nilpotente d'indice k.

a) Établir l'égalité : $ad - bc = 0$.

b) Montrer que k est supérieur ou égal à 2.

c) En déduire alors : $a + d = 0$.

3. Conclure : A nilpotente $\Leftrightarrow A^2 = 0$.

Partie 2

Dans cette partie, f désigne un endomorphisme non nul d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E de dimension 2.

4. ***a)*** Montrer que, si $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Im}(f)$, alors on a : $f^2 = 0$.

b) On suppose que $f^2 = 0$. Montrer : $\mathrm{Im}(f) \subset \mathrm{Ker}(f)$.
Établir alors que $\mathrm{rg}(f) = 1$ puis conclure : $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Im}(f)$.

c) En déduire, à l'aide de la **Partie 1**, l'équivalence : f est nilpotent $\Leftrightarrow \mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Im}(f)$.

On suppose dans toute la suite que f est nilpotent et on en étudie quelques propriétés.

5. Montrer qu'il existe une base de E dans laquelle la matrice A de f est : $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

6. On souhaite montrer par l'ébsurde qu'il est impossible de trouver deux endomorphismes u et v de E, nilpotents et tels que $f = u \circ v$. On suppose donc que ces deux endomorphismes existente.

a) Montrer les inclusions : $\mathrm{Im}(f) \subset \mathrm{Im}(u)$ et $\mathrm{Ker}(v) \subset \mathrm{Ker}(f)$.

b) En déduire les égalités : $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Im}(u)$ et $\mathrm{Ker}(v) = \mathrm{Ker}(f)$.

c) En déduire l'égalité : $\mathrm{Ker}(u) = \mathrm{Im}(v)$.

d) Conclure.

Exercice 2 (HEC 2014)

1. On pose pour tout réel $x > 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $J_0(x) = 1 - \mathrm{e}^{-x}$ et $J_n(x) = \dfrac{1}{n!} \displaystyle\int_0^x t^n \mathrm{e}^{-t}\, dt$.

a) Calculer pour tout réel $x > 0$, $J_1(x)$.

b) Établir pour tout réel $x > 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la relation : $J_n(x) = J_{n-1}(x) - \dfrac{1}{n!}\, x^n \mathrm{e}^{-x}$.

c) En déduire pour tout réel $x > 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, une expression de $J_n(x)$ sous forme de somme.

d) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^n \mathrm{e}^{-t}\, dt$ est convergente et calculer sa valeur.

e) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note : $I_n = \displaystyle\int_0^1 \mathrm{e}^{n\,(x+\ln(1-x))}\, dx$.
À l'aide du changement de variable $t = n(1-x)$, montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$I_n = n!\, \frac{\mathrm{e}^n}{n^{n+1}}\, J_n(n)$$

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes, définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$, de même loi de Poisson de paramètre 1. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $S_n = \sum\limits_{i=1}^{n} X_i$.
On admet : $S_n \hookrightarrow \mathcal{P}(n)$.

2. Exprimer pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}([S_n \leqslant n])$ et $\mathbb{P}([S_n \geqslant n])$ en fonction de $J_n(n)$ et $J_{n-1}(n)$ respectivement.

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note h_n la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ à valeurs réelles, telle que : $h_n(x) = x^n \mathrm{e}^{-x}$.

a) Étudier les variations de h_n sur $\mathbb{R}_+$.

b) Établir pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la relation :

$$\mathbb{P}([S_{n+1} \leqslant n+1]) - \mathbb{P}([S_n \leqslant n]) = -\frac{1}{(n+1)!} \int_n^{n+1} \big(h_{n+1}(t) - h_{n+1}(n)\big)\, dt$$

c) En déduire que la suite $\big(\mathbb{P}([S_n \leqslant n])\big)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante.

d) Étudier la monotonie de la suite $\big(\mathbb{P}([S_n \geqslant n])\big)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

e) Montrer que les deux suites $\big(\mathbb{P}([S_n \leqslant n])\big)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $\big(\mathbb{P}([S_n \geqslant n])\big)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont convergentes.

4. ***a)*** **Pour les cubes**. Justifier l'égalité : $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{P}([S_n \leqslant n]) = \dfrac{1}{2}$.

Pour les carrés. On admet : $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{P}([S_n \leqslant n]) = \dfrac{1}{2}$.

b) On admet : $I_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\dfrac{\pi}{2n}}$. En déduire, à l'aide de la question 1, un équivalent de $n!$ lorsque n tend vers $+\infty$.

c) Donner un équivalent et la limite de $\mathbb{P}([S_n = n])$ lorsque n tend vers $+\infty$.

d) Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{P}([S_n \geqslant n])$.

Exercice 3 (HEC II S 2009)

Dans tout le problème, N désigne un entier supérieur ou égal à 1.
On note $\mathbb{E}(X)$ et $\mathbb{V}(X)$ respectivement, l'espérance et la variance lorsqu'elles exsitent, de toute variable aléatoire réelle X définie sur un espace probabilisé.
Soit $(U_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$, mutuellement indépendantes et de même loi uniforme discrète sur $[\![1, N]\!]$.
On pose, pour tout n de $\mathbb{N}^*$: $T_n = \sup(U_1, U_2, \dots, U_n)$ et $Z_n = \inf(U_1, U_2, \dots, U_n)$.
On admet que T_n et Z_n sont deux variables aléatoires définies sur $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$.
Ainsi, pour tout $\omega \in \Omega$, on a :

$$T_n(\omega) = \max\big(U_1(\omega), U_2(\omega), \dots, U_n(\omega)\big) \quad \text{et} \quad Z_n(\omega) = \min\big(U_1(\omega), U_2(\omega), \dots, U_n(\omega)\big)$$

On rappelle que si C désigne un élément de $\mathscr{A}$, on note $\mathbb{1}_C$ la variable aléatoire indicatrice de l'événement C, définie sur $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ par :

$$\mathbb{1}_C(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{si } \omega \in C \\ 0 & \text{si } \omega \notin C \end{cases}$$

On pose, pour tout n de $\mathbb{N}^*$: $d_n(N) = \begin{cases} \displaystyle\sum_{k=1}^{N-1} \left(\frac{k}{N}\right)^n & \text{si } N \geqslant 2 \\ 0 & \text{si } N = 1 \end{cases}$

Préliminaire

1. Soit Y une variable aléatoire définie sur $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$, à valeurs dans $[\![1, N]\!]$.
Établir les deux relations suivantes :

$$\mathbb{E}(Y) = \sum_{k=0}^{N-1} \mathbb{P}([Y > k]) \quad \text{et} \quad \mathbb{E}\big(Y^2\big) = \sum_{k=0}^{N-1} (2k+1)\, \mathbb{P}([Y > k])$$

Partie I. Inf et Sup

2. Rappeler, sans démonstration, les valeurs respectives de $\mathbb{E}(U_1)$ et de $\mathbb{V}(U_1)$.

3. ***a)*** Calculer, pour tout k de $[\![1, N]\!]$, $\mathbb{P}([T_n \leqslant k])$.

b) En déduire la loi de probabilité de T_n.

4. ***a)*** Montrer que la suite $(d_n(N))_{n\geqslant 1}$ est convergente et calculer sa limite.

b) Exprimer $\mathbb{E}(T_n)$ en fonction de N et de $d_n(N)$. En déduire la valeur de $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{E}(T_n)$.

c) Établir la formule suivante : $\mathbb{V}(T_n) = (2N-1)\, d_n(N) - 2N\, d_{n+1}(N) - {d_n}^2(N)$.
En déduire la valeur de $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{V}(T_n)$.

d) Montrer que si $N \geqslant 2$, on a : $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{d_{n+1}(N)}{d_n(N)} = 1 - \dfrac{1}{N}$.

En déduire que l'on a : $V(T_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} d_n(N)$.

5. Déterminer la loi de Z_n. Calculer $\mathbb{E}(Z_n)$ et $\mathbb{V}(Z_n)$.

6. On rappelle que la commande `grand(1, 1, 'uin', a, b)` permet de simuler une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $[\![a, b]\!]$. Écrire une fonction **Scilab** d'en-tête `function T = simulmax(n)` qui simule la variable aléatoire T_n.

Partie II. Couple (Inf, Sup)

7. On pose, pour tout n de $\mathbb{N}^*$ et pour tout couple (k, ℓ) de $\mathbb{N}^2$: $\phi_n(k,\ell) = P([T_n \leqslant k] \cap [Z_n \leqslant \ell])$.

a) Montrer, pour tout $(k,\ell) \in [\![1, N]\!]^2$, la relation suivante :

$$\phi_n(k,\ell) = \begin{cases} \left(\dfrac{k}{N}\right)^n & \text{si } k \leqslant \ell \\ \left(\dfrac{k}{N}\right)^n - \left(\dfrac{k-\ell}{N}\right)^n & \text{si } k > \ell \end{cases}$$

b) Établir, pour tout (k,ℓ) de $[\![1, N]\!]^2$, la formule suivante :

$$\mathbb{P}([T_n = k] \cap [Z_n = \ell]) = \phi_n(k,\ell) + \phi_n(k-1,\ell-1) - \phi_n(k-1,\ell) - \phi_n(k,\ell-1)$$

c) En déduire, en distinguant les trois cas $k < \ell$, $k = \ell$ et $k > \ell$, l'expression de $\mathbb{P}([T_n = k] \cap [Z_n = \ell])$ en fonction de k et ℓ.

Exercice 4 `Fonction Gamma - non issu d'une épreuve`

On rappelle que l'intérale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt$ est convergente et que :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt = \sqrt{2\pi}$$

1. Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt$ est convergente, et calculer sa valeur.

2. **a)** Déterminer, pour tout réel x, la valeur de $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} t^{x+1} e^{-t}$.

b) En déduire la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} t^{x-1} e^{-t}\, dt$, pour tout réel x.

c) Déterminer les valeurs du réel x pour lesquelles l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 t^{x-1} e^{-t}\, dt$ est convergente.

d) En déduire que la fonction Gamma d'Euler :

$$\Gamma : x \mapsto \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t}\, dt$$

est définie sur $]0, +\infty[$.

3. **a)** Calculer $\Gamma(1)$.

b) Établir une relation entre $\Gamma(x)$ et $\Gamma(x+1)$, pour tout réel strictement postif x.
En déduire la valeur de $\Gamma(n)$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

c) Démontrer : $\Gamma\left(\dfrac{1}{2}\right) = \sqrt{2} \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-\frac{u^2}{2}}\, du$.
En déduire que pour tout $p \in \mathbb{N}$: $\Gamma\left(\dfrac{2p+1}{2}\right) = \dfrac{(2p)!}{2^{2p}\, p!}\sqrt{\pi}$.