DS4 (version B)

Exercice 1 (EDHEC S 2018 Sujet 2)

Si k est un entier naturel non nul, alors pour tout endomorphisme f d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E, on note $f^k = f \circ f \circ \cdots \circ f$ (où l'endomorphisme f apparaît k fois dans cette composition) et on pose $f^0 = \mathrm{id}_E$, où id_E est l'endomorphisme identité de E. On dit que l'endomorphisme f est nilpotent d'indice k ($k \in \mathbb{N}^*$) si $f^k = 0$ et $f^{k-1} \neq 0$. De plus, on note I_2 la matrice identité de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ et on dit qu'une matrice A de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ est nilpotente d'indice k ($k \in \mathbb{N}^*$) si $A^k = 0$ et $A^{k-1} \neq 0$ (avec la convention $A^0 = I_2$).

Commentaire

- Il est important de bien comprendre cette définition pour aborder sereinement cet exercice. Malheureusement, ce paragraphe, s'il présente bien la définition d'**endomorphisme nilpotent d'indice** k, oublie la définition d'**endomorphisme nilpotent** dont on se sert dans la suite.
- Définissons ce terme :

  L'endomorphisme $f \in \mathscr{L}(E)$ est nilpotent $\Leftrightarrow$ $\exists k \in \mathbb{N}^*$, l'endomorphisme f est nilpotent d'indice k

  $\Leftrightarrow$ $\exists k \in \mathbb{N}^*$, $f^{k-1} \neq 0_{\mathscr{L}(E)}$ et $f^k = 0_{\mathscr{L}(E)}$

  Évidemment, on est dans le cadre d'une propriété **existentielle** ($\exists$) et non **universelle** ($\forall$). On notera par exemple que la propriété ne peut être vérifiée à la fois au rang 1 (exige $f^1 = 0_{\mathscr{L}(E)}$) et au rang 2 (exige $f^1 \neq 0_{\mathscr{L}(E)}$).
- En fait, l'indice de nilpotence (d'un endomorphisme nilpotent) est le plus petit entier $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $f^k = 0_{\mathscr{L}(E)}$. On peut d'ailleurs noter que non seulement $f^{k-1} \neq 0_{\mathscr{L}(E)}$ mais que ceci est aussi vérifié aux rangs précédents : $\forall i \in [\![0, k-1]\!]$, $f^i \neq 0_{\mathscr{L}(E)}$.

Partie 1

Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ une matrice non nulle de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.

1. Calculer $A^2 - (a+d)\,A$ en fonction de I_2.

Démonstration.

- Tout d'abord : $A^2 = A \times A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2+bc & ab+bd \\ ac+cd & bc+d^2 \end{pmatrix}$.

$$\boxed{A^2 = \begin{pmatrix} a^2+bc & ab+bd \\ ac+cd & bc+d^2 \end{pmatrix}}$$

- D'autre part :

$$\begin{aligned} A^2 - (a+d)\,A &= \begin{pmatrix} a^2+bc & ab+bd \\ ac+cd & bc+d^2 \end{pmatrix} - (a+d)\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (a^2+bc)-(a^2+ad) & (ab+bd)-(ab+bd) \\ (ac+cd)-(ac+cd) & (bc+d^2)-(ad+d^2) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} bc-ad & 0 \\ 0 & bc-ad \end{pmatrix} = (bc-ad)\,I_2 = -(ad-bc)\,I_2 \end{aligned}$$

$$\boxed{A^2 - (a+d)\,A = -(ad-bc)\,I_2}$$

Commentaire

- L'égalité établie dans cette question provient d'un paragraphe qui n'est pas dans le programme mathématique en classes préparatoires commerciales.
  Pour la culture, donnons plus de détails sur ce point.
- Considérons la matrice : $A - X\, I_2 = \begin{pmatrix} a-X & b \\ c & d-X \end{pmatrix}$.
  Cette matrice est une matrice de polynôme, c'est-à-dire un élément de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R}[X])$.
  Notons alors :
  $$\begin{array}{rcl} \chi_A(X) & = & \det(A - X\, I_2) \\ & = & (a-X)(d-X) - bc \ = \ X^2 - (a+d)\, X + (ad - bc) \end{array}$$
  Le polynôme χ_A est nommé **polynôme caractéristique** de la matrice A.
  La question précédente démontre que χ_A est un polynôme annulateur de la matrice A.
  Cela permet de déduire les **valeurs propres possibles** de la matrice A. Il y a même mieux : $\mathrm{Sp}(A) = \{\text{racines de } \chi_A\}$ (cela dépasse très largement le programme).

□

2. On suppose dans cette question que A est nilpotente d'indice k.

a) Établir l'égalité : $ad - bc = 0$.

Démonstration.
D'après la question précédente : $-(ad-bc)\, I_2 \ = \ A^2 - (a+d)\, A$.
On en déduit, par multiplication à gauche et à droite par A^{k-1} :
$$\begin{array}{rcll} -(ad-bc)\, A^{k-1} & = & A^k - (a+d)\, A^{k+1} & \\ & = & 0_{\mathscr{M}_2(\mathbb{R})} & \textit{(car } A^k = 0_{\mathscr{M}_2(\mathbb{R})} \textit{ et donc } A^{k+1} = 0_{\mathscr{M}_2(\mathbb{R})}\textit{)} \end{array}$$
La matrice A étant nilpotente d'indice k, on a : $A^{k-1} \neq 0_{\mathscr{M}_2(\mathbb{R})}$.

$$\boxed{\text{Comme } (ad-bc)\, A^{k-1} = 0_{\mathscr{M}_2(\mathbb{R})} \text{ et } A^{k-1} \neq 0_{\mathscr{M}_2(\mathbb{R})}, \text{ on a : } ad - bc = 0.}$$

Commentaire

- On pouvait procéder autrement en remarquant :
  $$A \text{ inversible } \Leftrightarrow \det(A) \neq 0 \Leftrightarrow ad - bc \neq 0$$
  L'objectif de cette question est donc de démontrer qu'une matrice nilpotente est non inversible.
- On peut alors procéder par l'absurde.
  Supposons que A est inversible.
  Alors, en multipliant par A^{-1} de part et d'autre de l'égalité $A^k = 0_{\mathscr{M}_2(\mathbb{R})}$:
  $$\begin{array}{ccc} A^{-1} \times A^k & = & A^{-1} \times 0_{\mathscr{M}_2(\mathbb{R})} \\ \shortparallel & & \shortparallel \\ A^{k-1} & & 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})} \end{array}$$
  Ce qui contredit la définition de nilpotence.

□

b) Montrer que k est supérieur ou égal à 2.

Démonstration.
On suppose dans l'énoncé que la matrice A est non nulle.
Ainsi, A n'est pas nilpotente d'indice 1.

> Comme l'indice de nilpotence est un entier $k \in \mathbb{N}^*$, on en déduit que k est forcément supérieur ou égal à 2.

□

c) En déduire alors : $a + d = 0$.

Démonstration.
- D'après la question ***1.*** : $A^2 - (a+d)\, A \;=\; -(ad - bc)\, I_2$.
  On déduit alors de la question ***2.a)*** :
  $$A^2 \;=\; (a+d)\, A$$
- Comme $k \geqslant 2$, alors $k - 2 \geqslant 0$.
  On déduit, par multiplication à gauche et à droite par A^{k-2} :
  $$\begin{array}{ccc} A^k & = & (a+d)\, A^{k-1} \\ \shortparallel & & \\ 0_{\mathscr{M}_2(\mathbb{R})} & & \textit{(car A est nilpotente d'indice k)} \end{array}$$
  La matrice A étant nilpotente d'indice k, on a : $A^{k-1} \neq 0_{\mathscr{M}_2(\mathbb{R})}$.

> Comme $(a+d)\, A^{k-1} = 0_{\mathscr{M}_2(\mathbb{R})}$ et $A^{k-1} \neq 0_{\mathscr{M}_2(\mathbb{R})}$, on a : $a + d = 0$.

□

3. Conclure : A nilpotente $\Leftrightarrow$ $A^2 = 0$.

Démonstration.
($\Leftarrow$) Supposons $A^2 = 0_{\mathscr{M}_2(\mathbb{R})}$. Par hypothèse : $A \neq 0_{\mathscr{M}_2(\mathbb{R})}$.

> On en déduit que A est nilpotente d'indice 2. Ainsi, A est nilpotente.

($\Rightarrow$) Supposons que la matrice A est nilpotente. Alors :
- × d'après la question ***2.a)*** : $ad - bc = 0$.
- × d'après la question ***2.b)*** : $a + d = 0$.
- × d'après la question ***1.*** : $A^2 = (a+d)\, A - (ad - bc)\, I_2$.

> On en déduit : $A^2 = 0$.

Commentaire

- Il faut bien comprendre que cette propriété est vérifiée car A est une matrice carrée d'ordre 2. Il faut donc lire :
  $$A \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \text{ nilpotente } \Leftrightarrow A^2 = 0$$
- Cette propriété se généralise. Plus précisément, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:
  $$A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \text{ nilpotente } \Leftrightarrow A^n = 0$$

□

Partie 2

Dans cette partie, f désigne un endomorphisme non nul d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E de dimension 2.

4. a) Montrer que, si $\text{Ker}(f) = \text{Im}(f)$, alors on a : $f^2 = 0$.

Démonstration.
Supposons $\text{Ker}(f) = \text{Im}(f)$.
Il s'agit de démontrer : $f^2 = 0_{\mathscr{L}(E)}$ ce qui signifie : $\forall x \in E,\ f^2(x) = 0_E$.
Soit $x \in E$. Alors :

$$f^2(x) \;=\; f(f(x)) \;=\; 0_E$$

En effet : $f(x) \in \text{Im}(f) = \text{Ker}(f)$.

$$\boxed{\text{En supposant : } \text{Ker}(f) = \text{Im}(f), \text{ on obtient bien : } f^2 = 0.}$$

Commentaire

- Cette partie est plus théorique que la précédente. L'endomorphisme f n'est pas connu. On connaît simplement des propriétés sur f et on cherche à en démontrer de nouvelles. Ce type d'exercice d'algèbre théorique peut donc paraître un peu abrupte. Pourtant, on se rend compte, à la lecture de cette démonstration, que de tels exercices peuvent donner lieu à des questions très simples. L'idée est simplement de vérifier que les définitions de base (comme le noyau et l'image d'une application linéaire) sont bien connues. En déroulant ces définitions, on obtient alors directement le résultat.
- Plus précisément, une telle question commence par la mise en place d'une structure de démonstration. Il faut savoir démontrer :
  - × une propriété quantifiée universellement : $\forall x \in E,\ p(x)$
    `Soit` $x \in E$ `...`
  - × une propriété quantifiée existentiellement : $\exists x \in E,\ p(x)$
    (il s'agit alors d'exhiber un élément $x \in E$ qui vérifie la propriété p)
  - × une inclusion d'ensemble : $A \subset B$
    `Soit` $x \in A$ `... alors` $x \in B$
  - × une égalité d'ensemble : $A = B$
    (on procède par double inclusion à l'aide de la structure de démonstration précédente)
  - × une implication : $p \Rightarrow q$
    `Supposons` p `et démontrons` q`.`
  - × une équivalence : $p \Leftrightarrow q$
    (on procède par double implication à l'aide de la structure de démonstration précédente)

  Ce n'est qu'une fois la structure de démonstration en place que l'on déroule les définitions.
- On peut en profiter pour remarquer que l'étape d'hérédité d'une récurrence n'est qu'une illustration de ces structures de démonstration. Il s'agit de démontrer la proposition :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \mathcal{P}(n) \ \Rightarrow\ \mathcal{P}(n+1)$$

  En terme de rédaction, il n'y a donc guère le choix :
  `Soit` $n \in \mathbb{N}$`.`
  `Supposons` $\mathcal{P}(n)$ `et démontrons` $\mathcal{P}(n+1)$

□

b) On suppose que $f^2 = 0$. Montrer : $\mathrm{Im}(f) \subset \mathrm{Ker}(f)$.
Établir alors que $\mathrm{rg}(f) = 1$ puis conclure : $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Im}(f)$.

Démonstration.

- Soit $y \in \mathrm{Im}(f)$.
  Il existe donc $x \in E$ tel que : $y = f(x)$.
  Alors :
  $$\begin{array}{rcll} f(y) & = & f(f(x)) & \\ & = & f^2(x) \ = \ 0_E & \quad \textit{(car } f^2 = 0_{\mathscr{L}(E)}\textit{)} \end{array}$$
  Ainsi, $y \in \mathrm{Ker}(f)$.
  $$\boxed{\text{On en conclut : } \mathrm{Im}(f) \subset \mathrm{Ker}(f).}$$

Commentaire

- Insistons sur la facilité de cette démonstration. Comme expliqué dans la remarque précédente, il s'agit essentiellement de mettre en place la structure de démonstration et de dérouler les définitions.
- Précisons la manière d'agir.

```
1  Soit y ∈ Im(f).
2  Il existe donc x ∈ E tel que : y = f(x). Alors :
3              f(y) = ...
4                   = ...
5                   = 0_E
6  Ainsi, y ∈ Ker(f).
```

  × Les lignes 1 et 6 correspondent à la mise en place de la structure de démonstration : il s'agit de démontrer une inclusion. On choisit donc un élément dans $\mathrm{Im}(f)$ et on démontre qu'il est dans $\mathrm{Ker}(f)$.
  × La ligne 2 correspond au déroulé de la définition de l'image d'une application.
  Dire : $y \in \mathrm{Im}(f)$ c'est exactement dire que y s'écrit sous la forme $f(x)$ pour un $x \in E$.
  × La ligne 3 correspond au déroulé de la définition du noyau d'une application linéaire.
  Dire : $y \in \mathrm{Ker}(f)$ c'est exactement dire : $f(y) = 0_E$. Cela permet d'écrire le début de la ligne 3 ainsi que le résultat en ligne 5.

  C'est seulement à ce moment que l'on rentre dans la phase de démonstration à proprement parler et que l'on s'intéresse aux hypothèses (ici, le fait que l'on ait : $f^2 = 0_{\mathscr{L}(E)}$).
- Le message est clair : sur les 6 lignes de présentation, 4 proviennent de la présentation et seules 2 correspondent à la démonstration. Il n'est donc pas acceptable de ne pas savoir **commencer** ce type de questions, car cela démontre un défaut de connaissance du cours (définitions du chapitre et / ou structures de démonstration).

- D'après le théorème du rang :
  $$\begin{array}{ccccc} \dim(E) & = & \dim\big(\mathrm{Ker}(f)\big) & + & \dim\big(\mathrm{Im}(f)\big) \\ \shortparallel & & & & \\ 2 & & & & \end{array}$$

Or, comme $\mathrm{Im}(f) \subset \mathrm{Ker}(f)$, on en déduit :

$$\dim(\mathrm{Im}(f)) \leqslant \dim(\mathrm{Ker}(f))$$

Deux cas se présentent alors :

× soit $\dim(\mathrm{Im}(f)) = \dim(\mathrm{Ker}(f)) = 1$.

× soit $\dim(\mathrm{Im}(f)) = 0$ et $\dim(\mathrm{Ker}(f)) = 2$.
Dans ce cas : $\mathrm{Im}(f) = \{0_E\}$ et donc $f = 0_{\mathscr{L}(E)}$, ce qui ext exclu par l'énoncé.

$$\boxed{\text{On en conclut : } \mathrm{rg}(f) = 1.}$$

Commentaire

On peut préférer raisonner sur le noyau de f.
Comme $\mathrm{Ker}(f) \subset E$, si on sait de plus $\dim\big(\mathrm{Ker}(f)\big) = 2 = \dim(E)$ alors :

$$\mathrm{Ker}(f) = E$$

Ainsi : $\forall u \in E,\ f(u) = 0_E$ et donc : $f = 0_{\mathscr{L}(E)}$.

- On a démontré :
  × $\mathrm{Im}(f) \subset \mathrm{Ker}(f)$,
  × $\dim\big(\mathrm{Im}(f)\big) = 1 = \dim\big(\mathrm{Ker}(f)\big)$.

$$\boxed{\text{On en déduit : } \mathrm{Im}(f) = \mathrm{Ker}(f).}$$ □

c) En déduire, à l'aide de la **Partie 1**, l'équivalence : f est nilpotent $\Leftrightarrow \mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Im}(f)$.

Démonstration.

- D'après la question ***4.b)*** : $f^2 = 0_{\mathscr{L}(E)} \ \Rightarrow\ \mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Im}(f)$.
- D'après la question ***4.a)*** : $f^2 = 0_{\mathscr{L}(E)} \ \Leftarrow\ \mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Im}(f)$.

$$\boxed{\text{On en déduit : } f^2 = 0_{\mathscr{L}(E)} \ \Leftrightarrow\ \mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Im}(f).}$$

- Considérons $\mathscr{B}$ une base de E. Notons alors : $A = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)$.

$$\begin{array}{rcll}
f \text{ est nilpotent} & \Leftrightarrow & \exists k \in \mathbb{N}^*,\ f^{k-1} \neq 0_{\mathscr{L}(E)} \ \text{ et } \ f^k = 0_{\mathscr{L}(E)} & \\
& \Leftrightarrow & \exists k \in \mathbb{N}^*,\ A^{k-1} \neq 0_{\mathscr{L}(E)} \ \text{ et } \ A^k = 0_{\mathscr{L}(E)} & \textit{(par application de l'isomorphisme de représentation } \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\cdot)\textit{)} \\
& \Leftrightarrow & A \text{ est nilpotente} & \\
& \Leftrightarrow & A^2 = 0_{\mathscr{M}_2(\mathbb{R})} & \textit{(d'après la } \textbf{Partie 1}\textit{)} \\
& \Leftrightarrow & f^2 = 0_{\mathscr{L}(E)} & \textit{(par application de la réciproque de } \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\cdot)\textit{)}
\end{array}$$

$$\boxed{\text{Ainsi : } f \text{ est nilpotent} \ \Leftrightarrow\ f^2 = 0_{\mathscr{L}(E)} \ \Leftrightarrow\ \mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Im}(f).}$$

Commentaire

Il est aussi possible d'évoquer la « passerelle endomorphisme-matrice » en lieu et place de l'isomorphisme de représentation $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(.)$. Quelle que soit la présentation, on retiendra :

$$f^2 = 0_{\mathscr{L}(E)} \ \Leftrightarrow\ \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f^2) = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}\big(0_{\mathscr{L}(E)}\big) \ \Leftrightarrow\ \big(\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)\big)^2 = 0_{\mathscr{M}_2(\mathbb{R})} \ \Leftrightarrow\ A^2 = 0_{\mathscr{M}_2(\mathbb{R})}$$ □

On suppose dans toute la suite que f est nilpotent et on en étudie quelques propriétés.

5. Montrer qu'il existe une base de E dans laquelle la matrice A de f est : $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Démonstration.
On procède par **analyse-synthèse**.

Analyse.
Supposons qu'il existe une base $\mathscr{B}' = (e'_1, e'_2)$ de E dans laquelle la matrice représentant f est :

$$A = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Cela signifie que e'_1 et e'_2 sont deux vecteurs non nuls (sinon $\mathscr{B}'$ ne serait pas une base) tels que :
× $f\big(e'_1\big) = 0_E$. Autrement dit : $e'_1 \in \mathrm{Ker}(f)$.
× $f\big(e'_2\big) = e'_1$. Autrement dit : $e'_1 \in \mathrm{Im}(f)$.
Notons au passage que la seconde proposition assure la première.
En effet, comme f est nilpotent alors, d'après la question ***4.c)***, $\mathrm{Im}(f) \subset \mathrm{Ker}(f)$. Ainsi :

$$e'_1 \in \mathrm{Im}(f) \subset \mathrm{Ker}(f)$$

Synthèse.
- Comme $f \neq 0_{\mathscr{L}(E)}$, alors $\mathrm{Im}(f) \neq \{0_E\}$.
  On en déduit qu'il existe $e'_1 \neq 0_E$ tel que $e'_1 \in \mathrm{Im}(f)$.
  Par définition de $\mathrm{Im}(f)$, il existe alors $e'_2 \in E$ tel que : $e'_1 = f(e'_2)$.
  Notons que : $e'_2 \neq 0_E$ (on aurait sinon $e'_1 = 0_E$).
- Démontrons que la famille $\mathcal{F} = (e'_1, e'_2)$ est une base de E.
  On commence par démontrer que cette famille est libre.
  Soit $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$.
  Supposons : $\lambda_1 \cdot e'_1 + \lambda_2 \cdot e'_2 = 0_E$ $(*)$. Par définition de e'_1, on obtient :

$$\lambda_1 \cdot f(e'_2) + \lambda_2 \cdot e'_2 = 0_E$$

  En appliquant f de part et d'autre, on obtient par linéarité de f :

$$\lambda_1 \cdot f\big(f(e'_2)\big) + \lambda_2 \cdot f(e'_2) = f(0_E)$$

  Or :
  × $f(0_E) = 0_E$ car f est linéaire.
  × $f\big(f(e'_2)\big) = f^2\big(e'_2\big) = 0_E$.
  En effet, comme f est nilpotent, on déduit de la question ***4.c)*** : $f^2 = 0_{\mathscr{L}(E)}$.
  × $f(e'_2) = e'_1$.
  L'égalité précédente se réécrit alors :

$$\lambda_2 \cdot e'_1 = 0_E$$

  et comme $e'_1 \neq 0_E$, alors $\lambda_2 = 0$.
  En reportant ce résultat dans l'égalité $(*)$, on obtient :

$$\lambda_1 \cdot e'_1 = 0_E$$

  et comme $e'_1 \neq 0_E$, alors $\lambda_1 = 0$.

$$\boxed{\text{On en déduit que la famille } \mathcal{F} \text{ est libre.}}$$

De plus : $\text{Card}(\mathcal{F}) = 2 = \dim(E)$.

Ainsi, la famille $\mathcal{F}$ est une base de E.

- Notons alors $\mathscr{B}'$ cette base.

On a alors : $A = \text{Mat}_{\mathscr{B}'}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Commentaire

- Cet exercice est un classique des oraux `HEC`.
Il s'agit donc d'une question difficile qu'il convient d'avoir déjà traitée avant.
- Il faut noter que le raisonnement par analyse-synthèse n'est mentionné que dans le programme ECS. Dans un sujet ECE, il ne peut être demandé de faire seul un tel raisonnement.
L'énoncé peut par contre détailler ce type de raisonnement.
C'était le cas dans la **Partie 2** du sujet `ESSEC-I 2018` :
  × la question ***6.*** était nommée **Analyse**.
  × la question ***7.*** était nommée **Synthèse**.

  Détaillons maintenant les attentes d'un tel raisonnement.
- Dans la première partie du raisonnement, on suppose qu'il existe une base $\mathscr{B}'$ dans laquelle la représentation matricielle de f est de la forme souhaitée. En se basant sur cette hypothèse, on obtient une caractérisation de la base $\mathscr{B}' = (e'_1, e'_2)$, qui consiste essentiellement à exiger :

$$e'_1 \neq 0_E \qquad \text{et} \qquad e'_1 \in \text{Im}(f) \qquad \text{et} \qquad e'_2 \text{ est un antécédent de } e'_1 \text{ par } f$$

  Il faut bien comprendre que dans cette première partie du raisonnement, on a **supposé** (et non démontré !) l'existence d'une telle base $\mathscr{B}'$. C'est pourquoi il faut, dans la deuxième partie du raisonnement, démontrer l'existence d'une telle base $\mathscr{B}'$.
L'idée est alors de construire la famille (e'_1, e'_2) telle que caractérisée dans la partie **analyse** et de **démontrer** que l'on obtient ainsi une base qui satisfait les exigences de la question.
- En résumé, un raisonnement par **analyse-synthèse** se déroule en deux temps :
  × **analyse** : on suppose l'existence d'un objet vérifiant certains critères (ici, on suppose l'existence de la base $\mathscr{B}' = (e'_1, e'_2)$). Si cet objet existe, il est alors d'une certaine forme ($e'_1 \neq 0_E$, et $e'_1 = f(e'_2) \in \text{Im}(f)$).
  × **synthèse** : on vérifie que l'objet obtenu lors de la phase d'analyse répond bien aux critères initiaux ($\mathscr{B}'$ ainsi construite est bien une base et $\text{Mat}_{\mathscr{B}'}(f)$ a la forme souhaitée).
  Cela permet de lever la réserve d'existence.

  Ce schéma de démonstration permet non seulement de conclure :

l'objet répond à certains critères	$\Leftrightarrow$	l'objet s'écrit sous une forme particulière

  mais aussi de démontrer que chacune des deux propositions de l'équivalence est vérifiée. □

6. On souhaite montrer par l'absurde qu'il est impossible de trouver deux endomorphismes u et v de E, nilpotents et tels que $f = u \circ v$. On suppose donc que ces deux endomorphismes existent.

a) Montrer les inclusions : $\text{Im}(f) \subset \text{Im}(u)$ et $\text{Ker}(v) \subset \text{Ker}(f)$.

Commentaire

Cette question est une illustration simple des structures de démonstration.

Démonstration.

- Soit $y \in \text{Im}(f)$.
  Il existe donc $x \in E$ tel que : $y = f(x)$. Ainsi :

$$\begin{array}{rcll} y & = & f(x) & \\ & = & (u \circ v)(x) & \textit{(par définition de } f\textit{)} \\ & = & u(v(x)) & \end{array}$$

  On en déduit : $y \in \text{Im}(u)$.

$$\boxed{\text{Im}(f) \subset \text{Im}(u)}$$

- Soit $x \in \text{Ker}(v)$. Alors :

$$\begin{array}{rcll} f(x) & = & (u \circ v)(x) & \textit{(par définition de } f\textit{)} \\ & = & u(v(x)) & \\ & = & u(0_E) & \textit{(car } x \in \text{Ker}(v)\textit{)} \\ & = & 0_E & \textit{(car } u \textit{ est linéaire)} \end{array}$$

  On en déduit : $x \in \text{Ker}(f)$.

$$\boxed{\text{Ker}(v) \subset \text{Ker}(f)}$$

□

b) En déduire les égalités : $\text{Im}(f) = \text{Im}(u)$ et $\text{Ker}(v) = \text{Ker}(f)$.

Démonstration.

- Notons tout d'abord : $u \neq 0_{\mathscr{L}(E)}$ sinon on aurait : $f = 0_{\mathscr{L}(E)}$.
- D'après la question ***4.c)*** :

$$u \text{ est nilpotent } \Leftrightarrow u^2 = 0_{\mathscr{L}(E)} \Leftrightarrow \text{Ker}(u) = \text{Im}(u)$$

  Ainsi, comme u est supposé nilpotent, $u^2 = 0_{\mathscr{L}(E)}$ et, d'après la question ***4.b)***, on obtient :

$$\text{rg}(u) = 1$$

- D'après le théorème du rang :

$$\begin{array}{ccccc} \dim(E) & = & \dim\big(\text{Ker}(u)\big) & + & \dim\big(\text{Im}(u)\big) \\ \shortparallel & & & & \shortparallel \\ 2 & & & & 1 \end{array}$$

  et ainsi : $\dim\big(\text{Ker}(u)\big) = 1$
- Les points précédents restent vérifiés pour tout endomorphisme nilpotent non nul de E.

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{On en déduit : } \dim\big(\text{Im}(u)\big) = \dim\big(\text{Im}(v)\big) = \dim\big(\text{Im}(f)\big) = 1 \\ \text{et : } \dim\big(\text{Ker}(u)\big) = \dim\big(\text{Ker}(v)\big) = \dim\big(\text{Ker}(f)\big) = 1.\end{array}}$$

- D'après la question précédente : $\text{Im}(f) \subset \text{Im}(u)$.

$$\boxed{\text{Or, comme } \dim(\text{Im}(f)) = \dim(\text{Im}(u)), \text{ alors : } \text{Im}(f) = \text{Im}(u).}$$

  D'après la question précédente : $\text{Ker}(v) \subset \text{Ker}(f)$.

$$\boxed{\text{Or, comme } \dim(\text{Ker}(v)) = \dim(\text{Ker}(f)), \text{ alors : } \text{Ker}(v) = \text{Ker}(f).}$$

□

c) En déduire l'égalité : $\text{Ker}(u) = \text{Im}(v)$.

Démonstration.

- Comme u est un endomorphisme nilpotent non nul de E alors, d'après la question ***4.*** :

$$\text{Ker}(u) = \text{Im}(u)$$

Par le même argument : $\text{Ker}(v) = \text{Im}(v)$ et $\text{Ker}(f) = \text{Im}(f)$.

- On en déduit :

$$\begin{array}{rcll} \text{Ker}(u) & = & \text{Im}(u) & \\ & = & \text{Im}(f) & \textit{(d'après la question } \textbf{\textit{6.b)}}\textit{)} \\ & = & \text{Ker}(f) & \\ & = & \text{Ker}(v) & \textit{(d'après la question } \textbf{\textit{6.b)}}\textit{)} \\ & = & \text{Im}(v) & \end{array}$$

$$\boxed{\text{On a bien : } \text{Ker}(u) = \text{Im}(v).}$$

□

d) Conclure.

Démonstration.

- Soit $x \in E$. Alors :

$$\begin{array}{rcll} f(x) & = & (u \circ v)(x) & \\ & = & u\big(v(x)\big) & \\ & = & 0_E & \textit{(car } v(x) \in \text{Im}(v) = \text{Ker}(u)\textit{)} \end{array}$$

$$\boxed{\text{Ainsi : } \forall x \in E,\ f(x) = 0_E.}$$

- Dans l'énoncé, on a supposé l'existence de f nilpotent non nul s'écrivant sous la forme $f = u \circ v$ avec u et v nilpotent.
Le point précédent contredit cette hypothèse.

$$\boxed{\text{On en conclut qu'il n'existe pas de tel endomorphisme } f.}$$

□

Exercice 2 (HEC 2014)

1. On pose pour tout réel $x > 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $J_0(x) = 1 - \mathrm{e}^{-x}$ et $J_n(x) = \dfrac{1}{n!} \displaystyle\int_0^x t^n \mathrm{e}^{-t} \, dt$.

a) Calculer pour tout réel $x > 0$, $J_1(x)$.

Démonstration.
Soit $x > 0$.

- La fonction $t \mapsto t \, \mathrm{e}^{-t}$ est continue sur **le segment** $[0, x]$.
  (ainsi, l'intégrale $\displaystyle\int_0^x t \, \mathrm{e}^{-t} \, dt$ est bien définie)

Commentaire

Déterminer l'intervalle de continuité de l'intégrande est important. Plus précisément (avec $a < b$) :

× si f est continue sur **le segment** $[a, b]$ alors l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t) \, dt$ est bien définie.

× si f est continue sur $]a, b]$ (resp. $[a, b[$) alors l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t) \, dt$ est impropre en a (resp. b).

× si f est continue sur $]a, b[$ alors l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t) \, dt$ est doublement impropre.

- On procède par intégration par parties (IPP).

$$\left| \begin{array}{rclcrcl} u(t) & = & t & & u'(t) & = & 1 \\ v'(t) & = & \mathrm{e}^{-t} & & v(t) & = & -\mathrm{e}^{-t} \end{array} \right.$$

Cette IPP est valide car les fonctions u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, x]$. On obtient :

$$\begin{array}{rcl} J_1(x) & = & \dfrac{1}{1!} \displaystyle\int_0^x t \, \mathrm{e}^{-t} \, dt \ = \ \Big[-t \, \mathrm{e}^{-t} \Big]_0^x - \displaystyle\int_0^x -\mathrm{e}^{-t} \, dt \\ & = & -(x\mathrm{e}^{-x} - 0) - \Big[\mathrm{e}^{-t} \Big]_0^x \ = \ -x\mathrm{e}^{-x} - (\mathrm{e}^{-x} - 1) \ = \ 1 - \mathrm{e}^{-x} - x\mathrm{e}^{-x} \end{array}$$

$$\boxed{\forall x > 0, \ J_1(x) = 1 - \mathrm{e}^{-x} - x\mathrm{e}^{-x}}$$

□

b) Établir pour tout réel $x > 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la relation : $J_n(x) = J_{n-1}(x) - \dfrac{1}{n!} x^n \mathrm{e}^{-x}$.

Démonstration.
Soit $x > 0$ et soit $n \in \mathbb{N}^*$.

- La fonction $t \mapsto t^n \, \mathrm{e}^{-t}$ est continue sur $[0, x]$.
  (ainsi, l'intégrale $\displaystyle\int_0^x t^n \, \mathrm{e}^{-t} \, dt$ est bien définie)
- On procède par intégration par parties (IPP).

$$\left| \begin{array}{rclcrcl} u(t) & = & t^n & & u'(t) & = & n \, t^{n-1} \\ v'(t) & = & \mathrm{e}^{-t} & & v(t) & = & -\mathrm{e}^{-t} \end{array} \right.$$

Cette IPP est valide car les fonctions u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, x]$.

On obtient :

$$\begin{array}{rcl} J_n(x) & = & \dfrac{1}{n!} \displaystyle\int_0^x t^n \ \mathrm{e}^{-t} \ dt \\ & = & \dfrac{1}{n!} \left(\Big[\ -t^n \ \mathrm{e}^{-t} \ \Big]_0^x + n \ \displaystyle\int_0^x t^{n-1} \ \mathrm{e}^{-t} \ dt \right) \\ & = & \dfrac{-1}{n!} \left(x^n \ \mathrm{e}^{-x} - 0\right) + \dfrac{1}{n!} \ n \ \displaystyle\int_0^x t^{n-1} \ \mathrm{e}^{-t} \ dt \\ & = & J_{n-1}(x) - \dfrac{1}{n!} \ x^n \ \mathrm{e}^{-x} \end{array}$$

$$\boxed{\text{Ainsi, pour tout } x > 0 : \forall n \in \mathbb{N}^*, \ J_n(x) = J_{n-1}(x) - \dfrac{1}{n!} \ x^n \ \mathrm{e}^{-x}.}$$

□

c) En déduire pour tout réel $x > 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, une expression de $J_n(x)$ sous forme de somme.

Démonstration.
Soit $x > 0$.

- D'après la question précédente :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \ J_k(x) - J_{k-1}(x) = -\frac{1}{k!} \ x^k \ \mathrm{e}^{-x}$$

- Soit $n \in \mathbb{N}^*$. En sommant ces relations, on obtient :

$$\begin{array}{ccccc} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \left(J_k(x) - J_{k-1}(x)\right) & = & -\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k!} \ x^k \ \mathrm{e}^{-x} & = & -\mathrm{e}^{-x} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \dfrac{x^k}{k!} \\ \shortparallel & & & & \\ J_n(x) - J_0(x) & = & J_n(x) - \left(1 - \mathrm{e}^{-x}\right) & & \end{array}$$

(par sommation télescopique)

- On en déduit :

$$J_n(x) \ = \ 1 - \mathrm{e}^{-x} - \mathrm{e}^{-x} \sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k!} \ = \ 1 - \mathrm{e}^{-x} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$$

$$\boxed{\text{Pour tout } x > 0 \text{ et pour tout } n \in \mathbb{N}^*, \ J_n(x) = 1 - \mathrm{e}^{-x} \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \dfrac{x^k}{k!}.}$$

□

d) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^n \mathrm{e}^{-t} \ dt$ est convergente et calculer sa valeur.

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

- La fonction $t \mapsto t^n \ \mathrm{e}^{-t}$ est continue sur $[0, +\infty[$.
  (ainsi, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^n \ e^{-t} \ dt$ est impropre seulement en $+\infty$)
- Soit $x \in [0, +\infty[$. D'après la question précédente :

$$\int_0^x t^n \ \mathrm{e}^{-t} \ dt \ = \ n! \ J_n(x) = n! \ \left(1 - \mathrm{e}^{-x} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}\right) \ = \ n! - n! \ \mathrm{e}^{-x} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$$

- Or : $\sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{x^k}{k!} \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{x^n}{n!}$ (le terme dominant d'un polynôme est son terme de plus haut degré).

  On en déduit :

$$n!\ \mathrm{e}^{-x} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \underset{x\to+\infty}{\sim} n!\ \mathrm{e}^{-x} \ \frac{x^n}{n!} \ = \ \frac{x^n}{\mathrm{e}^x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \quad \text{(par croissances comparées)}$$

- On en déduit :

$$\int_0^x t^n\ \mathrm{e}^{-t}\ dt \ = \ n! - n!\ \mathrm{e}^{-x} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} n!$$

$$\boxed{\text{L'intégrale } \int_0^{+\infty} t^n\ \mathrm{e}^{-t}\ dt \text{ est convergente et vaut } n!.}$$

□

e) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note : $I_n = \displaystyle\int_0^1 \mathrm{e}^{n\,(x+\ln(1-x))}\ dx$.

À l'aide du changement de variable $t = n(1-x)$, montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$I_n = n!\ \frac{\mathrm{e}^n}{n^{n+1}}\ J_n(n)$$

Démonstration.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Notons $g_n : x \mapsto \mathrm{e}^{n(x+\ln(1-x))}$.

- La fonction g_n est continue sur $[0,1[$ car elle est la composée $g_n = h_2 \circ h_1$ où :
  - × $h_1 : x \mapsto n\,(x + \ln(1-x))$ est :
    - – continue sur $[0,1[$.
    - – telle que : $h_1\big([0,1[\big) \subset \mathbb{R}$.
  - × $h_2 = \exp$ est continue sur $\mathbb{R}$.
- De plus, la fonction g_n est prolongeable par continuité en 0. En effet :

$$\begin{array}{rl} & \lim\limits_{x\to 1} \ln(1-x) = -\infty \\ \text{donc} & \lim\limits_{x\to 1} n\ (x+\ln(1-x)) = -\infty \qquad \textit{(car } n \geqslant 0\textit{)} \\ \text{et} & \lim\limits_{x\to 1} \exp\left(n\ (x+\ln(1-x))\right) = \lim\limits_{X\to-\infty} \mathrm{e}^X = 0 \end{array}$$

  On pose alors : $g_n(1) = 0$.

$$\boxed{\text{La fonction } g_n \text{ ainsi prolongée est continue sur } [0,1].}$$

- On effectue alors le changement de variable $\boxed{t = n\ (1-x)}$:

$$\left|\begin{array}{l} t = n\ (1-x) \quad \text{(et donc } x = 1 - \frac{t}{n}) \\ \hookrightarrow dt = -n\ dx \quad \text{et} \quad dx = -\dfrac{1}{n}\ dt \\ \bullet\ x = 0 \ \Rightarrow\ t = n \\ \bullet\ x = 1 \ \Rightarrow\ t = 0 \end{array}\right.$$

  Ce changement de variable est valide car la fonction $\varphi : t \mapsto 1 - \frac{t}{n}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,n]$.

En particulier : $nx = n - t$ et $n \ln(1-x) = n \ln\left(\dfrac{t}{n}\right)$. On en déduit :

$$\begin{aligned}
I_n &= \int_0^1 g_n(x)\, dx \ = \ \int_0^1 \exp(nx + n\ln(1-x))\, dx \\
&= \int_n^0 \exp\left((n-t) + n\ln\left(\frac{t}{n}\right)\right) \frac{-1}{n}\, dt \\
&= -\frac{1}{n} \int_n^0 \mathrm{e}^{n-t} \times \mathrm{e}^{n\ln\left(\frac{t}{n}\right)}\, dt \ = \ \frac{1}{n} \int_0^n \mathrm{e}^{n} \times \mathrm{e}^{-t} \times \mathrm{e}^{\left(\ln\left(\frac{t}{n}\right)^n\right)}\, dt \\
&= \frac{\mathrm{e}^n}{n} \int_0^n \mathrm{e}^{-t} \times \left(\frac{t}{n}\right)^n dt \ = \ \frac{\mathrm{e}^n}{n} \frac{1}{n^n} \int_0^n \mathrm{e}^{-t} \times t^n\, dt \\
&= \frac{\mathrm{e}^n}{n^{n+1}}\ n!\ J_n(n)
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Ainsi, pour tout } n \in \mathbb{N}^*,\ I_n = \frac{\mathrm{e}^n}{n^{n+1}}\ n!\ J_n(n).}$$

□

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes, définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$, de même loi de Poisson de paramètre 1. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $S_n = \sum\limits_{i=1}^{n} X_i$.
On admet : $S_n \hookrightarrow \mathcal{P}(n)$.

2. Exprimer pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}([S_n \leqslant n])$ et $\mathbb{P}([S_n \geqslant n])$ en fonction de $J_n(n)$ et $J_{n-1}(n)$ respectivement.

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

- Comme $S_n(\Omega) = \mathbb{N}$, on a : $[S_n \leqslant n] \ = \ \bigcup\limits_{k=0}^{n} [S_n = k]$.

  On obtient alors :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}([S_n \leqslant n]) &= \mathbb{P}\left(\bigcup_{k=0}^{n} [S_n = k]\right) \\
&= \sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}([S_n = k]) && \textit{(car la famille } \big([S_n = k]\big)_{k\in[\![0,n]\!]} \textit{ est constituée d'événements 2 à 2 incompatibles)} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \mathrm{e}^{-n} \frac{n^k}{k!} \\
&= 1 - \left(1 - \mathrm{e}^{-n} \sum_{k=0}^{n} \frac{n^k}{k!}\right) \\
&= 1 - J_n(n) && \textit{(d'après la question } \textbf{\textit{1.c)}} \textit{ avec } x = n > 0)
\end{aligned}$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \mathbb{P}\big([S_n \leqslant n]\big) = 1 - J_n(n)}$$

- Ensuite : $[S_n \geqslant n] \ = \ \overline{[S_n < n]} \ = \ \overline{\bigcup\limits_{k=0}^{n-1} [S_n = k]}$.

  On en déduit :

$$\begin{array}{rcll} \mathbb{P}([S_n \geqslant n]) & = & 1 - \mathbb{P}\left(\bigcup\limits_{k=0}^{n-1} [S_n = k]\right) & \\ & = & 1 - \sum\limits_{k=0}^{n-1} \mathbb{P}([S_n = k]) & \textit{(car la famille } \big([S_n = k]\big)_{k \in [\![0,n-1]\!]} \textit{ est constituée d'événements 2 à 2 incompatibles)} \\ & = & 1 - \sum\limits_{k=0}^{n-1} \mathrm{e}^{-n} \dfrac{n^k}{k!} \ = \ 1 - \mathrm{e}^{-n} \sum\limits_{k=0}^{n-1} \dfrac{n^k}{k!} & \end{array}$$

  Deux cas se présentent alors :

  × si $n > 1$, d'après la question ***1.c)*** avec $n - 1 > 0$ et $x = n > 0$, on a :

$$1 - \mathrm{e}^{-n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{n^k}{k!} \ = \ J_{n-1}(n)$$

  × si $n = 1$, alors :

  – d'une part : $J_0(n) = 1 - \mathrm{e}^{-n}$ d'après la question ***1.a)*** avec $x = n > 0$.

  – d'autre part : $1 - \mathrm{e}^{-n} \sum\limits_{k=0}^{0} \dfrac{n^k}{k!} \ = \ 1 - \mathrm{e}^{-n} \dfrac{n^0}{0!} \ = \ 1 - \mathrm{e}^{-n} = J_0(n)$.

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \ \mathbb{P}\big([S_n \geqslant n]\big) = J_{n-1}(n)}$$

□

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note h_n la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ à valeurs réelles, telle que : $h_n(x) = x^n \mathrm{e}^{-x}$.

a) Étudier les variations de h_n sur $\mathbb{R}_+$.

Démonstration.

- La fonction h_n est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ par produit de fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.
- Soit $x \in \mathbb{R}_+$.

$$h_n'(x) \ = \ n\,x^{n-1}\,\mathrm{e}^{-x} + x^n\,(-\mathrm{e}^{-x}) \ = \ \big(n\,x^{n-1} - x^n\big)\,\mathrm{e}^{-x} \ = \ x^{n-1} \ (n - x) \ \mathrm{e}^{-x}$$

- Comme $x^{n-1} > 0$ et $\mathrm{e}^{-x} > 0$, $h_n'(x)$ est du signe de $n - x$.
  On en déduit le tableau de variation suivant.

x	0		n		$+\infty$
Signe de $h_n'(x)$	0	$+$	0	$-$	
Variations de h_n	0	$\nearrow$	$n^n\ \mathrm{e}^{-n}$	$\searrow$	0

□

b) Établir pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la relation :

$$\mathbb{P}([S_{n+1} \leqslant n+1]) - \mathbb{P}([S_n \leqslant n]) = -\frac{1}{(n+1)!} \int_n^{n+1} \big(h_{n+1}(t) - h_{n+1}(n)\big) \, dt$$

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

- Tout d'abord :

$$\begin{aligned}
& \mathbb{P}([S_{n+1} \leqslant n+1]) - \mathbb{P}([S_n \leqslant n]) \\
= \ & (1 - J_{n+1}(n+1)) - (1 - J_n(n)) && \textit{(d'après la question 2.)} \\
= \ & J_n(n) - J_{n+1}(n+1) \\
= \ & \frac{1}{n!} \int_0^n h_n(t) \, dt - \frac{1}{(n+1)!} \int_0^{n+1} h_{n+1}(t) \, dt && \textit{(par définition)} \\
= \ & \frac{1}{(n+1)!} \left(\int_0^n (n+1) \, h_n(t) \, dt - \int_0^{n+1} h_{n+1}(t) \, dt \right) \\
= \ & \frac{1}{(n+1)!} \left(\int_0^n (n+1) \, h_n(t) \, dt - \int_0^n h_{n+1}(t) \, dt - \int_n^{n+1} h_{n+1}(t) \, dt \right) && \textit{(par relation de Chasles)} \\
= \ & \frac{1}{(n+1)!} \left(\int_0^n \big((n+1) \, h_n(t) - h_{n+1}(t)\big) \, dt - \int_n^{n+1} h_{n+1}(t) \, dt \right) && \textit{(par linéarité de l'intégration)}
\end{aligned}$$

- Or :

$$\begin{aligned}
(n+1) \, h_n(t) - h_{n+1}(t) &= (n+1) \, t^n \, \mathrm{e}^{-t} - t^{n+1} \, \mathrm{e}^{-t} \\
&= t^n \, ((n+1) - t) \, \mathrm{e}^{-t} \\
&= h'_{n+1}(t) && \textit{(d'après la question précédente)}
\end{aligned}$$

- Ainsi :

$$\begin{aligned}
\int_0^n \big((n+1) \, h_n(t) - h_{n+1}(t)\big) \, dt &= \int_0^n h'_{n+1}(t) \, dt \\
&= \big[\ h_{n+1}(t) \ \big]_0^n \\
&= h_{n+1}(n) - \cancel{h_{n+1}(0)} \\
&= h_{n+1}(n) \\
&= \int_n^{n+1} h_{n+1}(n) \, dt && \textit{(car } h_{n+1}(n) \textit{ est indépendant de la variable d'intégration } t\textit{)}
\end{aligned}$$

- On en conclut :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}([S_{n+1} \leqslant n+1]) - \mathbb{P}([S_n \leqslant n]) &= \frac{1}{(n+1)!} \left(\int_n^{n+1} h_{n+1}(n)\, dt - \int_n^{n+1} h_{n+1}(t)\, dt \right) \\ &= \frac{1}{(n+1)!} \int_n^{n+1} (h_{n+1}(n) - h_{n+1}(t))\, dt\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Pour tout } n \in \mathbb{N}^*,\ \mathbb{P}([S_{n+1} \leqslant n+1]) - \mathbb{P}([S_n \leqslant n]) = -\frac{1}{(n+1)!} \int_n^{n+1} (h_{n+1}(t) - h_{n+1}(n))\, dt}$$

□

c) En déduire que la suite $\big(\mathbb{P}([S_n \leqslant n])\big)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante.

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

- La fonction h_{n+1} est croissante sur $[0, n+1]$. Si $t \in [n, n+1]$, alors $t \geqslant n$ et ainsi :

$$h_{n+1}(t) \ \geqslant\ h_{n+1}(n) \quad \text{et donc} \quad h_{n+1}(t) - h_{n+1}(n) \geqslant 0$$

- Par croissance de l'intégrale, les bornes étant dans l'ordre croissant ($n \leqslant n+1$) :

$$\mathbb{P}([S_{n+1} \leqslant n+1]) - \mathbb{P}([S_n \leqslant n]) = -\frac{1}{(n+1)!} \int_n^{n+1} (h_{n+1}(t) - h_{n+1}(n))\, dt \ \leqslant\ 0$$

On en déduit : $\mathbb{P}([S_{n+1} \leqslant n+1]) \ \leqslant\ \mathbb{P}([S_n \leqslant n])$.

$$\boxed{\text{La suite } (\mathbb{P}([S_n \leqslant n]))_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ est décroissante.}}$$

□

d) Étudier la monotonie de la suite $\big(\mathbb{P}([S_n \geqslant n])\big)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On procède comme dans la question ***3.b)***.

- Tout d'abord :

$$\begin{aligned}& \mathbb{P}([S_{n+1} \geqslant n+1]) - \mathbb{P}([S_n \geqslant n]) \\ = {} & J_n(n+1) - J_{n-1}(n) && \textit{(d'après la question 2.)} \\ = {} & \frac{1}{n!} \int_0^{n+1} h_n(t)\, dt - \frac{1}{(n-1)!} \int_0^{n} h_{n-1}(t)\, dt \\ = {} & \frac{1}{n!} \left(\int_0^{n+1} h_n(t)\, dt - \int_0^{n} n\, h_{n-1}(t)\, dt \right) \\ = {} & \frac{1}{n!} \left(\int_0^{n} h_n(t)\, dt + \int_n^{n+1} h_n(t)\, dt - \int_0^{n} n\, h_{n-1}(t)\, dt \right) && \textit{(par relation de Chasles)} \\ = {} & \frac{1}{n!} \left(\int_0^{n} (h_n(t) - n\, h_{n-1}(t))\, dt + \int_n^{n+1} h_n(t)\, dt \right) && \textit{(par linéarité de l'intégration)}\end{aligned}$$

- Or :

$$\begin{array}{rcl} h_n(t) - n\ h_{n-1}(t) & = & t^n\,\mathrm{e}^{-t} - n\ t^{n-1}\,\mathrm{e}^{-t} \\ & = & t^{n-1}\,(t-n)\,\mathrm{e}^{-t} \\ & = & -h_n'(t) \qquad \textit{(d'après la question précédente)} \end{array}$$

- Ainsi :

$$\begin{array}{rcl} \displaystyle\int_0^n \big(h_n(t) - n\ h_{n-1}(t)\big)\ dt & = & -\displaystyle\int_0^n h_n'(t)\ dt \\ & = & -\big[\ h_n(t)\ \big]_0^n \\ & = & -(h_n(n) - \cancel{h_n(0)}) \\ & = & -h_n(n) \\ & = & -\displaystyle\int_n^{n+1} h_n(n)\ dt \qquad \textit{(car } h_n(n) \textit{ est indépendant de la variable d'intégration } t\textit{)} \end{array}$$

- On en conclut :

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{P}([S_{n+1} \geqslant n+1]) - \mathbb{P}([S_n \geqslant n]) & = & \dfrac{1}{n!}\left(-\displaystyle\int_n^{n+1} h_n(n)\ dt + \int_n^{n+1} h_n(t)\ dt\right) \\ & = & \dfrac{1}{n!}\displaystyle\int_n^{n+1} \big(h_n(t) - h_n(n)\big)\ dt \end{array}$$

$$\boxed{\text{Pour tout } n \in \mathbb{N}^*,\ \mathbb{P}([S_{n+1} \leqslant n+1]) - \mathbb{P}([S_n \leqslant n]) = \frac{1}{n!}\int_n^{n+1} \big(h_n(t) - h_n(n)\big)\ dt}$$

- La fonction h_n est décroissante sur $[n, +\infty[$. Si $t \in [n, n+1]$, alors $t \geqslant n$ et ainsi :

$$h_n(t) - h_n(n) \ \leqslant\ 0$$

- Et ainsi, par croissance de l'intégrale, les bornes étant dans l'ordre croissant $(n \leqslant n+1)$:

$$\mathbb{P}([S_{n+1} \geqslant n+1]) - \mathbb{P}([S_n \geqslant n]) = \frac{1}{n!}\int_n^{n+1} \big(h_n(t) - h_n(n)\big)\ dt \ \leqslant\ 0$$

$$\boxed{\text{La suite } (\mathbb{P}([S_n(n) \geqslant n]))_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ est décroissante.}}$$

$\square$

e) Montrer que les deux suites $\big(\mathbb{P}([S_n \leqslant n])\big)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $\big(\mathbb{P}([S_n \geqslant n])\big)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont convergentes.

Démonstration.

$$\boxed{\text{D'après les questions précédentes, ces suites sont décroissantes. Elles sont de plus minorées par 0. Elles sont donc convergentes.}}$$

$\square$

4. a) **Pour les cubes**. Justifier l'égalité : $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{P}([S_n \leqslant n]) = \dfrac{1}{2}$.

Pour les carrés. On admet : $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{P}([S_n \leqslant n]) = \dfrac{1}{2}$.

Démonstration.

- D'après l'énoncé, les variables X_i sont :
  - × indépendantes.
  - × de même loi (pour tout $i \in \mathbb{N}^*$, $X_i \hookrightarrow \mathcal{P}(1)$).
    - ↪ admettent une espérance $m = 1$.
    - ↪ admettent une variance $\sigma^2 = 1$.

  D'après le théorème central limite, $S_n^* = \dfrac{S_n - \mathbb{E}(S_n)}{\sqrt{\mathbb{V}(S_n)}} = \dfrac{S_n - nm}{\sqrt{n\sigma^2}} = \dfrac{S_n - n}{\sqrt{n}} \underset{n\to+\infty}{\overset{\mathscr{L}}{\longrightarrow}} Z$

  où $Z \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$.
- On en déduit que, pour tout $b \in \mathbb{R}$:

$$\mathbb{P}([S_n^* \leqslant b]) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_{-\infty}^{b} \varphi(t)\ dt \ = \ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{b} \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\ dt \ = \ \Phi(b)$$

- On remarque enfin :

$$\mathbb{P}([S_n \leqslant n]) \ = \ \mathbb{P}([S_n - n \leqslant 0]) \ = \ \mathbb{P}\left(\left[\frac{S_n - n}{\sqrt{n}} \leqslant 0\right]\right) \ = \ \mathbb{P}\left([S_n^* \leqslant 0]\right)$$

$$\boxed{\text{On en déduit que } \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}([S_n \leqslant n]) = \Phi(0) = \frac{1}{2}.}$$

Commentaire

- On énonce fréquemment le TCL avec la v.a.r. $\overline{X_n}$, notamment dans le chapitre « Estimation ».
  Si on reprend l'exemple du choix de l'emballage (*cf* chapitre « Estimation »), $\overline{X_n}$ est alors la fréquence des réponses B sur les n personnes interrogées.
- L'énoncé présent démontrer qu'il faut aussi savoir énoncer le TCL pour la v.a.r. S_n.
  On rappelle :

$$S_n^* \ = \ \frac{S_n - \mathbb{E}(S_n)}{\sqrt{\mathbb{V}(S_n)}} \ = \ \frac{S_n - nm}{\sqrt{n\sigma^2}} \ = \ \frac{\frac{S_n}{n} - m}{\frac{\sqrt{n\sigma^2}}{n}} \ = \ \frac{\frac{S_n}{n} - m}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}} \ = \ \frac{\overline{X_n} - \mathbb{E}(\overline{X_n})}{\sqrt{\mathbb{V}(\overline{X_n})}} \ = \ \overline{X_n}^*$$

□

b) On admet : $I_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\dfrac{\pi}{2n}}$. En déduire, à l'aide de la question 1, un équivalent de $n!$ lorsque n tend vers $+\infty$.

Démonstration.

- Tout d'abord, d'après la question ***1.e)*** :

$$I_n \ = \ n!\ \frac{\mathrm{e}^n}{n^{n+1}}\ J_n(n) \quad \text{donc} \quad n! \ = \ \frac{n^{n+1}}{\mathrm{e}^n}\ \frac{I_n}{J_n(n)}$$

- Or, d'après l'énoncé : $I_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\dfrac{\pi}{2n}}$.

- Et d'après la question ***2.*** :

$$J_n(n) = 1 - \mathbb{P}([S_n \leqslant n]) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \quad \textit{(d'après la question précédente)}$$

- Et ainsi : $n! \ = \ \dfrac{n^{n+1}}{\mathrm{e}^n} \ \dfrac{I_n}{J_n(n)} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{n^{n+1}}{\mathrm{e}^n} \ \dfrac{\sqrt{\frac{\pi}{2n}}}{\frac{1}{2}} \ = \ \dfrac{n^n}{\mathrm{e}^n} \ 2n \ \sqrt{\dfrac{\pi}{2n}} \ = \ \left(\dfrac{n}{\mathrm{e}}\right)^n \ \sqrt{2\pi n}$

$$\boxed{n! \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{2\pi n} \ \left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n}$$

Commentaire

Ce résultat est connu sous le nom de formule de Stirling (hors programme). □

c) Donner un équivalent et la limite de $\mathbb{P}([S_n = n])$ lorsque n tend vers $+\infty$.

Démonstration.

- Comme $S_n \hookrightarrow \mathcal{P}(n)$: $\mathbb{P}([S_n = n]) = \dfrac{n^n}{n!} \ \mathrm{e}^{-n}$.
- On en déduit, d'après l'équivalent démontré en question précédente :

$$\mathbb{P}([S_n = n]) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n^n}{\sqrt{2\pi n}\,\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n} \ \frac{1}{\mathrm{e}^n} \ = \ \frac{n^n}{\sqrt{2\pi n} \ \frac{n^n}{\cancel{\mathrm{e}^n}} \ \cancel{\mathrm{e}^n}} \ = \ \frac{1}{\sqrt{2\pi n}}$$

$$\boxed{\mathbb{P}([S_n = n]) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{2\pi n}}}$$

□

d) Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{P}([S_n \geqslant n])$.

Démonstration.
On raisonne à l'aide de l'événement contraire :

$$\begin{array}{rcll} \mathbb{P}([S_n \geqslant n]) & = & 1 - \mathbb{P}([S_n < n]) \ = \ 1 - \mathbb{P}([S_n \leqslant n-1]) & \\ & = & 1 - (\mathbb{P}([S_n \leqslant n]) - \mathbb{P}([S_n = n])) & \\ & = & 1 - \mathbb{P}([S_n \leqslant n]) + \mathbb{P}([S_n = n]) & \\ & \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} & 1 - \dfrac{1}{2} + 0 & \textit{(d'après les questions } \textbf{\textit{4.a)}} \textit{ et } \textbf{\textit{4.c)}}\textit{)} \end{array}$$

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}([S_n \geqslant n]) = \frac{1}{2}.}$$

□

Exercice 3

Dans tout le problème, N désigne un entier supérieur ou égal à 1.
On note $\mathbb{E}(X)$ et $\mathbb{V}(X)$ respectivement, l'espérance et la variance lorsqu'elles exsitent, de toute variable aléatoire réelle X définie sur un espace probabilisé.
Soit $(U_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$, mutuellement indépendantes et de même loi uniforme discrète sur $[\![1, N]\!]$.
On pose, pour tout n de $\mathbb{N}^*$: $T_n = \sup(U_1, U_2, \dots, U_n)$ et $Z_n = \inf(U_1, U_2, \dots, U_n)$.
On admet que T_n et Z_n sont deux variables aléatoires définies sur $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$.
Ainsi, pour tout $\omega \in \Omega$, on a :

$$T_n(\omega) = \max\big(U_1(\omega), U_2(\omega), \dots, U_n(\omega)\big) \quad \text{et} \quad Z_n(\omega) = \min\big(U_1(\omega), U_2(\omega), \dots, U_n(\omega)\big)$$

On rappelle que si C désigne un élément de $\mathscr{A}$, on note $\mathbb{1}_C$ la variable aléatoire indicatrice de l'événement C, définie sur $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ par :

$$\mathbb{1}_C(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{si } \omega \in C \\ 0 & \text{si } \omega \notin C \end{cases}$$

On pose, pour tout n de $\mathbb{N}^*$: $d_n(N) = \begin{cases} \displaystyle\sum_{k=1}^{N-1} \left(\frac{k}{N}\right)^n & \text{si } N \geqslant 2 \\ 0 & \text{si } N = 1 \end{cases}$

Préliminaire

1. Soit Y une variable aléatoire définie sur $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$, à valeurs dans $[\![1, N]\!]$.
Établir les deux relations suivantes :

$$\mathbb{E}(Y) = \sum_{k=0}^{N-1} \mathbb{P}([Y > k]) \quad \text{et} \quad \mathbb{E}\big(Y^2\big) = \sum_{k=0}^{N-1} (2k+1)\, \mathbb{P}([Y > k])$$

Démonstration.

- La v.a.r. Y est une v.a.r. finie. Donc elle admet une espérance. De plus :

$$\mathbb{E}(Y) \;=\; \sum_{k=1}^{N} k\, \mathbb{P}([Y = k])$$

- Soit $k \in [\![1, N]\!]$.

$$\begin{aligned} [Y > k-1] &= [Y \geqslant k] && \textit{(car } Y \textit{ est à valeurs entières)} \\ &= [Y = k] \cup [Y > k] \end{aligned}$$

De plus les événements $[Y = k]$ et $[Y > k]$ sont incompatibles. Ainsi :

$$\mathbb{P}([Y > k-1]) \;=\; \mathbb{P}([Y = k]) + \mathbb{P}([Y > k])$$

$$\boxed{\text{On en déduit : } \forall k \in [\![1, n]\!],\ \mathbb{P}([Y = k]) = \mathbb{P}([Y > k-1]) - \mathbb{P}([Y > k]).}$$

- On calcule alors :

$$\begin{array}{rcl} & & \mathbb{E}(Y) \\ & = & \sum\limits_{k=1}^{N} k\,\mathbb{P}([Y=k]) \\ & = & \sum\limits_{k=1}^{N} k\,\Big(\mathbb{P}([Y>k-1]) - \mathbb{P}([Y>k])\Big) \\ & = & \sum\limits_{k=1}^{N} k\,\mathbb{P}([Y>k-1]) - \sum\limits_{k=1}^{N} k\,\mathbb{P}([Y>k]) \\ & = & \sum\limits_{k=0}^{N-1} (k+1)\mathbb{P}([Y>k]) - \sum\limits_{k=1}^{N} k\,\mathbb{P}([Y>k]) \qquad \textit{(par décalage d'indice)} \\ & = & \sum\limits_{k=0}^{N-1} k\,\mathbb{P}([Y>k]) + \sum\limits_{k=0}^{N-1} \mathbb{P}([Y>k]) - \sum\limits_{k=1}^{N} k\,\mathbb{P}([Y>k]) \qquad \textit{(par linéarité)} \\ & = & 0\times\mathbb{P}([Y>0]) + \cancel{\sum\limits_{k=1}^{N-1} k\,\mathbb{P}([Y>k])} + \sum\limits_{k=0}^{N-1} \mathbb{P}([Y>k]) - \left(\cancel{\sum\limits_{k=1}^{N-1} k\,\mathbb{P}([Y>k]} + N\,\mathbb{P}([Y>N])\right) \\ & = & \sum\limits_{k=0}^{N-1} \mathbb{P}([Y>k]) + \cancel{N\,\mathbb{P}([Y>N])} \qquad \textit{(car, comme } Y(\Omega) = [\![1,N]\!] \textit{ : } [Y>N]=\varnothing\textit{)} \\ & = & \sum\limits_{k=0}^{N-1} \mathbb{P}([Y>k]) \end{array}$$

$$\boxed{\mathbb{E}(Y) = \sum_{k=0}^{N-1} \mathbb{P}([Y>k])}$$

Commentaire

On pouvait également résoudre cette question en partant de l'égalité entre événements suivante, pour tout $k \in [\![0, N-1]\!]$:

$$\begin{array}{rcl} [Y>k] & = & [Y \geqslant k+1] \qquad \textit{(car } Y \textit{ est à valeurs entières)} \\ & = & \bigcup\limits_{i=k+1}^{N} [Y=i] \end{array}$$

Les événements $[Y=k+1]$, …, $[Y=N]$ sont incompatibles. Donc :

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=k+1}^{N} [Y=i]\right) = \sum_{i=k+1}^{N} \mathbb{P}([Y=i])$$

On en déduit :

$$\begin{array}{rcl} \sum\limits_{k=0}^{N-1} \mathbb{P}([Y>k]) & = & \sum\limits_{k=0}^{N-1} \sum\limits_{i=k+1}^{N} \mathbb{P}([Y=i]) \\ & = & \sum\limits_{0\leqslant k<i\leqslant N} \mathbb{P}([Y=i]) \\ & = & \sum\limits_{i=1}^{N} \sum\limits_{k=0}^{i-1} \mathbb{P}([Y=i]) \\ & = & \sum\limits_{i=1}^{N} \mathbb{P}([Y=i]) \sum\limits_{k=0}^{i-1} 1 \\ & = & \sum\limits_{i=1}^{N} i\,\mathbb{P}([Y=i]) \ = \ \mathbb{E}(Y) \end{array}$$

Commentaire

- Cette dernière méthode est un peu plus courte, mais fait intervenir une interversion de sommes qui peut être périlleuse.
- Elle a également l'inconvénient de ne pas s'adapter facilement au cas d'une v.a.r. Y où $Y(\Omega)$ est infini (cf ESSEC II 2016).

- La v.a.r. Y admet un moment d'ordre 2 car c'est une v.a.r. finie. De plus :

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}(Y^2) \\
= \ & \sum_{k=1}^{N} k^2\, \mathbb{P}([Y = k]) \\
= \ & \sum_{k=1}^{N} k^2 \Big(\mathbb{P}([Y > k-1]) - \mathbb{P}([Y > k])\Big) \\
= \ & \sum_{k=1}^{N} k^2\, \mathbb{P}([Y > k-1]) - \sum_{k=1}^{N} k^2\, \mathbb{P}([Y > k]) \\
= \ & \sum_{k=0}^{N-1} (k+1)^2 \mathbb{P}([Y > k]) - \sum_{k=1}^{N} k^2\, \mathbb{P}([Y > k]) && \textit{(par décalage d'indice)} \\
= \ & \sum_{k=0}^{N-1} (k^2+2k+1) \mathbb{P}([Y > k]) - \sum_{k=1}^{N} k^2\, \mathbb{P}([Y > k]) \\
= \ & \sum_{k=0}^{N-1} k^2\, \mathbb{P}([Y > k]) + \sum_{k=0}^{N-1} (2k+1) \mathbb{P}([Y > k]) - \sum_{k=1}^{N} k^2\, \mathbb{P}([Y > k]) && \textit{(par linéarité)} \\
= \ & 0^2 \times \mathbb{P}([Y > 0]) + \cancel{\sum_{k=1}^{N-1} k^2\, \mathbb{P}([Y > k])} + \sum_{k=0}^{N-1} (2k+1) \mathbb{P}([Y > k]) - \left(\cancel{\sum_{k=1}^{N-1} k^2\, \mathbb{P}([Y > k]} + N^2\, \mathbb{P}([Y > N]) \right) \\
= \ & \sum_{k=0}^{N-1} (2k+1) \mathbb{P}([Y > k]) + \cancel{N^2\, \mathbb{P}([Y > N]})) && \textit{(car, comme } Y(\Omega) = [\![1, N]\!] \textit{ : } [Y > N] = \varnothing \textit{)} \\
= \ & \sum_{k=0}^{N-1} (2k+1) \mathbb{P}([Y > k])
\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathbb{E}(Y^2) \ = \ \sum_{k=0}^{N-1} (2k+1) \mathbb{P}([Y > k])}$$

□

Partie I. Inf et Sup

2. Rappeler, sans démonstration, les valeurs respectives de $\mathbb{E}(U_1)$ et de $\mathbb{V}(U_1)$.

Démonstration.

$$\boxed{\text{Comme } U_1 \hookrightarrow \mathcal{U}([\![1, N]\!]) : \mathbb{E}(U_1) = \frac{N+1}{2},\ \mathbb{V}(U_1) = \frac{N^2-1}{12}.}$$

□

3. ***a)*** Calculer, pour tout k de $[\![1, N]\!]$, $\mathbb{P}([T_n \leqslant k])$.

Démonstration.
Soit $k \in [\![1, N]\!]$.

- Tout d'abord :

$$[T_n \leqslant k] \ = \ \bigcap_{i=1}^{n} [U_i \leqslant k]$$

- On obtient alors :

$$\begin{array}{rcll} \mathbb{P}([T_n \leqslant k]) & = & \mathbb{P}\left(\bigcap\limits_{i=1}^{n} [U_i \leqslant k] \right) & \\ & = & \prod\limits_{i=1}^{n} \mathbb{P}([U_i \leqslant k]) & \textit{(par indépendance des v.a.r. } U_1, \ldots, U_n\textit{)} \end{array}$$

- Calculons maintenant, pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, $\mathbb{P}([U_i \leqslant k])$.
  × Tout d'abord :

$$[U_i \leqslant k] \ = \ \bigcup_{j=1}^{k} [U_i = j]$$

  × On en déduit :

$$\begin{array}{rcll} \mathbb{P}([U_i \leqslant k]) & = & \mathbb{P}\left(\bigcup\limits_{j=1}^{k} [U_i = j] \right) & \\ & = & \sum\limits_{j=1}^{k} \mathbb{P}([U_i = j]) & \textit{(car } [U_i = 1], \ldots, [U_i = k] \textit{ sont incompatibles)} \\ & = & \sum\limits_{j=1}^{k} \dfrac{1}{N} & \textit{(car } U_i \hookrightarrow \mathcal{U}([\![1,N]\!])\textit{)} \\ & = & \dfrac{k}{N} & \end{array}$$

- Ainsi :

$$\mathbb{P}([T_n \leqslant k]) \ = \ \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}([U_i \leqslant k]) \ = \ \prod_{i=1}^{n} \frac{k}{N} \ = \ \left(\frac{k}{N}\right)^n$$

$$\boxed{\forall k \in [\![1,N]\!],\ \mathbb{P}([T_n \leqslant k]) \ = \ \left(\frac{k}{N}\right)^n}$$

□

b) En déduire la loi de probabilité de T_n.

Démonstration.

- Tout d'abord : $T_n(\Omega) \subset [\![1,N]\!]$. En effet, pour tout $i \in [\![1,n]\!]$: $U_i(\Omega) = [\![1,N]\!]$.
- Soit $k \in [\![1,N]\!]$.

$$\begin{array}{rcll} [T_n \leqslant k] & = & [T_n = k] \cup [T_n < k] & \\ & = & [T_n = k] \cup [T_n \leqslant k-1] & \textit{(car } T_n \textit{ est à valeurs entières)} \end{array}$$

  Comme $[T_n = k]$ et $[T_n \leqslant k-1]$ sont incompatibles, on en déduit :

$$\mathbb{P}([T_n \leqslant k]) \ = \ \mathbb{P}([T_n = k]) + \mathbb{P}([T_n \leqslant k-1])$$

  D'où :

$$\mathbb{P}([T_n = k]) \ = \ \mathbb{P}([T_n \leqslant k]) - \mathbb{P}([T_n \leqslant k-1])$$

  Deux cas se présentent alors :
  × si $k \geqslant 2$, alors $k \in [\![1,N]\!]$ et $k-1 \in [\![1,N]\!]$. On peut donc appliquer la question précédente et on obtient :

$$\mathbb{P}([T_n = k]) \ = \ \left(\frac{k}{N}\right)^n - \left(\frac{k-1}{N}\right)^n$$

× si $k = 1$, alors :

$$\begin{array}{rcll} \mathbb{P}([T_n = 1]) & = & \mathbb{P}([T_n \leqslant 1]) - \mathbb{P}([T_n \leqslant 0]) & \\ & = & \mathbb{P}([T_n \leqslant 1]) & \textit{(car, comme } T_n(\Omega) \subset [\![1, N]\!] \textit{ : } [T_n \leqslant 0] = \varnothing\textit{)} \\ & = & \left(\dfrac{1}{N}\right)^n & \textit{(d'après la question précédente)} \end{array}$$

On vérifie que la formule obtenue pour $k \geqslant 2$ est toujours vraie pour $k = 1$:

$$\left(\frac{1}{N}\right)^n - \left(\frac{1-1}{N}\right)^n = \left(\frac{1}{N}\right)^n - \cancel{\left(\frac{0}{N}\right)^n} = \left(\frac{1}{N}\right)^n$$

On a donc bien :

$$\mathbb{P}([T_n = 1]) = \left(\frac{1}{N}\right)^n - \left(\frac{1-1}{N}\right)^n$$

$$\boxed{\text{On obtient alors : } \forall k \in [\![1, N]\!],\ \mathbb{P}([T_n = k]) = \left(\frac{k}{N}\right)^n - \left(\frac{k-1}{N}\right)^n.}$$

□

4. a) Montrer que la suite $(d_n(N))_{n \geqslant 1}$ est convergente et calculer sa limite.

Démonstration.

- Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$d_n(N) = \sum_{k=1}^{N-1} \left(\frac{k}{N}\right)^n = \left(\frac{1}{N}\right)^n + \left(\frac{2}{N}\right)^n + \cdots + \left(\frac{N-1}{N}\right)^n$$

- Or, pour tout $k \in [\![1, N-1]\!]$: $\left|\dfrac{k}{N}\right| < 1$. D'où : $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\dfrac{k}{N}\right)^n = 0$.

$$\boxed{\text{On en déduit que la suite } (d_n(N))_{n \in \mathbb{N}^*} \text{ est convergente en tant que somme de suites convergentes et : } \lim_{n \to +\infty} d_n(N) = 0.}$$

□

b) Exprimer $\mathbb{E}(T_n)$ en fonction de N et de $d_n(N)$. En déduire la valeur de $\lim\limits_{n \to +\infty} \mathbb{E}(T_n)$.

Démonstration.

- La v.a.r. T_n admet une espérance car c'est une v.a.r. finie.
- On calcule alors :

$$\begin{array}{rcll} \mathbb{E}(T_n) & = & \displaystyle\sum_{k=0}^{N-1} \mathbb{P}([T_n > k]) & \textit{(d'après la question } \textbf{\textit{1.}}\textit{)} \\ & = & \displaystyle\sum_{k=0}^{N-1} \big(1 - \mathbb{P}([T_n \leqslant k])\big) & \\ & = & \displaystyle\sum_{k=0}^{N-1} \left(1 - \left(\frac{k}{N}\right)^n\right) & \textit{(d'après la question } \textbf{\textit{3.a)}}\textit{)} \\ & = & \displaystyle\sum_{k=0}^{N-1} 1 - \sum_{k=0}^{N-1} \left(\frac{k}{N}\right)^n & \\ & = & N - d_n(N) & \end{array}$$

$$\boxed{\mathbb{E}(T_n) = N - d_n(N)}$$

- D'après la question précédente : $\lim\limits_{n \to +\infty} d_n(N) = 0$.

$$\boxed{\text{On en déduit : } \lim\limits_{n \to +\infty} \mathbb{E}(T_n) = N.}$$

□

c) Établir la formule suivante : $\mathbb{V}(T_n) = (2N-1)\, d_n(N) - 2N\, d_{n+1}(N) - {d_n}^2(N)$.
En déduire la valeur de $\lim\limits_{n \to +\infty} \mathbb{V}(T_n)$.

Démonstration.

- La v.a.r. T_n admet une variance car c'est une v.a.r. finie.
- On détermine d'abord $\mathbb{E}(T_n^2)$.

$$\begin{array}{rcll}
\mathbb{E}(T_n^2) & = & \sum\limits_{k=0}^{N-1} (2k+1)\, \mathbb{P}([T_n > k]) & \textit{(d'après la question \textbf{1.})} \\
& = & \sum\limits_{k=0}^{N-1} (2k+1)\big(1 - \mathbb{P}([T_n \leqslant k])\big) & \\
& = & \sum\limits_{k=0}^{N-1} (2k+1) \left(1 - \left(\dfrac{k}{N}\right)^n\right) & \textit{(d'après la question \textbf{3.a)})} \\
& = & \sum\limits_{k=0}^{N-1} (2k+1) - \sum\limits_{k=0}^{N-1} (2k+1) \left(\dfrac{k}{N}\right)^n & \\
& = & 2 \sum\limits_{k=0}^{N-1} k + \sum\limits_{k=0}^{N-1} 1 - \left(\sum\limits_{k=0}^{N-1} 2k \left(\dfrac{k}{N}\right)^n + \sum\limits_{k=0}^{N-1} \left(\dfrac{k}{N}\right)^n\right) & \\
& = & \cancel{2}\, \dfrac{(N-1)N}{\cancel{2}} + N - 2 \sum\limits_{k=0}^{N-1} k \left(\dfrac{k}{N}\right)^n - \sum\limits_{k=0}^{N-1} \left(\dfrac{k}{N}\right)^n & \\
& = & N^2 - \cancel{N} + \cancel{N} - 2 \sum\limits_{k=0}^{N-1} k\, \dfrac{k^n}{N^n} - d_n(N) & \\
& = & N^2 - 2N \sum\limits_{k=0}^{N-1} \dfrac{k^{n+1}}{N^{n+1}} - d_n(N) & \\
& = & N^2 - 2N \sum\limits_{k=0}^{N-1} \left(\dfrac{k}{N}\right)^{n+1} - d_n(N) & \\
& = & N^2 - 2N\, d_{n+1}(N) - d_n(N) &
\end{array}$$

- D'après la formule de Koenig-Huygens :

$$\begin{array}{rcl}
\mathbb{V}(T_n) & = & \mathbb{E}(T_n^2) - \big(\mathbb{E}(T_n)\big)^2 \\
& = & N^2 - 2N\, d_{n+1}(N) - d_n(N) - \big(N - d_n(N)\big)^2 \\
& = & \cancel{N^2} - 2N\, d_{n+1}(N) - d_n(N) - \Big(\cancel{N^2} - 2N\, d_n(N) + \big(d_n(N)\big)^2\Big) \\
& = & (2N-1) d_n(N) - 2N\, d_{n+1}(N) - \big(d_n(N)\big)^2
\end{array}$$

$$\boxed{\mathbb{V}(T_n) \ = \ (2N-1) d_n(N) - 2N\, d_{n+1}(N) - \big(d_n(N)\big)^2}$$

- Or, d'après la question ***4.a)*** : $\lim\limits_{n \to +\infty} d_n(N) = 0$. On a donc aussi : $\lim\limits_{n \to +\infty} d_{n+1}(N) = 0$.

$$\boxed{\text{On en déduit : } \lim\limits_{n \to +\infty} \mathbb{V}(T_n) = 0.}$$

□

d) Montrer que si $N \geqslant 2$, on a : $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{d_{n+1}(N)}{d_n(N)} = 1 - \dfrac{1}{N}$.

En déduire que l'on a : $V(T_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} d_n(N)$.

Démonstration.

- Soit $N \geqslant 2$.

$$\begin{aligned}
\frac{d_{n+1}(N)}{d_n(N)} &= \frac{\left(\frac{1}{N}\right)^{n+1} + \left(\frac{2}{N}\right)^{n+1} + \cdots + \left(\frac{N-1}{N}\right)^{n}}{\left(\frac{1}{N}\right)^{n} + \left(\frac{2}{N}\right)^{n} + \cdots + \left(\frac{N-1}{N}\right)^{n}} \\
&= \frac{\left(\dfrac{N-1}{N}\right)^{n+1} \left(\dfrac{\left(\frac{1}{\cancel{N}}\right)^{n+1}}{\left(\frac{N-1}{\cancel{N}}\right)^{n+1}} + \dfrac{\left(\frac{2}{\cancel{N}}\right)^{n+1}}{\left(\frac{N-1}{\cancel{N}}\right)^{n+1}} + \cdots + \dfrac{\left(\frac{N-2}{\cancel{N}}\right)^{n+1}}{\left(\frac{N-1}{\cancel{N}}\right)^{n+1}} + 1 \right)}{\left(\dfrac{N-1}{N}\right)^{n} \left(\dfrac{\left(\frac{1}{\cancel{N}}\right)^{n}}{\left(\frac{N-1}{\cancel{N}}\right)^{n}} + \dfrac{\left(\frac{2}{\cancel{N}}\right)^{n}}{\left(\frac{N-1}{\cancel{N}}\right)^{n}} + \cdots + \dfrac{\left(\frac{N-2}{\cancel{N}}\right)^{n}}{\left(\frac{N-1}{\cancel{N}}\right)^{n}} + 1 \right)} \\
&= \frac{N-1}{N} \, \frac{\left(\frac{1}{N-1}\right)^{n+1} + \left(\frac{2}{N-1}\right)^{n+1} + \cdots + \left(\frac{N-2}{N-1}\right)^{n+1} + 1}{\left(\frac{1}{N-1}\right)^{n} + \left(\frac{2}{N-1}\right)^{n} + \cdots + \left(\frac{N-2}{N-1}\right)^{n} + 1} \\
&= \left(1 - \frac{1}{N}\right) \frac{\left(\frac{1}{N-1}\right)^{n+1} + \left(\frac{2}{N-1}\right)^{n+1} + \cdots + \left(\frac{N-2}{N-1}\right)^{n+1} + 1}{\left(\frac{1}{N-1}\right)^{n} + \left(\frac{2}{N-1}\right)^{n} + \cdots + \left(\frac{N-2}{N-1}\right)^{n} + 1}
\end{aligned}$$

- Or, pour tout $k \in [\![1, N-2]\!]$: $\left|\dfrac{k}{N-1}\right| < 1$. D'où : $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{k}{N-1} = 0$.

  On en déduit :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\left(\frac{1}{N-1}\right)^{n+1} + \left(\frac{2}{N-1}\right)^{n+1} + \cdots + \left(\frac{N-2}{N-1}\right)^{n+1} + 1}{\left(\frac{1}{N-1}\right)^{n} + \left(\frac{2}{N-1}\right)^{n} + \cdots + \left(\frac{N-2}{N-1}\right)^{n} + 1} = \frac{1}{1} = 1$$

$$\boxed{\text{Finalement : } \lim_{n\to+\infty} \frac{d_{n+1}(N)}{d_n(N)} = 1 - \frac{1}{N}.}$$

- Déterminons, si elle existe, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\mathbb{V}(T_n)}{d_n(N)}$.

  Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned}
\frac{\mathbb{V}(T_n)}{d_n(N)} &= (2N-1) - 2N\,\frac{d_{n+1}(N)}{d_n(N)} - d_n(N) && \textit{(d'après la question 4.c))} \\
&\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 2N - 1 - 2N\left(1 - \frac{1}{N}\right) - 0 = 1 && \textit{(d'après ce qui précède et la question 4.a))}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Ainsi : } \lim_{n\to+\infty} \frac{\mathbb{V}(T_n)}{d_n(N)} = 1 \,;\text{ c'est-à-dire } \mathbb{V}(T_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} d_n(N).}$$

□

5. Déterminer la loi de Z_n. Calculer $\mathbb{E}(Z_n)$ et $\mathbb{V}(Z_n)$.

Démonstration.

- Tout d'abord : $Z_n(\Omega) \subset [\![1, N]\!]$. En effet, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$: $U_i(\Omega) = [\![1, N]\!]$.
- Soit $k \in [\![1, N]\!]$.
  - × Pour commencer :
  $$[Z_n > k] \;=\; \bigcap_{i=1}^{n} \, [U_i > k]$$
  On en déduit :
  $$\begin{aligned} \mathbb{P}([Z_n > k]) &= \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n} \, [U_i > k]\right) \\ &= \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}([U_i > k]) && \textit{(car les v.a.r. } U_1, \ldots, U_n \textit{ sont indépendantes)} \\ &= \prod_{i=1}^{n} \big(1 - \mathbb{P}([U_i \leqslant k])\big) \\ &= \prod_{i=1}^{n} \left(1 - \frac{k}{N}\right) && \textit{(calcul effectué en } \boldsymbol{3.a)}\textit{)} \\ &= \left(1 - \frac{k}{N}\right)^n \end{aligned}$$
  $$\boxed{\forall k \in [\![1, N]\!], \, \mathbb{P}([Z_n > k]) = \left(1 - \frac{k}{N}\right)^n}$$
  - × Soit $k \in [\![1, N]\!]$. De plus :
  $$\begin{aligned} [Z_n > k-1] &= [Z_n \geqslant k] && \textit{(car } Z_n \textit{ est à valeurs entières)} \\ &= [Z_n = k] \cup [Z_n > k] \end{aligned}$$
  Or les événements $[Z_n = k]$ et $[Z_n > k]$ sont incompatibles. D'où :
  $$\mathbb{P}([Z_n > k-1]) \;=\; \mathbb{P}([Z_n = k]) + \mathbb{P}([Z_n > k])$$
  Ainsi :
  $$\mathbb{P}([Z_n = k]) \;=\; \mathbb{P}([Z_n > k-1]) - \mathbb{P}([Z_n > k])$$
  Deux cas se présentent alors :
  - si $k \geqslant 2$, alors $k \in [\![1, N]\!]$ et $k-1 \in [\![1, N]\!]$. On peut donc utiliser les calculs précédents. On obtient :
  $$\mathbb{P}([Z_n = k]) \;=\; \left(1 - \frac{k-1}{N}\right)^n - \left(1 - \frac{k}{N}\right)^n$$
  - si $k = 1$, alors :
  $$\begin{aligned} \mathbb{P}([Z_n = 1]) &= \mathbb{P}([Z_n > 0]) - \mathbb{P}([Z_n > 1]) \\ &= 1 - \mathbb{P}([Z_n > 1]) && \textit{(car, comme } Z_n(\Omega) \subset [\![1, N]\!] \textit{ : } [Z_n > 0] = \Omega\textit{)} \\ &= 1 - \left(1 - \frac{1}{N}\right)^n && \textit{(d'après les calculs précédents)} \end{aligned}$$

On vérifie que la formule obtenue pour $k \geqslant 2$ est toujours vraie pour $k = 1$:

$$\left(1 - \frac{1-1}{N}\right)^n - \left(1 - \frac{1}{N}\right)^n = (1)^n - \left(1 - \frac{1}{N}\right)^n = 1 - \left(1 - \frac{1}{N}\right)^n$$

On a donc bien :

$$\mathbb{P}([Z_n = 1]) = \left(1 - \frac{1-1}{N}\right)^n - \left(1 - \frac{1}{N}\right)^n$$

$$\boxed{\text{Finalement : } \forall k \in [\![1, N]\!],\ \mathbb{P}([Z_n = k]) = \left(1 - \frac{k-1}{N}\right)^n - \left(1 - \frac{k}{N}\right)^n.}$$

Commentaire

On détermine dans cette question la loi du minimum de v.a.r. indépendantes. On déterminait en question ***3.***, la loi du maximum de v.a.r. indépendantes. C'est extrêmement fréquent aux concours. Les techniques pour répondre à ces questions sont classiques, il est donc indispensable de les maîtriser.

- La v.a.r. Z_n admet une variance (et donc une espérance), car c'est une v.a.r. finie.
- Déterminons $\mathbb{E}(Z_n)$.

$$\begin{array}{rcll} \mathbb{E}(Z_n) & = & \sum\limits_{k=0}^{N-1} \mathbb{P}([Z_n > k]) & \textit{(d'après la question } \textbf{\textit{1.}}\textit{)} \\ & = & \sum\limits_{k=0}^{N-1} \left(1 - \dfrac{k}{N}\right)^n & \textit{(d'après les calculs précédents)} \\ & = & \sum\limits_{k=0}^{N-1} \left(\dfrac{N-k}{N}\right)^n & \\ & = & \sum\limits_{j=1}^{N} \left(\dfrac{j}{N}\right)^n & \textit{(avec le changement d'indice } j = N-k\textit{)} \\ & = & \sum\limits_{j=1}^{N-1} \left(\dfrac{j}{N}\right)^n + \left(\dfrac{N}{N}\right)^n & \\ & = & d_n(N) + 1 & \end{array}$$

$$\boxed{\mathbb{E}(Z_n) = d_n(N) + 1}$$

Commentaire

Le changement d'indice $j = N - k$ est en fait une sommation dans l'autre sens :

$$\begin{array}{rcl} \sum\limits_{k=0}^{N-1} \left(\dfrac{N-k}{N}\right)^n & = & \left(\dfrac{N}{N}\right)^n + \left(\dfrac{N-1}{N}\right)^n + \cdots + \left(\dfrac{N-(N-2)}{N}\right)^n + \left(\dfrac{N-(N-1)}{N}\right)^n \\ & = & \left(\dfrac{N}{N}\right)^n + \left(\dfrac{N-1}{N}\right)^n + \cdots + \left(\dfrac{2}{N}\right)^n + \left(\dfrac{1}{N}\right)^n \\ \sum\limits_{j=1}^{N} \left(\dfrac{j}{N}\right)^n & = & \left(\dfrac{1}{N}\right)^n + \left(\dfrac{2}{N}\right)^n + \cdots + \left(\dfrac{N-1}{N}\right)^n + \left(\dfrac{N}{N}\right)^n \end{array}$$

- Déterminons $\mathbb{E}(Z_n^2)$.

$$\begin{array}{rcll}
\mathbb{E}(Z_n^2) & = & \displaystyle\sum_{k=0}^{N-1} (2k+1)\mathbb{P}([Z_n > k]) & \textit{(d'après la question \textbf{1.})} \\
& = & \displaystyle\sum_{k=0}^{N-1} 2k\,\mathbb{P}([Z_n > k]) + \sum_{k=0}^{N-1} \mathbb{P}([Z_n > k]) & \\
& = & 2 \displaystyle\sum_{k=0}^{N-1} k\,\mathbb{P}([Z_n > k]) + \mathbb{E}(Z_n) & \textit{(d'après la question \textbf{1.})} \\
& = & 2 \displaystyle\sum_{k=0}^{N-1} k \left(\frac{N-k}{N}\right)^n + \mathbb{E}(Z_n) & \textit{(d'après les calculs précédents)} \\
& = & 2 \displaystyle\sum_{j=1}^{N} (N-j) \left(\frac{j}{N}\right)^n + \mathbb{E}(Z_n) & \textit{(avec le changement d'indice } j = N-k\textit{)} \\
& = & 2N \displaystyle\sum_{j=1}^{N} \left(\frac{j}{N}\right)^n - 2 \sum_{j=1}^{N} \frac{j^{n+1}}{N^n} + \big(d_n(N)+1\big) & \textit{(d'après le point précédent)} \\
& = & 2N\,\big(d_n(N)+1\big) - 2N \displaystyle\sum_{j=1}^{N} \left(\frac{j}{N}\right)^{n+1} + d_n(N) + 1 & \textit{(démontré dans le point précédent)} \\
& = & (2N+1)\,d_n(N) + 2N + 1 - 2N\,\big(d_{n+1}(N)+1\big) & \\
& = & (2N+1)\,d_n(N) + 1 - 2N\,d_{n+1}(N) &
\end{array}$$

- Par formule de Koenig-Huygens :

$$\begin{array}{rcl}
\mathbb{V}(Z_n) & = & \mathbb{E}(Z_n^2) - \big(\mathbb{E}(Z_n)\big)^2 \\
& = & (2N+1)\,d_n(N) + 1 - 2N\,d_{n+1}(N) - \big(d_n(N)+1\big)^2 \\
& = & (2N+1)\,d_n(N) + \cancel{1} - 2N\,d_{n+1}(N) - \Big(\big(d_n(N)\big)^2 + 2\,d_n(N) + \cancel{1}\Big) \\
& = & (2N-1)\,d_n(N) - 2N\,d_{n+1}(N) - \big(d_n(N)\big)^2
\end{array}$$

$$\boxed{\mathbb{V}(Z_n) = (2N-1)\,d_n(N) - 2N\,d_{n+1}(N) - \big(d_n(N)\big)^2 = \mathbb{V}(T_n)}$$

□

6. On rappelle que la commande `grand(1, 1, 'uin', a, b)` permet de simuler une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $[\![a,b]\!]$. Écrire une fonction **Scilab** d'en-tête `function T = simulmax(n)` qui simule la variable aléatoire T_n.

Démonstration.

```
function T = simulmax(n)
  U = zeros(1,n)
  for i in 1:n
    U(i) = grand(1,1,'uin',1,N)
  end
  T = max(U)
endfunction
```

Détaillons les différents éléments de ce code.

- en ligne 2, on crée la variable `U` dont le but est de contenir en fin de programme une réalisation du n-uplet $(U_1, \dots, U_n)$.
  Cette variable `U` est initialisée à $(0, \dots, 0)$.
- de la ligne 3 à la ligne 5, on met à jour chaque coordonée du vecteur `U` à l'aide d'une boucle.
  Chaque coordonnée du vecteur `U` contient une réalisation de la loi uniforme $\mathcal{U}([\![1, N]\!])$. On utilise pour cela la commande fournie par l'énoncé :

```
4      U(i) = grand(1,1,'uin',1,N)
```

- en ligne 6, on affecte enfin à la variable de sortie `T` le maximum des n coordonnées de `U` :

```
6      T = max(U)
```

Commentaire

On aurait pu proposer un script plus court avec la commande `grand(p, n, 'uin', a, b)` (mais cela correspondait moins à l'esprit de l'énoncé qui imposait la commande `grand(p, n, 'uin', a, b)`) :

```
function T = simulmax(n)
  U = grand(1,n,'uin',1,N)
  T = max(U)
endfunction
```

□

Partie II. Couple (Inf, Sup)

7. On pose, pour tout n de $\mathbb{N}^*$ et pour tout couple (k, ℓ) de $\mathbb{N}^2$: $\phi_n(k, \ell) = \mathbb{P}([T_n \leqslant k] \cap [Z_n \leqslant \ell])$.

a) Montrer, pour tout $(k, \ell) \in [\![1, N]\!]^2$, la relation suivante :

$$\phi_n(k, \ell) = \begin{cases} \left(\dfrac{k}{N}\right)^n & \text{si } k \leqslant \ell \\ \left(\dfrac{k}{N}\right)^n - \left(\dfrac{k-\ell}{N}\right)^n & \text{si } k > \ell \end{cases}$$

Démonstration.
Soit $(k, \ell) \in [\![1, N]\!]^2$. Deux cas se présentent.

- si $k \leqslant \ell$.
  - Tout d'abord : $[T_n \leqslant k] \subset [Z_n \leqslant \ell]$. Démontrons le.
    Soit $\omega \in [T_n \leqslant k]$. Alors : $T_n(\omega) \leqslant k$. Or :
    $$Z_n(\omega) \leqslant T_n(\omega) \leqslant k \leqslant \ell$$
    Donc : $Z_n(\omega) \leqslant \ell$, c'est-à-dire $\omega \in [Z_n \leqslant \ell]$.
  - On en déduit :
    $$[T_n \leqslant k] \cap [Z_n \leqslant \ell] \ = \ [T_n \leqslant k]$$
    Ainsi :
    $$\Phi_n(k, \ell) \ = \ \mathbb{P}([T_n \leqslant k] \cap [Z_n \leqslant \ell]) \ = \ \mathbb{P}([T_n \leqslant k])$$

$$\boxed{\text{On en conclut, d'après la question } \textit{3.a)}\text{, que si } k \leqslant \ell : \Phi_n(k, \ell) = \left(\frac{k}{N}\right)^n.}$$

- si $k > \ell$
  - $\times$ Tout d'abord :

$$[T_n \leqslant k] \ = \ \Big([T_n \leqslant k] \cap [Z_n \leqslant \ell] \Big) \cup \Big([T_n \leqslant k] \cap [Z_n > \ell] \Big)$$

Les événements $[T_n \leqslant k] \cap [Z_n \leqslant \ell]$ et $[T_n \leqslant k] \cap [Z_n > \ell]$ sont incompatibles. Donc :

$$\mathbb{P}([T_n \leqslant k]) \ = \ \mathbb{P}([T_n \leqslant k] \cap [Z_n \leqslant \ell] + \mathbb{P}([T_n \leqslant k] \cap [Z_n > \ell]) \ = \ \Phi_n(k,\ell) + \mathbb{P}([T_n \leqslant k] \cap [Z_n > \ell])$$

  - $\times$ Or :

$$\begin{aligned} [T_n \leqslant k] \cap [Z_n > \ell] &= \left(\bigcap_{i=1}^{n} [U_i \leqslant k] \right) \cap \left(\bigcap_{i=1}^{n} [U_i > \ell] \right) \\ &= \bigcap_{i=1}^{n} \big([U_i \leqslant k] \cap [U_i > \ell] \big) \\ &= \bigcap_{i=1}^{n} [\ell < U_i \leqslant k] \end{aligned}$$

On en déduit :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}([T_n \leqslant k] \cap [Z_n > \ell]) &= \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n} [\ell < U_i \leqslant k] \right) \\ &= \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}([\ell < U_i \leqslant k]) & \textit{(car les v.a.r. } U_1, \ldots, U_n \textit{ sont indépendantes)} \end{aligned}$$

  - $\times$ Soit $i \in [\![1,n]\!]$. Comme U_i est à valeurs entières :

$$[\ell < U_i \leqslant k] \ = \ [\ell + 1 \leqslant U_i \leqslant k]$$

D'où :

$$[\ell < U_i \leqslant k] \ = \ \bigcup_{j=\ell+1}^{k} [U_i = j]$$

Or les événements $[U_i = \ell + 1]$, ..., $[U_i = k]$ sont incompatibles. Ainsi :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}([\ell < U_i \leqslant k]) &= \sum_{j=\ell+1}^{k} \mathbb{P}([U_i = j]) \\ &= \sum_{j=\ell+1}^{k} \frac{1}{N} & \textit{(car } U_i \hookrightarrow \mathcal{U}([\![1,N]\!])\textit{)} \\ &= \frac{k - (\ell+1) + 1}{N} \ = \ \frac{k-\ell}{N} \end{aligned}$$

  - $\times$ On obtient alors :

$$\mathbb{P}([T_n \leqslant k] \cap [Z_n > \ell]) \ = \ \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}([\ell < U_i \leqslant k]) \ = \ \prod_{i=1}^{n} \frac{k-\ell}{N} \ = \ \left(\frac{k-\ell}{N} \right)^n$$

Finalement, d'après ***3.a)***, si $k > \ell$:
$\Phi_n(k,\ell) = \mathbb{P}([T_n \leqslant k]) - \mathbb{P}([T_n \leqslant k] \cap [Z_n > \ell]) \ = \ \left(\dfrac{k}{N} \right)^n - \left(\dfrac{k-\ell}{N} \right)^n.$

□

b) Établir, pour tout (k, ℓ) de $[\![1, N]\!]^2$, la formule suivante :

$$\mathbb{P}([T_n = k] \cap [Z_n = \ell]) = \phi_n(k, \ell) + \phi_n(k-1, \ell-1) - \phi_n(k-1, \ell) - \phi_n(k, \ell-1)$$

Démonstration.
Soit $(k, \ell) \in [\![1, N]\!]^2$.

- Tout d'abord, comme T_n et Z_n sont à valeurs entières :

$$\begin{array}{cl} & [T_n \leqslant k] \cap [Z_n \leqslant \ell] \\ = & \Big([T_n = k] \cap [Z_n = \ell]\Big) \cup \Big([T_n \leqslant k-1] \cap [Z_n \leqslant \ell]\Big) \cup \Big([T_n \leqslant k] \cap [Z_n \leqslant \ell - 1]\Big) \\ = & A_n \cup B_n \cup C_n \end{array}$$

- D'après la formule du crible, on obtient :

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{P}([T_n \leqslant k] \cap [Z_n \leqslant \ell]) & = & \mathbb{P}(A_n) + \mathbb{P}(B_n) + \mathbb{P}(C_n) \\ & - & \mathbb{P}(A_n \cap B_n) - \mathbb{P}(A_n \cap C_n) - \mathbb{P}(B_n \cap C_n) \\ & + & \mathbb{P}(A_n \cap B_n \cap C_n) \end{array}$$

- Étudions ces intersections :
  × $$\begin{array}{rcl} A_n \cap B_n & = & \Big([T_n = k] \cap [Z_n = \ell]\Big) \cap \Big([T_n \leqslant k-1] \cap [Z_n \leqslant \ell]\Big) \\ & = & \Big([T_n = k] \cap [T_n \leqslant k-1]\Big) \cap \Big([Z_n = \ell] \cap [Z_n \leqslant \ell]\Big) \\ & = & \varnothing \cap [Z_n = \ell] \\ & = & \varnothing \end{array}$$
  × $$\begin{array}{rcl} A_n \cap C_n & = & \Big([T_n = k] \cap [Z_n = \ell]\Big) \cap \Big([T_n \leqslant k] \cap [Z_n \leqslant \ell - 1]\Big) \\ & = & \Big([T_n = k] \cap [T_n \leqslant k]\Big) \cap \Big([Z_n = \ell] \cap [Z_n \leqslant \ell - 1]\Big) \\ & = & [T_n = k] \cap \varnothing \\ & = & \varnothing \end{array}$$
  × $$\begin{array}{rcl} B_n \cap C_n & = & \Big([T_n \leqslant k] \cap [Z_n = \ell - 1]\Big) \cap \Big([T_n \leqslant k-1] \cap [Z_n \leqslant \ell]\Big) \\ & = & \Big([T_n \leqslant k] \cap [T_n \leqslant k-1]\Big) \cap \Big([Z_n = \ell - 1] \cap [Z_n \leqslant \ell]\Big) \\ & = & [T_n \leqslant k-1] \cap [Z_n \leqslant \ell - 1] \end{array}$$
  × $\underline{A_n \cap B_n \cap C_n}$.
  $$A_n \cap B_n \cap C_n \ = \ \varnothing \cap C_n \ = \ \varnothing$$

- On en déduit :

$$\begin{array}{cl} & \mathbb{P}([T_n \leqslant k] \cap [Z_n \leqslant \ell]) \\ = & \mathbb{P}([T_n = k] \cap [Z_n = \ell]) + \mathbb{P}([T_n \leqslant k-1] \cap [Z_n \leqslant \ell]) + \mathbb{P}([T_n \leqslant k] \cap [Z_n \leqslant \ell - 1]) \\ - & \mathbb{P}([T_n \leqslant k-1] \cap [Z_n \leqslant \ell - 1]) \end{array}$$

Autrement dit :

$$\Phi_n(k,\ell) \ = \ \mathbb{P}([T_n = k] \cap [Z_n = \ell]) + \Phi_n(k-1,\ell) + \Phi_n(k,\ell-1) - \Phi_n(k-1,\ell-1)$$

$$\boxed{\forall (k,\ell) \in [\![1,N]\!]^2,\ \mathbb{P}([T_n = k] \cap [Z_n = \ell]) = \Phi_n(k,\ell) - \Phi_n(k-1,\ell) - \Phi_n(k,\ell-1) + \Phi_n(k-1,\ell-1)}$$

Commentaire

L'égalité entre événements :

$$[T_n \leqslant k] \cap [Z_n \leqslant \ell] \ = \ \Big([T_n = k] \cap [Z_n = \ell] \Big) \cup \Big([T_n \leqslant k-1] \cap [Z_n \leqslant \ell] \Big) \cup \Big([T_n \leqslant k] \cap [Z_n \leqslant \ell - 1] \Big)$$

peut sembler sortie du chapeau. C'est en fait un peu le cas. Plus précisément, c'est ici l'énoncé (le résultat à obtenir) qui nous pousse à écrire cette réunion. On pouvait l'obtenir aussi en raisonnant comme suit.

$$\begin{array}{cll} & [T_n \leqslant k] \cap [Z_n \leqslant \ell] & \\ = & \Big([T_n = k] \cup [T_n < k] \Big) \cap \Big([Z_n = \ell] \cup [Z_n < \ell] \Big) & \\ = & \Big([T_n = k] \cup [T_n \leqslant k-1] \Big) \cap \Big([Z_n = \ell] \cup [Z_n \leqslant \ell - 1] \Big) & \textit{(car } T_n \textit{ et } Z_n \textit{ sont à valeurs entières)} \\ = & \Big([T_n = k] \cap [Z_n = \ell] \Big) \cup \Big([T_n = k] \cap [Z_n \leqslant \ell - 1] \Big) & \\ \cup & \Big([T_n \leqslant k-1] \cap [Z_n = \ell] \Big) \cup \Big([T_n \leqslant k-1] \cap [Z_n \leqslant \ell - 1] \Big) & \textit{par distributivité de } \cup \textit{ sur } \cap) \\ = & \Big([T_n = k] \cap [Z_n = \ell] \Big) \cup E_n \cup F_n \cup G_n & \end{array}$$

On cherche maintenant à exprimer $E_n \cup F_n \cup G_n$ sous la forme d'une réunion de 2 événements.

$$E_n \cup F_n \cup G_n \ = \ E_n \cup F_n \cup G_n \cup G_n \ = \ (E_n \cup G_n) \cup (F_n \cup G_n)$$

Or :

× $E_n \cup G_n$

$$\begin{array}{cl} = & \Big([T_n = k] \cap [Z_n \leqslant \ell - 1] \Big) \cup \Big([T_n \leqslant k-1] \cap [Z_n \leqslant \ell - 1] \Big) \\ = & \Big([T_n = k] \cup [T_n \leqslant k-1] \Big) \cap [Z_n \leqslant \ell - 1] \\ = & [T_n \leqslant k] \cap [z_n \leqslant \ell - 1] \end{array}$$

× $F_n \cup G_n$

$$\begin{array}{cl} = & \Big([T_n \leqslant k-1] \cap [Z_n = \ell] \Big) \cup \Big([T_n \leqslant k-1] \cap [Z_n \leqslant \ell - 1] \Big) \\ = & [T_n \leqslant k-1] \cap \Big([Z_n = \ell] \cup [Z_n \leqslant \ell - 1] \Big) \\ = & [T_n \leqslant k-1] \cap [Z_n \leqslant \ell] \end{array}$$

On obtient bien finalement :

$$[T_n \leqslant k] \cap [Z_n \leqslant \ell] \ = \ \Big([T_n = k] \cap [Z_n = \ell] \Big) \cup \Big([T_n \leqslant k-1] \cap [Z_n \leqslant \ell] \Big) \cup \Big([T_n \leqslant k] \cap [Z_n \leqslant \ell - 1] \Big)$$

□

c) En déduire, en distinguant les trois cas $k < \ell$, $k = \ell$ et $k > \ell$, l'expression de $\mathbb{P}([T_n = k] \cap [Z_n = \ell])$ en fonction de k et ℓ.

Démonstration.
Soit $(k, \ell) \in [\![1, N]\!]^2$. D'après la question précédente :

$$\mathbb{P}([T_n = k] \cap [Z_n = \ell]) = \Phi_n(k, \ell) - \Phi_n(k-1, \ell) - \Phi_n(k, \ell-1) + \Phi_n(k-1, \ell-1)$$

Trois cas se présentent.

- si $k < \ell$, alors d'après ***3.a)*** :
  - comme $k < \ell$: $\Phi_n(k, \ell) = \left(\dfrac{k}{N}\right)^n$,
  - de plus $k - 1 < k < \ell$, donc : $\Phi_n(k-1, \ell) = \left(\dfrac{k-1}{N}\right)^n$,
  - ensuite, comme $k < \ell$, alors : $k \leqslant \ell - 1$ (car k et ℓ sont des entiers).
    Donc : $\Phi_n(k, \ell-1) = \left(\dfrac{k}{N}\right)^n$,
  - enfin $k - 1 < \ell - 1$, donc : $\Phi_n(k-1, \ell-1) = \left(\dfrac{k-1}{N}\right)^n$.

  Finalement :

$$\mathbb{P}([T_n = k] \cap [Z_n = \ell]) = \cancel{\left(\frac{k}{N}\right)^n} - \cancel{\left(\frac{k-1}{N}\right)^n} - \cancel{\left(\frac{k}{N}\right)^n} + \cancel{\left(\frac{k-1}{N}\right)^n} = 0$$

$$\boxed{\text{Si } k < \ell : \mathbb{P}([T_n = k] \cap [Z_n = \ell]) = 0.}$$

- si $k = \ell$, alors d'après ***3.a)*** :
  - comme $k = \ell$: $\Phi_n(k, \ell) = \left(\dfrac{k}{N}\right)^n$,
  - de plus $k - 1 < k = \ell$, donc : $\Phi_n(k-1, \ell) = \left(\dfrac{k-1}{N}\right)^n$,
  - ensuite, comme $k = \ell$, alors : $k > \ell - 1$. Donc :

$$\begin{aligned} \Phi_n(k, \ell-1) &= \left(\frac{k}{N}\right)^n - \left(\frac{k-(\ell-1)}{N}\right)^n \\ &= \left(\frac{k}{N}\right)^n - \left(\frac{\cancel{k}-(\cancel{k}-1)}{N}\right)^n \qquad \textit{(car } k = \ell\textit{)} \\ &= \left(\frac{k}{N}\right)^n - \left(\frac{1}{N}\right)^n \end{aligned}$$

  - enfin $k - 1 = \ell - 1$, donc : $\Phi_n(k-1, \ell-1) = \left(\dfrac{k-1}{N}\right)^n$.

  Finalement :

$$\mathbb{P}([T_n = k] \cap [Z_n = \ell]) = \cancel{\left(\frac{k}{N}\right)^n} - \cancel{\left(\frac{k-1}{N}\right)^n} - \left(\cancel{\left(\frac{k}{N}\right)^n} - \left(\frac{1}{N}\right)^n\right) + \cancel{\left(\frac{k-1}{N}\right)^n} = \frac{1}{N^n}$$

$$\boxed{\text{Si } k = \ell : \mathbb{P}([T_n = k] \cap [Z_n = \ell]) = \frac{1}{N^n}.}$$

- si $k > \ell$, alors d'après ***3.a)*** :
  - × comme $k > \ell$: $\Phi_n(k, \ell) = \left(\frac{k}{N}\right)^n - \left(\frac{k-\ell}{N}\right)^n$,
  - × de plus, comme $k > \ell$, alors : $k - 1 \geqslant \ell$ (car k et ℓ sont des entiers).
    Donc : $\Phi_n(k-1, \ell) = \left(\frac{k-1}{N}\right)^n - \left(\frac{(k-1)-\ell}{N}\right)^n$,
  - × ensuite $k > \ell > \ell - 1$, donc : $\Phi_n(k, \ell-1) = \left(\frac{k}{N}\right)^n - \left(\frac{k-(\ell-1)}{N}\right)^n$,
  - × enfin $k - 1 > \ell - 1$, donc :

$$\Phi_n(k-1, \ell-1) \;=\; \left(\frac{k-1}{N}\right)^n - \left(\frac{(k-\cancel{1})-(\ell-\cancel{1})}{N}\right)^n \;=\; \left(\frac{k-1}{N}\right)^n - \left(\frac{k-\ell}{N}\right)^n$$

  Finalement :

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}([T_n = k] \cap [Z_n = \ell]) \\ = \;& \left(\cancel{\left(\frac{k}{N}\right)^n} - \left(\frac{k-\ell}{N}\right)^n\right) - \left(\cancel{\left(\frac{k-1}{N}\right)^n} - \left(\frac{k-1-\ell}{N}\right)^n\right) \\ & - \left(\cancel{\left(\frac{k}{N}\right)^n} - \left(\frac{k-\ell+1}{N}\right)^n\right) + \left(\cancel{\left(\frac{k-1}{N}\right)^n} - \left(\frac{k-\ell}{N}\right)^n\right) \\ = \;& \left(\frac{k-\ell-1}{N}\right)^n + \left(\frac{k-\ell+1}{N}\right)^n - 2\left(\frac{k-\ell}{N}\right)^n \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Si } k > \ell : \mathbb{P}([T_n = k] \cap [Z_n = \ell]) = \left(\frac{k-\ell-1}{N}\right)^n + \left(\frac{k-\ell+1}{N}\right)^n - 2\left(\frac{k-\ell}{N}\right)^n.}$$ □

Exercice 4

On rappelle que l'intérale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} \, dt$ est convergente et que : $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} \, dt = \sqrt{2\pi}$.

1. Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} \, dt$ est convergente, et calculer sa valeur.

Démonstration.

- D'après l'énoncé, l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} \, dt$ est convergente.
  On en déduit que les intégrales impropres $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} e^{-\frac{t^2}{2}} \, dt$ et $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} \, dt$ sont convergentes.
- La fonction $f : t \mapsto e^{-\frac{t^2}{2}}$ est continue sur $\mathbb{R}$.
  De plus, elle est paire sur $\mathbb{R}$. En effet, pour tout $t \in \mathbb{R}$:
  $$f(-t) = e^{-\frac{(-t)^2}{2}} = e^{-\frac{t^2}{2}} = f(t)$$
  On effectue alors le changement de variable $\boxed{u = -t}$:
  $$\left|\begin{array}{l} u = -t \quad \text{(et donc } t = -u) \\ \hookrightarrow du = -\,dt \quad \text{et} \quad dt = -du \\ \bullet\ t = 0 \Rightarrow u = 0 \\ \bullet\ t = +\infty \Rightarrow u = -\infty \end{array}\right.$$
  Ce changement de variable est valide car la fonction $\varphi : u \mapsto -u$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-\infty, 0]$.
  On obtient :
  $$\int_{0}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} \, dt \;=\; \int_{0}^{-\infty} e^{-\frac{(-u)^2}{2}} (-du) \;=\; -\int_{0}^{-\infty} e^{-\frac{u^2}{2}} du \;=\; \int_{-\infty}^{0} e^{-\frac{u^2}{2}} du$$
- On en déduit, par relation de Chasles :
  $$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} \, dt \;=\; \int_{-\infty}^{0} e^{-\frac{t^2}{2}} \, dt + \int_{0}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} \, dt \;=\; 2 \int_{0}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} \, dt$$
  $$\boxed{\text{Ainsi : } \int_{0}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} \, dt = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} \, dt = \frac{\sqrt{2\pi}}{2} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}.}$$

Commentaire

- Rappelons tout d'abord que le programme officiel n'autorise pas les changements de variable sur les intégrales impropres, à l'exception des changements de variable affines (c'est-à-dire ceux de la forme : $u = a\,t + b$). C'est bien le cas ici.
- On a effectué ici le changement de variable permettant de démontrer que si f est une fonction paire alors :
  $$\int_{0}^{a} f(t)\, dt \;=\; \int_{-a}^{0} f(t)\, dt \quad \text{et ainsi} \quad \int_{-a}^{a} f(t)\, dt \;=\; 2 \int_{0}^{a} f(t)\, dt$$
  où $a \in \mathbb{R}+$. Ce résultat peut être utilisée directement si f est continue sur le **segment** $[0, a]$. On n'oubliera pas d'ajouter l'hypothèse de convergence dans le cas où f est continue sur $[0, a[$ (avec $a \in \mathbb{R}+$ ou $a = +\infty$).

$\square$

2. a) Déterminer, pour tout réel x, la valeur de $\lim\limits_{t \to +\infty} t^{x+1}\, \mathrm{e}^{-t}$.

Démonstration.
Soit $x \in \mathbb{R}$ et soit $t > 0$.
(on peut prendre t aussi grand que l'on veut puisqu'on cherche la limite lorsque t tend vers $+\infty$).
On cherche la limite de :

$$t^{x+1}\, \mathrm{e}^{-t} \;=\; \frac{t^{x+1}}{\mathrm{e}^{t}}$$

Trois cas se présentent.

- Si $x+1 > 0$, alors $\dfrac{t^{x+1}}{\mathrm{e}^{t}} \underset{t \to +\infty}{\longrightarrow} 0$ par croissances comparées.
- Si $x+1 = 0$, alors $\dfrac{t^{x+1}}{\mathrm{e}^{t}} = \dfrac{1}{\mathrm{e}^{t}} \underset{t \to +\infty}{\longrightarrow} 0$.
- Si $x+1 < 0$, alors $\dfrac{t^{x+1}}{\mathrm{e}^{t}} = \dfrac{1}{t^{-(x+1)}\, \mathrm{e}^{t}} \underset{t \to +\infty}{\longrightarrow} 0$.
  En effet, $\lim\limits_{t \to +\infty} t^{-(x+1)} = +\infty$ (car $-(x+1) > 0$) et $\lim\limits_{t \to +\infty} \mathrm{e}^{t} = +\infty$.

$$\boxed{\text{Ainsi, pour tout } x \in \mathbb{R}, \text{ on a : } \lim_{t \to +\infty} t^{x+1}\, \mathrm{e}^{-t} = 0.}$$

□

b) En déduire la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} t^{x-1}\, \mathrm{e}^{-t}\, dt$, pour tout réel x.

Démonstration.
Soit $x \in \mathbb{R}$.

- La fonction $g : t \mapsto t^{x-1}\, \mathrm{e}^{-t} = \mathrm{e}^{(x-1)\ \ln(t)}\, \mathrm{e}^{-t}$ est continue sur $[1, +\infty[$ en tant que produit de fonctions continues sur $[1, +\infty[$.
- De plus :
  × $\forall t \in [1, +\infty[$, $t^{x-1}\, \mathrm{e}^{-t} \geqslant 0$ et $\dfrac{1}{t^2} \geqslant 0$.
  × $t^{x-1}\, \mathrm{e}^{-t} = \underset{t \to +\infty}{o}\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$.
  En effet : $\dfrac{t^{x-1}\, \mathrm{e}^{-t}}{\frac{1}{t^2}} = t^{x+1}\, \mathrm{e}^{-t} \underset{t \to +\infty}{\longrightarrow} 0$.
  × L'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}\, dt$ est une intégrale de Riemann, impropre en $+\infty$, d'exposant 2 ($2 > 1$). Elle est donc convergente.

> Par critère de négligeabilité des intégrales généralisées de fonctions continues positives, l'intégrale impropre $\displaystyle\int_1^{+\infty} t^{x-1}\, \mathrm{e}^{-t}\, dt$ est convergente.

Commentaire

Dans la question précédente, on s'intéresse à la limite de $t^{x+1}\, \mathrm{e}^{-t}$. Dans cette question, l'intégrande étudiée est la fonction $g : t \mapsto t^{x-1}\, \mathrm{e}^{-t} = \mathrm{e}^{(x-1)\ \ln(t)}\, \mathrm{e}^{-t}$.
Le lien entre les deux est clair :

$$t^{x+1} = t^{x-1}\, t^2 = \frac{t^{x+1}}{\frac{1}{t^2}}$$

C'est cette égalité qui doit faire penser à l'utiliser d'une comparaison à une intégrale de Riemann.

□

c) Déterminer les valeurs du réel x pour lesquelles l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 t^{x-1}\,\mathrm{e}^{-t}\,dt$ est convergente.

Démonstration.
Soit $x \in \mathbb{R}$.

- La fonction $g : t \mapsto t^{x-1}\,\mathrm{e}^{-t} = \mathrm{e}^{(x-1)\,\ln(t)}\,\mathrm{e}^{-t}$ est continue sur $]0,1]$ en tant que produit de fonctions continues sur $]0,1]$.
- De plus :
  × $\forall t \in\,]0,1]$, $t^{x-1} \geqslant 0$.
  × $t^{x-1}\,\mathrm{e}^{-t} \underset{t\to 0}{\sim} t^{x-1} = \dfrac{1}{t^{1-x}}$.
  En effet : $\mathrm{e}^{-t} \underset{t\to 0}{\longrightarrow} 1 \neq 0$ donc $\mathrm{e}^{-t} \underset{t\to 0}{\sim} 1$.
  × L'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{t^{1-x}}\,dt$ est une intégrale de Riemann, impropre en 0, d'exposant $1-x$.
  Elle est donc convergente si et seulement si $1-x<1$, c'est-à-dire si $x>0$.

Par critère d'équivalence des intégrales généralisées de fonctions continues positives, l'intégrale impropre $\displaystyle\int_0^1 t^{x-1}\,\mathrm{e}^{-t}\,dt$ est convergente si et seulement si $x>0$.

□

d) En déduire que la fonction Gamma d'Euler :

$$\Gamma : x \mapsto \int_0^{+\infty} t^{x-1}\,\mathrm{e}^{-t}\,dt$$

est définie sur $]0,+\infty[$.

Démonstration.
Soit $x \in \mathbb{R}$.
L'intégrale doublement impropre $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\,dt$ est convergente si et seulement si :

× l'intégrale impropre $\displaystyle\int_0^1 t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\,dt$ est convergente, ce qui est vrai si $x>0$.

× **et** l'intégrale impropre $\displaystyle\int_1^{+\infty} t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\,dt$ est convergente ce qui est vrai pour tout x.

Ainsi, la fonction Γ est définie sur $]0,+\infty[$.

□

3. a) Calculer $\Gamma(1)$.

Démonstration.

- Considérons une v.a.r. X telle que $X \hookrightarrow \mathcal{E}(1)$.
  Alors X admet pour densité :

$$f_X : \begin{array}{ccl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \left\{ \begin{array}{cl} 0 & \text{si } x<0 \\ \mathrm{e}^{-x} & \text{si } x \geqslant 0 \end{array} \right. \end{array}$$

- On en déduit : $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(t)\ dt = 1$. Or :

$$\begin{array}{rcll} \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(t)\ dt & = & \displaystyle\int_{0}^{+\infty} f_X(t)\ dt & \textit{(car } f_X \textit{ est nulle en dehors de } [0,+\infty[\textit{)} \\ & = & \displaystyle\int_{0}^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\ dt & \\ & = & \Gamma(1) & \end{array}$$

$$\boxed{\text{On en conclut : } \Gamma(1) = 1.}$$

Commentaire

- Cette rédaction est élégante : on se sert d'un résultat du chapitre *Variables aléatoires à densité* pour démontrer une résultat du chapitre *Intégration*. Penser à l'utilisation des densités usuelles est un réflexe à acquérir : cette prise de recul fait bonne impression auprès des correcteurs.
- On pouvait aussi déterminer cette valeur par calcul. Détaillons cette démonstration.
  La fonction $t \mapsto \mathrm{e}^{-t}$ est continue sur $[0,+\infty[$.
  Soit $B \in [0,+\infty[$.

  $$\int_0^B \mathrm{e}^{-t}\ dt \ = \ -\int_0^B -\mathrm{e}^{-t}\ dt \ = \ -\left[\ \mathrm{e}^{-t}\ \right]_0^B \ = \ -\left(\mathrm{e}^{-B} - \mathrm{e}^{-0}\right) \ = \ 1 - \mathrm{e}^{-B} \underset{B\to+\infty}{\longrightarrow} 1$$

  On en déduit que l'intégrale impropre $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\ dt$ est convergente.

  De plus : $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\ dt = 1$.

□

b) Établir une relation entre $\Gamma(x)$ et $\Gamma(x+1)$, pour tout réel strictement postif x.
En déduire la valeur de $\Gamma(n)$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Démonstration.
Soit $x > 0$.

- La fonction $t \mapsto t^x \mathrm{e}^{-t}$ est continue sur $[1,+\infty[$.
  Soit $B \in [1,+\infty[$. On procède par intégration par parties (IPP).

$$\left|\begin{array}{rclcrcl} u(t) & = & t^x & & u'(t) & = & x\ t^{x-1} \\ v'(t) & = & \mathrm{e}^{-t} & & v(t) & = & -\mathrm{e}^{-t} \end{array}\right.$$

  Cette IPP est valide car les fonctions u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[1,B]$. On obtient :

$$\begin{array}{rcl} \displaystyle\int_1^B t^x\,\mathrm{e}^{-t}\ dt & = & -\left[\ -t^x\ \mathrm{e}^{-t}\ \right]_1^B + x \displaystyle\int_1^B t^{x-1}\ \mathrm{e}^{-t}\ dt \\ & = & -\left(B^x\ \mathrm{e}^{-B} - \mathrm{e}^{-1}\right) + x \displaystyle\int_1^B t^{x-1}\ \mathrm{e}^{-t}\ dt \\ & = & \mathrm{e}^{-1} - \dfrac{B^x}{\mathrm{e}^B} + x \displaystyle\int_1^B t^{x-1}\ \mathrm{e}^{-t}\ dt \underset{B\to+\infty}{\longrightarrow} \mathrm{e}^{-1} + x \displaystyle\int_1^{+\infty} t^{x-1}\ \mathrm{e}^{-t}\ dt \end{array}$$

En effet :

× $\lim\limits_{B\to+\infty} \dfrac{B^x}{\mathrm{e}^B} = 0$ par croissances comparées car $x > 0$.

× $\lim\limits_{B\to+\infty} \displaystyle\int_1^B t^{x-1}\ \mathrm{e}^{-t}\ dt = \int_1^{+\infty} t^{x-1}\ \mathrm{e}^{-t}\ dt$ car l'intégrale impropre $\displaystyle\int_1^{+\infty} t^{x-1}\ \mathrm{e}^{-t}\ dt$ est convergente.

$$\boxed{\text{On en déduit : } \int_1^{+\infty} t^x\ \mathrm{e}^{-t}\ dt = \mathrm{e}^{-1} + x \int_1^{+\infty} t^{x-1}\ \mathrm{e}^{-t}\ dt.}$$

- La fonction $t \mapsto t^x \mathrm{e}^{-t}$ est continue sur $]0,1]$.
Soit $A \in\ ]0,1]$. On procède de nouveau par intégration par parties.

$$\begin{array}{rcl} \displaystyle\int_A^1 t^x\ \mathrm{e}^{-t}\ dt & = & -\left[\ -t^x\ \mathrm{e}^{-t}\ \right]_A^1 + x \displaystyle\int_A^1 t^{x-1}\ \mathrm{e}^{-t}\ dt \\ & = & -\left(\mathrm{e}^{-1} - A^x\ \mathrm{e}^{-A}\right) + x \displaystyle\int_A^1 t^{x-1}\ \mathrm{e}^{-t}\ dt \\ & = & -\mathrm{e}^{-1} + \dfrac{A^x}{\mathrm{e}^A} + x \displaystyle\int_A^1 t^{x-1}\ \mathrm{e}^{-t}\ dt \\ & \underset{A\to 0}{\longrightarrow} & -\mathrm{e}^{-1} + x \displaystyle\int_0^1 t^{x-1}\ \mathrm{e}^{-t}\ dt \end{array}$$

$$\boxed{\text{On en déduit : } \int_0^1 t^x\ \mathrm{e}^{-t}\ dt = -\mathrm{e}^{-1} + x \int_0^1 t^{x-1}\ \mathrm{e}^{-t}\ dt.}$$

- Enfin :

$$\begin{array}{rcll} \Gamma(x+1) & = & \displaystyle\int_0^{+\infty} t^x\ \mathrm{e}^{-t}\ dt & \\ & = & \displaystyle\int_0^1 t^x\ \mathrm{e}^{-t}\ dt + \int_1^{+\infty} t^x\ \mathrm{e}^{-t}\ dt & \textit{(par relation de Chasles)} \\ & = & \left(-\cancel{\mathrm{e}^{-1}} + x \displaystyle\int_0^1 t^{x-1}\ \mathrm{e}^{-t}\ dt\right) + \left(\cancel{\mathrm{e}^{-1}} + x \displaystyle\int_1^{+\infty} t^{x-1}\ \mathrm{e}^{-t}\ dt\right) & \\ & = & x\ \left(\displaystyle\int_0^1 t^{x-1}\ \mathrm{e}^{-t}\ dt + \int_1^{+\infty} t^{x-1}\ \mathrm{e}^{-t}\ dt\right) & \\ & = & x\ \Gamma(x) & \textit{(par relation de Chasles)} \end{array}$$

$$\boxed{\text{On en conclut : } \forall x > 0,\ \Gamma(x+1) = x\ \Gamma(x).}$$

Commentaire

- On réalise ici le calcul en deux temps. L'IPP étant réalisée deux fois, on ne répète pas les arguments présentés en première partie.
- On pouvait aussi travailler directement sur une intégrale sur le segment $[A, B]$. Une telle démonstration contient aussi deux étapes puisqu'il faut là aussi passer deux fois à la limite. Détaillons cette présentation (les détails de l'IPP ne sont pas rappelés).

  Par relation de Chasles, notons tout d'abord :

$$\begin{aligned} \int_A^1 t^x \, \mathrm{e}^{-t} \, dt + \int_1^B t^x \, \mathrm{e}^{-t} \, dt &= \int_A^B t^x \, \mathrm{e}^{-t} \, dt \\ &= -\left[\, t^x \, \mathrm{e}^{-t} \, \right]_A^B + x \int_A^B t^{x-1} \, \mathrm{e}^{-t} \, dt \\ &= \frac{A^x}{\mathrm{e}^A} - \frac{B^x}{\mathrm{e}^B} + x \int_A^B t^{x-1} \, \mathrm{e}^{-t} \, dt \end{aligned}$$

  Par passage à la limite lorsque A tend vers 0 on démontre alors :

$$\int_0^1 t^x \, \mathrm{e}^{-t} \, dt + \int_1^B t^x \, \mathrm{e}^{-t} \, dt = -\frac{B^x}{\mathrm{e}^B} + x \int_0^B t^{x-1} \, \mathrm{e}^{-t} \, dt$$

  puis par passage à la limite lorsque B tend vers $+\infty$ on démontre enfin :

$$\Gamma(x+1) = \int_0^1 t^x \, \mathrm{e}^{-t} \, dt + \int_1^{+\infty} t^x \, \mathrm{e}^{-t} \, dt = x \int_0^{+\infty} t^{x-1} \, \mathrm{e}^{-t} \, dt$$

- Démontrons par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{P}(n)$ où $\mathcal{P}(n) : \Gamma(n) = (n-1)!$.
  - **Initialisation** :
    - D'une part : $\Gamma(1) = 1$.
    - D'autre part : $(1-1)! = 0! = 1$.

    D'où $\mathcal{P}(1)$.
  - **Hérédité** : soit $n \in \mathbb{N}^*$.
    Supposons $\mathcal{P}(n)$ et démontrons $\mathcal{P}(n+1)$ (*i.e.* $\Gamma(n+1) = n!$).

$$\begin{aligned} \Gamma(n+1) &= n \, \Gamma(n) && \textit{(d'après la relation démontrée en première partie de question en } x = n > 0\textit{)} \\ &= n \times (n-1)! \\ &= n! \end{aligned}$$

    D'où $\mathcal{P}(n+1)$.

$$\boxed{\text{Par principe de récurrence : } \forall n \in \mathbb{N}^*, \ \mathcal{P}(n).}$$

□

c) Démontrer : $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{2} \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-\frac{u^2}{2}}\, du$.

En déduire que pour tout $p \in \mathbb{N}$: $\Gamma\left(\frac{2p+1}{2}\right) = \frac{(2p)!}{2^{2p}\, p!}\sqrt{\pi}$.

Démonstration.

- Par définition :

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^{+\infty} t^{\frac{1}{2}-1}\, e^{-t}\, dt = \int_0^{+\infty} t^{-\frac{1}{2}}\, e^{-t}\, dt = \int_0^{1} t^{-\frac{1}{2}}\, e^{-t}\, dt + \int_1^{+\infty} t^{-\frac{1}{2}}\, e^{-t}\, dt$$

- La fonction $t \mapsto t^{-\frac{1}{2}}\, e^{-t}$ est continue sur $[1, +\infty[$.

  Soit $B \in [1, +\infty[$. On effectue alors le changement de variable $\boxed{u = \sqrt{2t}}$:

$$\left|\begin{array}{l} u = \sqrt{2}\,\sqrt{t} \quad (\text{et donc } t = \frac{u^2}{2}) \\ \hookrightarrow du = \sqrt{2}\, \frac{1}{2\sqrt{t}}\, dt \quad \text{ et } \quad dt = \sqrt{2}\,\sqrt{t}\, du = u\, du \\ \bullet\ t = 1 \ \Rightarrow\ u = \sqrt{2}\,\sqrt{1} = \sqrt{2} \\ \bullet\ t = B \ \Rightarrow\ u = \sqrt{2}\,\sqrt{B} \end{array}\right.$$

  Ce changement de variable est valide car la fonction $\varphi : u \mapsto \frac{u^2}{2}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[\sqrt{2}, \sqrt{2B}]$.
  On obtient :

$$\begin{aligned} \int_1^B t^{-\frac{1}{2}}\, e^{-t}\, dt &= \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{2B}} \left(\frac{u^2}{2}\right)^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{u^2}{2}} (u\, du) \\ &= \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{2B}} u \left(\frac{2}{u^2}\right)^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{u^2}{2}}\, du \ = \ \sqrt{2} \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{2B}} \cancel{u}\, \frac{1}{\cancel{\sqrt{u^2}}}\, e^{-\frac{u^2}{2}}\, du \end{aligned}$$

  Les intégrales impropres $\displaystyle\int_1^{+\infty} t^{-\frac{1}{2}}\, e^{-t}\, dt$ et $\displaystyle\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{2B}} e^{-\frac{u^2}{2}}\, du$ sont convergentes. Les deux quantités présentes dans l'égalité admettent ainsi une limite finie lorsque B tend vers $+\infty$.

  $$\boxed{\text{Par passage à la limite, on obtient : } \int_1^{+\infty} t^{-\frac{1}{2}}\, e^{-t}\, dt = \sqrt{2} \int_{\sqrt{2}}^{+\infty} e^{-\frac{u^2}{2}}\, du.}$$

- Soit $A \in \,]0, 1]$. On procède de même sur le segment $[A, 1]$.

  $$\boxed{\text{On démontre alors : } \int_0^{1} t^{-\frac{1}{2}}\, e^{-t}\, dt = \sqrt{2} \int_0^{\sqrt{2}} e^{-\frac{u^2}{2}}\, du.}$$

- Enfin, par relation de Chasles :

$$\begin{aligned} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) &= \int_0^{1} t^{-\frac{1}{2}}\, e^{-t}\, dt + \int_1^{+\infty} t^{-\frac{1}{2}}\, e^{-t}\, dt \\ &= \sqrt{2} \int_0^{\sqrt{2}} e^{-\frac{u^2}{2}}\, du + \sqrt{2} \int_{\sqrt{2}}^{+\infty} e^{-\frac{u^2}{2}}\, du \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Ainsi : } \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{2} \int_0^{+\infty} e^{-\frac{u^2}{2}}\, du.}$$

Commentaire

- Une nouvelle fois, on a présenté le résultat à l'aide d'une démonstration en deux temps. On aurait aussi pu agir en une fois comme le stipule la remarque précédente.
- Détaillons cette méthode. On travaille directement sur une intégrale sur le segment $[A, B]$. Par relation de Chasles, notons tout d'abord :

$$\int_A^1 t^{-\frac{1}{2}} \, \mathrm{e}^{-t} \, dt + \int_1^B t^{-\frac{1}{2}} \, \mathrm{e}^{-t} \, dt \;=\; \int_A^B t^{-\frac{1}{2}} \, \mathrm{e}^{-t} \, dt \;=\; \sqrt{2} \int_{\sqrt{2A}}^{\sqrt{2B}} \mathrm{e}^{-\frac{u^2}{2}} \, du$$

(on ne détaille pas de nouveau ici le changement de variable)
Par passage à la limite lorsque A tend vers 0 on démontre alors :

$$\int_0^1 t^{-\frac{1}{2}} \, \mathrm{e}^{-t} \, dt + \int_1^B t^{-\frac{1}{2}} \, \mathrm{e}^{-t} \, dt = \sqrt{2} \int_0^{\sqrt{2B}} \mathrm{e}^{-\frac{u^2}{2}} \, du$$

puis par passage à la limite lorsque B tend vers $+\infty$ on démontre enfin :

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^1 t^{-\frac{1}{2}} \, \mathrm{e}^{-t} \, dt + \int_1^{+\infty} t^{-\frac{1}{2}} \, \mathrm{e}^{-t} \, dt = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\frac{u^2}{2}} \, du$$

- Démontrons par récurrence : $\forall p \in \mathbb{N}, \ \mathcal{P}(p)$ où $\mathcal{P}(p) : \Gamma\left(\dfrac{2p+1}{2}\right) = \dfrac{(2p)!}{2^{2p} \, p!} \sqrt{\pi}$.
  - **Initialisation** :
    - D'une part : $\Gamma\left(\dfrac{2 \times 0 + 1}{2}\right) = \Gamma\left(\dfrac{1}{2}\right) = \sqrt{2} \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\frac{u^2}{2}} \, du = \cancel{\sqrt{2}} \, \dfrac{\sqrt{\pi}}{\cancel{\sqrt{2}}} = \sqrt{\pi}$.

      L'avant dernière égalité est obtenue à l'aide de la question ***1***.
    - D'autre part : $\dfrac{(2 \times 0)!}{2^{2 \times 0} \times 0!} \sqrt{\pi} = \dfrac{0!}{2^0 \times 0!} \sqrt{\pi} = \dfrac{1}{1 \times 1} \sqrt{\pi} = \sqrt{\pi}$.

    D'où $\mathcal{P}(0)$.
  - **Hérédité** : soit $p \in \mathbb{N}$.
    Supposons $\mathcal{P}(p)$ et démontrons $\mathcal{P}(p+1)$ $\left(\textit{i.e.} \ \Gamma\left(\dfrac{2\,(p+1)+1}{2}\right) = \dfrac{(2\,(p+1))!}{2^{2\,(p+1)} \, (p+1)!} \sqrt{\pi} \right)$.

$$\begin{aligned}
\Gamma\left(\frac{2\,(p+1)+1}{2}\right) &= \Gamma\left(\frac{2p+2+1}{2}\right) = \Gamma\left(\frac{2p+1}{2} + 1\right) \\
&= \frac{2p+1}{2} \, \Gamma\left(\frac{2p+1}{2}\right) && \textit{(d'après la question } \textbf{\textit{3.b)}} \textit{ avec } x = \tfrac{2p+1}{2} > 0\textit{)} \\
&= \frac{2p+1}{2} \, \frac{(2p)!}{2^{2p} \, p!} \sqrt{\pi} && \textit{(par hypothèse de récurrence)} \\
&= \frac{(2p+1)!}{2^{2p+1} \, p!} \sqrt{\pi} \\
&= \frac{2p+2}{2\,(p+1)} \, \frac{(2p+1)!}{2^{2p+1} \, p!} \sqrt{\pi} = \frac{(2p+2)!}{2^{2p+2} \, (p+1)!} \sqrt{\pi}
\end{aligned}$$

    D'où $\mathcal{P}(p+1)$.

$$\boxed{\text{Par principe de récurrence : } \forall p \in \mathbb{N}, \ \mathcal{P}(p).}$$

□