DS5 (version A)

Exercice 1

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$ de $\mathbb{R}^3$ est :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -1 & 4 & -3 \\ -2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

On note Id l'endomorphisme identité de $\mathbb{R}^3$.

1. a) Démontrer : $(A - I_3)^2 \, (A - 3\, I_3) = 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})}$.

b) En déduire les valeurs propres possibles de f.

c) Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres de f.
On précisera la dimension des sous-espaces propres.
En particulier, on écrira : $\mathrm{Ker}(f - 3\,\mathrm{Id}) = \mathrm{Vect}\,(w)$ où w est un vecteur de $\mathbb{R}^3$ de première coordonnée 1.

d) L'endomorphisme f est-il bijectif ?
L'endomorphisme f est-il diagonalisable ?

2. Pour tout endomorphisme $g \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^3)$, on rappelle que l'on note g^2 l'endomorphisme défini par :

$$g^2 = g \circ g$$

a) Démontrer : $\mathrm{Ker}\,\big(f - \mathrm{Id}\big) \subset \mathrm{Ker}\,\big((f - \mathrm{Id})^2\big)$.

b) Démontrer : $\mathrm{Ker}\,\big((f - \mathrm{Id})^2\big) = \mathrm{Vect}\,(u, v)$ où $u = (0, 1, 1)$ et $v = (1, 0, 1)$.

3. a) Démontrer que la famille (u, v, w) est une base de $\mathbb{R}^3$.
Dans la suite, on notera $\mathscr{B}'$ cette base.

b) On note $T = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(f)$. Déterminer T.

c) On note P la matrice de passage de la base $\mathscr{B}$ à la base $\mathscr{B}'$.
Déterminer l'inverse de P.

d) Rappeler la formule liant les matrices A, T et P.

4. a) On note : $J = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ et $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Exprimer T en fonction de J et N.

b) À l'aide de la formule du binôme, démontrer : $\forall n \in \mathbb{N}, \; T^n = J^n - 4n\, N$.

c) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, déterminer A^n.

5. a) Démontrer que A est inversible et déterminer son inverse.

b) La formule démontrée en ***4.c)*** est-elle valable pour $n = -1$?

Exercice 2

Les deux parties sont indépendantes

Partie I

Une gare dispose de deux guichets. Trois clients notés C_1, C_2, C_3 arrivent en même temps. Les clients C_1 et C_2 se font servir tandis que le client C_3 attend puis effectue son opération dès que l'un des deux guichets se libère.
On définit X_1, X_2, X_3 les variables aléatoires égales à la durée d'opération des clients C_1, C_2, C_3 respectivement. Ces durées sont mesurées en minutes et arrondies à l'unité supérieure ou égale. On suppose que les variables X_1, X_2, X_3 suivent la loi géométrique de paramètre p, $p \in]0,1[$ et qu'elles sont indépendantes. On note $q = 1 - p$.
On note A l'événement : « C_3 termine en dernier son opération ».
Ainsi l'événement A est égal à l'événement : $[\min(X_1, X_2) + X_3 > \max(X_1, X_2)]$.
On se propose de calculer la probabilité de A.

1. Rappeler la loi de X_1 ainsi que son espérance $\mathbb{E}(X_1)$ et sa variance $\mathbb{V}(X_1)$.
On définit la variable aléatoire $\Delta = |X_1 - X_2|$.

2. Calculer la probabilité $\mathbb{P}([\Delta = 0])$.

3. Soit n un entier naturel non nul.

a) Justifier : $\mathbb{P}([X_1 - X_2 = n]) = \sum\limits_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}([X_2 = k])\, \mathbb{P}([X_1 = n + k])$.

b) En déduire : $\mathbb{P}([\Delta = n]) = \dfrac{2pq^n}{1+q}$.

4. *a)* Montrer que Δ admet une espérance $\mathbb{E}(\Delta)$ et la calculer.

b) Montrer : $\mathbb{E}((X_1 - X_2)^2) = 2\,\mathbb{V}(X_1)$. En déduire que Δ admet une variance $\mathbb{V}(\Delta)$ et la calculer.

5. Montrer que l'événement A est égal à l'événement $[X_3 > \Delta]$.

6. *a)* En déduire : $\mathbb{P}(A) = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}([\Delta = k])\, \mathbb{P}([X_3 > k])$.

b) Exprimer $\mathbb{P}(A)$ à l'aide de p et q.

Partie II

Dans cette partie, X est une variable aléatoire suivant la loi géométrique de paramètre p, $p \in]0,1[$ et Y est une variable aléatoire suivant la loi exponentielle de paramètre λ, $\lambda \in]0,+\infty[$. On note $q = 1-p$.
On suppose que X et Y sont indépendantes, c'est à dire :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \forall t \in [0,+\infty[, \quad \mathbb{P}([X = k] \cap [Y \leqslant t]) = \mathbb{P}([X = k])\, \mathbb{P}([Y \leqslant t])$$

7. Rappeler une densité de Y ainsi que son espérance et sa variance.

8. On définit la variable aléatoire $Z = \dfrac{Y}{X}$.

a) Montrer : $\forall t \in [0,+\infty[$, $\mathbb{P}([Z \geqslant t]) = \sum\limits_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}([X = k])\, \mathbb{P}([Y \geqslant kt])$.

b) En déduire : $\forall t \in [0,+\infty[$, $\mathbb{P}([Z \geqslant t]) = \dfrac{p\, \mathrm{e}^{-\lambda t}}{1 - q\, \mathrm{e}^{-\lambda t}}$.

c) Montrer que la variable aléatoire Z admet une densité et déterminer une densité de Z.

Exercice 3

On considère l'application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, définie par :

$$f : t \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } t \leqslant 0 \\ \dfrac{1}{(1+t)^2} & \text{si } t > 0 \end{cases}$$

1. Tracer l'allure de la courbe représentative de f.

2. Montrer que f est une densité de probabilité.

3. Montrer que, pour tout réel x, l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{x} f(t)\ dt$ converge, et calculer cette intégrale.
On distinguera les cas $x \leqslant 0$ et $x > 0$.

4. Déterminer un réel positif α tel que $\displaystyle\int_{0}^{\alpha} f(t)\ dt = \frac{1}{2}$.

5. Soit $x \in [0, +\infty[$ fixé.
On considère la fonction φ_x définie sur $[0, +\infty[$ par : $\forall u \in [0, +\infty[$, $\varphi_x(u) = \displaystyle\int_{x-u}^{x+u} f(t)\ dt$.

a) Calculer $\varphi_x(0)$ et $\displaystyle\lim_{u \to +\infty} \varphi_x(u)$.

b) Montrer, pour tout $(u, v) \in [0, +\infty[^2$:

$$u < v \quad \Rightarrow \quad \varphi_x(v) - \varphi_x(u) \geqslant \int_{x+u}^{x+v} f(t)\ dt$$

En déduire que φ_x est strictement croissante sur $[0, +\infty[$.

c) On admet que φ_x est continue sur $[0, +\infty[$. Montrer que l'équation $\varphi_x(u) = \dfrac{1}{2}$, d'inconnue u, admet une solution et une seule dans $[0, +\infty[$.

On note $U : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ l'application qui, à tout réel $x \in [0, +\infty[$, associe $U(x)$ l'unique solution de l'équation $\varphi_x(u) = \dfrac{1}{2}$.
Ainsi, pour tout $x \in [0, +\infty[$, on a : $\displaystyle\int_{x-U(x)}^{x+U(x)} f(t)\ dt = \frac{1}{2}$.

6. *a)* Vérifier, pour tout $x \in \left[0, \frac{1}{2}\right[$: $U(x) = 1 - x$.

b) Pour tout $x \in \left[\frac{1}{2}, +\infty\right[$, montrer : $\varphi_x(x) \geqslant \dfrac{1}{2}$; puis : $x - U(x) \geqslant 0$. Et en déduire :

$$U(x) = \sqrt{4 + (x+1)^2} - 2$$

7. *a)* Montrer que l'application U est continue sur $[0, +\infty[$.

b) Etudier la dérivabilité de U sur $[0, +\infty[$.

c) Montrer que la droite d'équation $y = x - 1$ est asymptote à la courbe représentative de U.

d) Tracer l'allure de la courbe représentative de U.

8. On considère la suite réelle $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $\left\{\begin{array}{c} a_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, a_{n+1} = U(a_n) \end{array}\right.$

a) Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n \geqslant \dfrac{1}{2}$.

b) Montrer que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

c) En déduire que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et montrer que sa limite est égale à $\dfrac{1}{2}$.

d) Écrire un programme en **Scilab** qui calcule et affiche le plus petit entier $n \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\left|a_n - \frac{1}{2}\right| \leqslant 10^{-6}$$