DS5 (version A)

Exercice 1 : `vaguement inspiré de EDHEC S 2012`

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$ de $\mathbb{R}^3$ est :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -1 & 4 & -3 \\ -2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

On note Id l'endomorphisme identité de $\mathbb{R}^3$.

1. ***a)*** Démontrer : $(A - I_3)^2 \, (A - 3\, I_3) = 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})}$.

- **1 pt :** $(A - I_3)^2 = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
- **1 pt :** $(A - I_3)^2 \, (A - 3\, I_3) = 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})}$

b) En déduire les valeurs propres possibles de f.

- **1 pt :** $P(X) = (X-1)^2 \, (X-3)$ **est un polynôme annulateur de la matrice** A
- **1 pt :** $\mathrm{Sp}(A) \subset$ **{racines de** P**}** $= \{1, 3\}$ **(ou racines propres possibles)**
- **1 pt :** $\mathrm{Sp}(f) = \mathrm{Sp}(A)$

c) Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres de f.
On précisera la dimension des sous-espaces propres.
En particulier, on écrira : $\mathrm{Ker}(f - 3\,\mathrm{Id}) = \mathrm{Vect}\,(w)$ où w est un vecteur de $\mathbb{R}^3$ de première coordonnée 1.

- **1 pt :** 1 **est valeur propre**
- **3 pts : détermination de** $E_1(f) = \mathrm{Vect}\,((0,1,1))$ **(1 pt pour écriture du système, 1 pt pour résolution, 1 pt pour manipulation correcte des objets). Le dernier point n'est (notamment) pas accordé en cas de confusion entre** $E_1(f)$ **et** $E_1(A)$**.**
- **2 pts :** $\mathcal{F}_1 = \big((0,1,1)\big)$ **est une base de** $E_1(f)$ **(**1 **point pour libre,** 1 **point pour génératrice). Pas de point pour** $\dim(E_1(f)) = 1$**.**
- **1 pt :** 3 **est valeur propre**
- **2 pts : détermination de** $E_3(f) = \mathrm{Vect}\,((1,1,0))$ **(1 pt pour écriture du système, 1 pt pour résolution). On ne sanctionne pas les confusions.**
- **1 pt :** $\mathcal{F}_2 = \big((1,1,0)\big)$ **est une base de** $E_3(f)$ **(« comme précédemment » permet d'obtenir le point si la démo de** $\mathcal{F}_1$ **est une base est juste)**

d) L'endomorphisme f est-il bijectif ?
L'endomorphisme f est-il diagonalisable ?

- **1 pt :** 0 **n'est pas valeur propre donc** f **est injectif**
- **1 pt : mention de la dimension finie pour injectif ⇔ bijectif**
- **1 pt : non diagonalisable car** $\dim\big(E_1(f)\big) + \dim\big(E_3(f)\big) = 2 \neq 3 = \dim(\mathbb{R}^3)$

2. Pour tout endomorphisme $g \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^3)$, on rappelle que l'on note g^2 l'endomorphisme défini par :

$$g^2 = g \circ g$$

a) Démontrer : $\mathrm{Ker}\big(f - \mathrm{Id}\big) \subset \mathrm{Ker}\big((f - \mathrm{Id})^2\big)$.

- 2 pts : on enlève 1 pt en cas de confusion ou de mauvaise introduction d'objets.

b) Démontrer : $\mathrm{Ker}\big((f - \mathrm{Id})^2\big) = \mathrm{Vect}\,(u, v)$ où $u = (0, 1, 1)$ et $v = (1, 0, 1)$.

- 3 pts : détermination de $\mathrm{Ker}\big((f - \mathrm{Id})^2\big) = \mathrm{Vect}\,((-1, 1, 0), (1, 0, 1))$ **(1 pt pour écriture du système, 1 pt pour résolution, 1 pt pour manipulation correcte des objets). Le dernier point n'est (notamment) pas accordé en cas de confusion entre $\mathbb{R}^3$ et $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.**

- 1 pt : $\mathrm{Vect}\,((-1, 1, 0), (1, 0, 1)) = \mathrm{Vect}\,((0, 1, 1), (1, 0, 1))$

3. a) Démontrer que la famille (u, v, w) est une base de $\mathbb{R}^3$.
Dans la suite, on notera $\mathscr{B}'$ cette base.

- 2 pts : caractère libre. Dont 1 pt pour la qualité de la rédaction.

- 1 pt : conclusion (libre et de cardinal $3 = \dim(\mathbb{R}^3)$)

b) On note $T = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(f)$. Déterminer T.

- 1 pt : $f(u) = 1 \cdot u$ **car** $u \in E_1(f)$**.**

- 2 pts : $f(v) = -4 \cdot u + 1 \cdot v + 0 \cdot w$

- 1 pt : $f(w) = 3 \cdot w$ **car** $w \in E_3(f)$**.**

- 1 pt : $T = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(f) = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

En cas d'erreur de calcul pour $f(v)$ on attribue 1 pt/2 si la méthodo est bonne et on attribue aussi le point pour T.

c) On note P la matrice de passage de la base $\mathscr{B}$ à la base $\mathscr{B}'$.
Déterminer l'inverse de P.

- 1 pt : $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

- 2 pts : $P^{-1} = \dfrac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ **(1 point calcul / 1 point rédaction)**

d) Rappeler la formule liant les matrices A, T et P.

- 1 pt : $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}\big(f\big) \;=\; P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'} \times \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}\big(f\big) \times P_{\mathscr{B}',\mathscr{B}}$ **ou encore** $A = P\ T\ P^{-1}$

4. a) On note : $J = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ et $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Exprimer T en fonction de J et N.

- 1 pt : $T = J - 4\,N$

b) À l'aide de la formule du binôme, démontrer : $\forall n \in \mathbb{N},\ T^n = J^n - 4n\, N$.

- **1 pt :** $\forall k \geqslant 2,\ N^k = 0_{\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})}$
- **1 pt :** $JN = N = NJ$
- **1 pt :** $T^n = \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\ J^{n-k}\ (-4N)^k$
- **1 pt :** $\sum\limits_{k=0}^{n}\ \ldots = \sum\limits_{k=0}^{1}\ \ldots + \sum\limits_{k=2}^{n}\ \ldots$ **car** $n \geqslant 1$
- **1 pt :** $\sum\limits_{k=2}^{n}\ \ldots = 0_{\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})}$ **car :** $\forall k \geqslant 2,\ N^k = 0$
- **1 pt :** $J^{n-1} N = N$
- **1 pt : propriété vraie au rang** 0

c) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, déterminer A^n.

- **1 pt :** $\forall n \in \mathbb{N},\ A^n \ = \ PT^nP^{-1}$
- **1 pt :** $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -4n & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3^n \\ 1 & -4n & 3^n \\ 1 & 1-4n & 0 \end{pmatrix}$
- **1 pt :** $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 3^n \\ 1 & -4n & 3^n \\ 1 & 1-4n & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3^n+1 & 3^n-1 & -3^n+1 \\ 3^n-1-4n & 3^n+1+4n & -3^n-4n+1 \\ -4n & 4n & 2-4n \end{pmatrix}$

5. *a)* Démontrer que A est inversible et déterminer son inverse.

- **1 pt :** $(A - I_3)^2\,(A - 3\,I_3) \ = \ A^3 - 5\,A^2 + 7\,A - 3\,I_3$
- **1 pt :** $A\left(\dfrac{1}{3}\ \left(A^2 - 5\,A + 7\,I_2\right)\right) \ = \ I_3$
- **1 pt :** A **est inversible d'inverse** $A^{-1} = \dfrac{1}{3}\ \left(A^2 - 5\,A + 7\,I_2\right)$

b) La formule démontrée en *4.c)* est-elle valable pour $n = -1$?

- **1 pt :** $A^2 - 5\,A + 7\,I_2 \ = \ \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 5 & -4 & 7 \\ 6 & -6 & 9 \end{pmatrix}$
- **1 pt :** $\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 3^{-1}+1 & 3^{-1}-1 & -3^{-1}+1 \\ 3^{-1}-1+4 & 3^{-1}+1-4 & -3^{-1}+4+1 \\ 4 & -4 & 2+4 \end{pmatrix} \ = \ \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 5 & -4 & 7 \\ 6 & -6 & 9 \end{pmatrix}$

Exercice 2

Partie I

On définit X_1, X_2, X_3 les variables aléatoires égales à la durée d'opération des clients C_1, C_2, C_3 respectivement. Ces durées sont mesurées en minutes et arrondies à l'unité supérieure ou égale. On suppose que les variables X_1, X_2, X_3 suivent la loi géométrique de paramètre p, $p \in \,]0,1[$ et qu'elles sont indépendantes. On note $q = 1-p$.
On note A l'événement : « C_3 termine en dernier son opération ».
Ainsi l'événement A est égal à l'événement : $[\min(X_1,X_2) + X_3 > \max(X_1,X_2)]$.
On se propose de calculer la probabilité de A.

1. Rappeler la loi de X_1 ainsi que son espérance $\mathbb{E}(X_1)$ et sa variance $\mathbb{V}(X_1)$.
On définit la variable aléatoire $\Delta = |X_1 - X_2|$.

- **1 pt :** $X_1(\Omega) = \mathbb{N}^*$ **et** $\forall k \in \mathbb{N}^*$**,** $\mathbb{P}([X_1 = k]) = p\ q^{k-1}$
- **1 pt :** $\mathbb{E}(X_1) = \dfrac{1}{p}$
- **1 pt :** $\mathbb{V}(X_1) = \dfrac{q}{p^2}$

2. Calculer la probabilité $\mathbb{P}([\Delta = 0])$.

- **1 pt :** $[\Delta = 0] \ = \ [|X_1 - X_2| = 0] \ = \ [X_1 - X_2 = 0]$
- **1 pt :** $\mathbb{P}([X_1 - X_2 = 0]) \ = \ \sum\limits_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}([X_2 = k] \cap [X_1 = k])$
- **1 pt : indépendance**
- **2 pts :** $= p^2 \sum\limits_{k=1}^{+\infty} (q^2)^{k-1} = p^2 \ \dfrac{1}{1-q^2}$ **dont 1 point pour préciser** $q^2 \in \,]-1,1[$
- **1 pt :** $= \dfrac{p}{1+q}$ **(fin du calcul)**

3. Soit n un entier naturel non nul.

a) Justifier : $\mathbb{P}([X_1 - X_2 = n]) = \sum\limits_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}([X_2 = k])\,\mathbb{P}([X_1 = n+k])$.

- **1 pt :** $\mathbb{P}([X_1 - X_2 = n]) \ = \ \sum\limits_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}([X_2 = k] \ \cap \ [X_1 = k+n])$
- **1 pt : indépendance**

b) En déduire : $\mathbb{P}([\Delta = n]) = \dfrac{2pq^n}{1+q}$.

- **1 pt :** $[\Delta = n] \ = \ [\ |X_1 - X_2| = n] \ = \ [X_1 - X_2 = n] \ \cup \ [X_1 - X_2 = -n]$
- **1 pt :** $\mathbb{P}([X_1 - X_2 = n]) \ = \ p^2 \ q^n \sum\limits_{k=0}^{+\infty} \left(q^2\right)^k$
- **1 pt :** $= p^2 \ q^n \ \dfrac{1}{1-q^2}$ **dont** $q^2 \in \,]-1,1[$ **précisé**
- **1 pt :** $\mathbb{P}([X_2 - X_1 = n]) = \dfrac{p\,q^n}{1+q}$ **par symétrie**
- **1 pt : fin du calcul** $\mathbb{P}([\ \Delta = n]) \ = \ 2 \ \dfrac{p\,q^n}{1+q}$
- **1 pt : cadeau si le reste est bien fait (permet de retirer 1 pt de calcul en cas d'erreurs)**

4. *a)* Montrer que Δ admet une espérance $\mathbb{E}(\Delta)$ et la calculer.

- **1 pt : les v.a.r. X_1 et X_2 étant à valeurs entières, $\Delta(\Omega) \subset \mathbb{N}$**
- **1 pt : la v.a.r. Δ admet une espérance si et seulement si la série $\sum n \, \mathbb{P}\big([\Delta = n]\big)$ est absolument convergente. Cette série étant à termes positifs, cela revient à démontrer qu'elle est convergente.**
- **1 pt : $\sum\limits_{k=0}^{N} k\,\mathbb{P}\big([\Delta = k] = \sum\limits_{k=1}^{N} k\,\mathbb{P}\big([\Delta = k]\big)$ (attention au cas $k = 0$)**
- **1 pt : $\sum\limits_{k=0}^{N} k\,\mathbb{P}\big([\Delta = k]\big) = 2\,\dfrac{p\,q}{1+q} \sum\limits_{k=1}^{N} k\,q^{k-1} \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} 2\,\dfrac{\cancel{p}\,q}{1+q}\,\dfrac{1}{(1-q)^{\cancel{2}}}$**

b) Montrer : $\mathbb{E}((X_1 - X_2)^2) = 2\,\mathbb{V}(X_1)$. En déduire que Δ admet une variance $\mathbb{V}(\Delta)$ et la calculer.

- **1 pt : $(X_1 - X_2)^2 \;=\; {X_1}^2 - 2\,X_1X_2 + {X_2}^2$**
- **1 pt : la v.a.r. $(X_1 - X_2)^2$ admet une espérance car elle est la combinaison linéaire de v.a.r. qui en admettent une**
- **1 pt : linéarité de l'espérance**
- **1 pt : les v.a.r. X_1 et X_2 ont même loi donc $\mathbb{E}(X_1) = \mathbb{E}(X_2)$ et $\mathbb{E}(X_1^2) = \mathbb{E}(X_2^2)$**
- **1 pt : $\mathbb{V}(\Delta) = \mathbb{E}\big(\Delta^2\big) - \big(\mathbb{E}(\Delta)\big)^2$ (KH)**
- **1 pt : $\mathbb{V}(\Delta) \;=\; 2\,\dfrac{q\,(1+q^2)}{p^2\,(1+q)^2}$**

5. Montrer que l'événement A est égal à l'événement $[X_3 > \Delta]$.

- **1 pt : $A \;=\; [X_3 > \max(X_1, X_2) - \min(X_1, X_2)]$**
- **2 pts : $\Delta = \max(X_1, X_2) - \min(X_1, X_2)$ (on peut lâcher un point pour une explication avec les mains, pour les 2 points il faut une démonstration rigoureuse avec les ω)**

6. *a)* En déduire : $\mathbb{P}(A) = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}([\Delta = k])\,\mathbb{P}([X_3 > k])$.

- **1 pt : FPT (rien de neuf ...)**
- **1 pt : X_3 et Δ indépendantes d'après le lemme des coalitions : comme X_1, X_2 et X_3 sont indépendantes, les v.a.r. $|X_2 - X_1|$ et X_3 sont indépendantes.**

b) Exprimer $\mathbb{P}(A)$ à l'aide de p et q.

- **1 pt : $\mathbb{P}([\Delta = 0]) \;\times\; \mathbb{P}([X_3 > 0]) \;=\; \dfrac{p}{1+q}$**
- **1 pt : pour tout $k \in \mathbb{N}$: $\mathbb{P}([X_3 > k]) \;=\; q^k$**
- **1 pt : calcul jusqu'à $\mathbb{P}([X_3 > \Delta]) = \dfrac{p}{1+q} + 2\,\dfrac{p}{1+q}\,\left(\sum\limits_{k=0}^{+\infty} (q^2)^k - 1\right)$**
- **1 pt : $= \dfrac{p}{1+q} + 2\,\dfrac{p}{1+q}\,\left(\dfrac{1}{1-q^2} - 1\right)$ (en reconnaissant la somme d'une série géométrique de raison $q^2 \in \,]-1,1[$)**
- **1 pt : $= \dfrac{1+q^2}{(1+q)^2}$ (fin du calcul)**

Partie II

Dans cette partie, X est une variable aléatoire suivant la loi géométrique de paramètre p, $p \in \,]0,1[$ et Y est une variable aléatoire suivant la loi exponentielle de paramètre λ, $\lambda \in \,]0,+\infty[$. On note $q = 1-p$. On suppose que X et Y sont indépendantes, c'est à dire :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \forall t \in [0,+\infty[, \quad \mathbb{P}([X=k] \cap [Y \leqslant t]) = \mathbb{P}([X=k])\,\mathbb{P}([Y \leqslant t])$$

7. Rappeler une densité de Y ainsi que son espérance et sa variance.

- 1 pt : $f_Y : x \mapsto \begin{cases} 0 & \textbf{si } x < 0 \\ \lambda\,\mathrm{e}^{-\lambda x} & \textbf{si } x \geqslant 0 \end{cases}$

- 1 pt : $\mathbb{E}(Y) = \dfrac{1}{\lambda}$

- 1 pt : $\mathbb{V}(Y) = \dfrac{1}{\lambda^2}$

8. On définit la variable aléatoire $Z = \dfrac{Y}{X}$.

a) Montrer : $\forall t \in [0,+\infty[$, $\mathbb{P}([Z \geqslant t]) = \sum\limits_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}([X=k])\,\mathbb{P}([Y \geqslant kt])$.

- 1 pt : $\mathbb{P}([Z \geqslant t]) = \sum\limits_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}([X=k] \cap [Z \geqslant t])$ **dont sce cité**

- 1 pt : $\mathbb{P}([Z \geqslant t]) = \sum\limits_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}([X=k] \cap [Y \geqslant kt])$ **(car** $k > 0$**)**

- 1 pt : indépendance

b) En déduire : $\forall t \in [0,+\infty[$, $\mathbb{P}([Z \geqslant t]) = \dfrac{p\,\mathrm{e}^{-\lambda t}}{1-q\,\mathrm{e}^{-\lambda t}}$.

- 1 pt : $\mathbb{P}([Y \geqslant kt]) = \big(1-\mathbb{P}([Y < kt])\big) = \big(1-F_Y(kt)\big)$ **(car Y est à densité)**

- 1 pt : $\mathbb{P}([Z \geqslant t]) = p\,\mathbf{e}^{-\lambda t} \sum\limits_{k=0}^{+\infty} q^k\ \mathbf{e}^{-\lambda kt}$

- 1 pt : $= p\,\mathbf{e}^{-\lambda t}\ \dfrac{1}{1-q\ \mathbf{e}^{-\lambda t}}$

- 1 pt : $q\,\mathbf{e}^{-\lambda t} \in \,]-1,1[$

c) Montrer que la variable aléatoire Z admet une densité et déterminer une densité de Z.

- 1 pt : $Z(\Omega) \subset [0,+\infty[$

- 1 pt : Si $x \in \,]-\infty,0[$**, alors** $F_Z(x) = 0$

- 1 pt : Si $x \in [0,+\infty[$**, alors** $F_Z(x) = \mathbb{P}([Z \leqslant x]) = 1-\mathbb{P}([Z > x]) = 1-\big(\mathbb{P}([Z \geqslant x]) - \mathbb{P}([Z=x])\big) = 1-\dfrac{p\,\mathbf{e}^{-\lambda x}}{1-q\,\mathbf{e}^{-\lambda x}} + \mathbb{P}([Z=x])$

- 1 pt : $\mathbb{P}([Z=x]) = 0$

Exercice 3 (EML 2005 Exo 2)

On considère l'application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, définie par : $f : t \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } t \leqslant 0 \\ \dfrac{1}{(1+t)^2} & \text{si } t > 0 \end{cases}$

1. Tracer l'allure de la courbe représentative de f.

- 1 pt : tangente en 0

- 1 pt : tangente en 1

- 2 pts : allure générale de la courbe

2. Montrer que f est une densité de probabilité.

- 1 pt : f **est continue sur** $]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$

- 1 pt : $f \geqslant 0$

- 1 pt : $\displaystyle\int_{-\infty}^{x} f(t)\ dt \ = \ \int_{0}^{x} f(t)\ dt$

- 1 pt : $\displaystyle\int_{0}^{A} f(t)\ dt \ = \ 1 - \frac{1}{1+A} \underset{A\to+\infty}{\longrightarrow} 1$

3. Montrer que, pour tout réel x, l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{x} f(t)\ dt$ converge, et calculer cette intégrale.
On distinguera les cas $x \leqslant 0$ et $x > 0$.

- 1 pt : si $x \leqslant 0$, $\displaystyle\int_{-\infty}^{x} f(t)\ dt = 0$ **car** f **nulle en dehors de** $]0, +\infty[$

- 1 pt : si $x > 0$, $\displaystyle\int_{-\infty}^{x} f(t)\ dt \ = \ \int_{0}^{x} f(t)\ dt$ **car** f **est nulle en dehors de** $]0, +\infty[$

- 1 pt : la fonction f **est continue par morceaux sur le segment** $[0, x]$**, donc l'intégrale** $\displaystyle\int_{0}^{x} f(t)\ dt$ **est bien définie.**

Le calcul a déjà été fait en question 2 et ne rapporte pas de point. Si la mention de continuité par morceaux apparaît en question *2.* on attribuera ce point même si l'argument n'est pas présent en *3.*

4. Déterminer un réel positif α tel que $\displaystyle\int_{0}^{\alpha} f(t)\ dt = \frac{1}{2}$.

- 2 pts : calcul

5. Soit $x \in [0, +\infty[$ fixé.
On considère la fonction φ_x définie sur $[0, +\infty[$ par : $\forall u \in [0, +\infty[$, $\varphi_x(u) = \displaystyle\int_{x-u}^{x+u} f(t)\ dt$.

a) Calculer $\varphi_x(0)$ et $\displaystyle\lim_{u\to+\infty} \varphi_x(u)$.

- 1 pt : $\varphi_x(0) \ = \ \displaystyle\int_{x}^{x} f(t)\ dt \ = \ 0$

- 1 pt : $\forall u \in [0, +\infty[,\ \varphi_x(u) = \displaystyle\int_{x-u}^{x} f(t)\ dt + \int_{x}^{x+u} f(t)\ dt$

- 1 pt : les limites $\displaystyle\lim_{u\to+\infty} \int_{x-u}^{x} f(t)\ dt$ **et** $\displaystyle\lim_{u\to+\infty} \int_{x}^{x+u} f(t)\ dt$ **existent**

- 1 pt : passage à la limite et $\displaystyle\lim_{u\to+\infty} \varphi_x(u) = 1$

b) Montrer, pour tout $(u,v) \in [0,+\infty[^2$:

$$u < v \quad \Rightarrow \quad \varphi_x(v) - \varphi_x(u) \geqslant \int_{x+u}^{x+v} f(t)\ dt$$

En déduire que φ_x est strictement croissante sur $[0,+\infty[$.

- **1 pt :** $\varphi_x(v) - \varphi_x(u) = \displaystyle\int_{x+u}^{x+v} f(t)\ dt + \int_{x-v}^{x-u} f(t)\ dt$ **par relation de Chasles**
- **2 pts :** $\displaystyle\int_{x-v}^{x-u} f(t)\ dt \geqslant 0$ **par croissance de l'intégrale (1 point), les bornes étant dans l'ordre croissant (1 point)**
- **2 pts :** $\displaystyle\int_{x+u}^{x+v} f(t)\ dt = \frac{1}{1+x+u} - \frac{1}{1+x+v}$ **(dont 1 pt pour utilisation de la question *3.* car** $(x+u, x+v) \in [0,+\infty[^2$**)**
- **1 pt :** $\dfrac{1}{1+x+u} - \dfrac{1}{1+x+v} > 0$ **car** $u < v$

c) On admet que φ_x est continue sur $[0,+\infty[$. Montrer que l'équation $\varphi_x(u) = \dfrac{1}{2}$, d'inconnue u, admet une solution et une seule dans $[0,+\infty[$.

- **0 pt : continuité (mais on retire 1 point si oublié)**
- **1 pt : stricte croissance**
- **1 pt :** $\varphi_x([0,+\infty[) = \left[\varphi_x(0), \displaystyle\lim_{u\to+\infty} \varphi_x(u)\right[= [0,1[$
- **1 pt :** $\dfrac{1}{2} \in [0,1[$

On note $U : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ l'application qui, à tout réel $x \in [0,+\infty[$, associe $U(x)$ l'unique solution de l'équation $\varphi_x(u) = \dfrac{1}{2}$.

Ainsi, pour tout $x \in [0,+\infty[$, on a : $\displaystyle\int_{x-U(x)}^{x+U(x)} f(t)\ dt = \frac{1}{2}$.

6. *a)* Vérifier, pour tout $x \in \left[0, \frac{1}{2}\right[$: $U(x) = 1 - x$.

- **2 pts :** $\displaystyle\int_{x-(1-x)}^{x+(1-x)} f(t)\ dt = \int_{2x-1}^{1} f(t)\ dt = \int_{0}^{1} f(t)\ dt = \frac{1}{2}$ **car** $2x - 1 < 0$
- **1 pt :** $1 - x$ **est solution de l'équation** $\varphi_x(u) = \dfrac{1}{2}$ **et conclusion**

b) Pour tout $x \in \left[\frac{1}{2}, +\infty\right[$, montrer : $\varphi_x(x) \geqslant \dfrac{1}{2}$; puis : $x - U(x) \geqslant 0$. Et en déduire :

$$U(x) = \sqrt{4 + (x+1)^2} - 2$$

- **1 pt :** $\varphi_x(x) = \displaystyle\int_{x-x}^{x+x} f(t)\ dt = \int_0^{2x} f(t)\ dt = 1 - \frac{1}{1+2x}$
- **1 pt :** $\varphi_x(x) \geqslant \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow \dfrac{1}{2} \leqslant x$
- **1 pt :** $\varphi_x(x) \geqslant \dfrac{1}{2} = \varphi_x\big(U(x)\big)$
- **1 pt : la fonction** $\varphi_x^{-1} : [0,1[\to [0,+\infty[$ **est strictement croissante sur** $[0,1[$ **et résultat** $x - U(x) \geqslant 0$

- **1 pt : calcul** $\displaystyle\int_{x-U(x)}^{x+U(x)} f(t)\ dt = \frac{1}{1+x-U(x)} - \frac{1}{1+x+U(x)}$
- **1 pt :** $\dfrac{1}{1+x-U(x)} - \dfrac{1}{1+x+U(x)} = \dfrac{1}{2} \ \Leftrightarrow\ \big(U(x)\big)^2 + 4\,U(x) - (1+x)^2 = 0$
- **2 pts : calcul des racines de** $P(z) = z^2 + 4\,z - (1+x)^2$
- **1 pt :** $z_+ \geqslant 0 \ \Leftrightarrow\ (1+x)^2 \geqslant 0$

7. a) Montrer que l'application U est continue sur $[0,+\infty[$.

- **1 pt : continuité sur** $[0, \frac{1}{2}[$
- **1 pt : continuité sur** $]\frac{1}{2}, +\infty[$ **(composée)**
- **2 pts : continuité en** 0

b) Étudier la dérivabilité de U sur $[0,+\infty[$.

- **1 pt : la fonction** U **est dérivable sur** $\left[0, \frac{1}{2}\right[$ **et sur** $\left]\frac{1}{2}, +\infty\right[$**.**
- **1 pt : si** $x \in [0, \frac{1}{2}[$ **alors** $\dfrac{U(x) - U\left(\frac{1}{2}\right)}{x - \frac{1}{2}} \ = \ -1$
- **2 pts : si** $x \in]\frac{1}{2}, +\infty[$ **alors** $\dfrac{U(x) - U\left(\frac{1}{2}\right)}{x - \frac{1}{2}} \ = \ \dfrac{2x+5}{2\sqrt{4+(x+1)^2}+5}$ **(1 pt quantité conjuguée, 1 pt si calcul mené au bout)**
- **1 pt :** $\displaystyle\lim_{x \to \frac{1}{2}^-} \frac{U(x) - U\left(\frac{1}{2}\right)}{x - \frac{1}{2}} \neq \lim_{x \to \frac{1}{2}^+} \frac{U(x) - U\left(\frac{1}{2}\right)}{x - \frac{1}{2}}$

c) Montrer que la droite d'équation $y = x - 1$ est asymptote à la courbe représentative de U.

- **1 pt : toute tentative raisonnable**
- **1 pt :** $U(x) - (x-1) \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} 0$ **(quantité conjuguée une nouvelle fois)**

d) Tracer l'allure de la courbe représentative de U.

- **1 pt : stricte décroissance sur** $[0, \frac{1}{2}[$ **et stricte croissance sur** $]\frac{1}{2}, +\infty[$ **(à l'aide des dérivées)**
- **2 pts : dérivée à gauche / à droite en** $\frac{1}{2}$ **sur le dessin**
- **1 pt : droite d'équation** $y = 1 - x$ **dessinée correctement**
- **1 pt : courbe se rapprochant de l'asymptote sur** $]\frac{1}{2}, +\infty[$

8. On considère la suite réelle $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $\left\{ \begin{array}{c} a_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, a_{n+1} = U(a_n) \end{array} \right.$

a) Montrer : $\forall n \in \mathbb{N},\ a_n \geqslant \dfrac{1}{2}$.

- **1 pt : propriété écrite correctement**
- **1 pt : initialisation**
- **2 pts : héradité**

2 points max si la bonne définition n'est pas traitée

b) Montrer que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

- **1 pt : d'après *6.b)* :** $\forall x \in \left[\frac{1}{2}, +\infty\right[$**,** $U(x) - x \leqslant 0$
- **1 pt : conclusion car** $a_n \geqslant \dfrac{1}{2}$

c) En déduire que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et montrer que sa limite est égale à $\dfrac{1}{2}$.

- 1 pt : théorème de convergence monotone (décroissante et minorée par $\frac{1}{2}$)

- 1 pt : $\ell = U(\ell)$

- 1 pt : $U(x) = x \;\Leftrightarrow\; \dfrac{1}{2} = x$

d) Écrire un programme en **Scilab** qui calcule et affiche le plus petit entier $n \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\left| a_n - \frac{1}{2} \right| \leqslant 10^{-6}$$

```
n = 0
a = 1
while abs(a - 1/2) > 10 ^ (-6)
  a = sqrt(4 + (1 + a) ^ 2) - 2
  n = n + 1
end
disp(n)
```

- 4 pts : initialisation / condition / corps de la boucle / disp(n)