DS5 (version A)

Exercice 1 : `vaguement inspiré de EDHEC S 2012`

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$ de $\mathbb{R}^3$ est :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -1 & 4 & -3 \\ -2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

On note Id l'endomorphisme identité de $\mathbb{R}^3$.

1. a) Démontrer : $(A - I_3)^2 \, (A - 3\, I_3) = 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})}$.

Démonstration.

- Tout d'abord :

$$(A - I_3)^2 \;=\; (A - I_3)\ (A - I_3) \;=\; \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & -3 \\ -2 & 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & -3 \\ -2 & 2 & -2 \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- Ensuite :

$$(A - I_3)^2 \;=\; (A - I_3)^2\ (A - 3\, I_3) \;=\; \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -3 \\ -2 & 2 & -4 \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\text{On a bien : } (A - I_3)^2 \, (A - 3\, I_3) = 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})}.}$$

□

b) En déduire les valeurs propres possibles de f.

Démonstration.

- D'après la question précédente, le polynôme $P(X) = (X - 1)^2 \, (X - 3)$ est un polynôme annulateur de la matrice A.
- Ainsi : $\text{Sp}(A) \subset \{\text{racines de } P\} = \{1, 3\}$.
- Enfin : $\text{Sp}(f) = \text{Sp}(A)$.

$$\boxed{\text{Les réels 1 et 3 sont les valeurs propres possibles de } f.}$$

Commentaire

- Une matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ possède `TOUJOURS` un polynôme annulateur non nul P. On peut démontrer (pas au programme en ECE) qu'il existe toujours un tel polynôme de degré n.
- Si P est un polynôme annulateur de A alors, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, le polynôme $\alpha\, P$ est un polynôme annulateur de A :

$$(\alpha\, P)(A) = \alpha\, P(A) = 0$$

  Cela suffit à démontrer que A possède une infinité de polynômes annulateurs. On peut en obtenir d'autres. Par exemple $Q(X) = (X - 5)\ P(X)$ est un polynôme annulateur de A :

$$Q(A) = (A - 5\, I)\ P(A) = 0$$

- Parler `DU` polynôme annulateur d'une matrice n'a donc aucun sens.

□

c) Déterminer les valeurs propres et espaces propres de f.
On précisera la dimension des sous-espaces propres.
En particulier, on écrira : $\mathrm{Ker}(f - 3\,\mathrm{Id}) = \mathrm{Vect}\,(w)$ où w est un vecteur de $\mathbb{R}^3$ de première coordonnée 1.

Démonstration.

- Démontrons que 1 est bien valeur propre de A.

$$A - I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & -3 \\ -2 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

Cette matrice est non inversible car possède 2 colonnes colinéaires ($C_3 = -C_2$).

$$\boxed{\text{On en déduit que 1 est valeur propre de } A.}$$

- Démontrons que 3 est bien valeur propre de A.

$$A - 3\,I_3 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -3 \\ -2 & 2 & -4 \end{pmatrix}$$

Cette matrice est non inversible car possède 2 colonnes colinéaires ($C_1 = -C_2$).

$$\boxed{\text{On en déduit que 3 est valeur propre de } A.}$$

$$\boxed{\text{Ainsi : } \mathrm{Sp}(A) = \{1, 3\} \ \text{ et } \ \mathrm{Sp}(f) = \mathrm{Sp}(A) = \{1, 3\}.}$$

Commentaire

- Les racines d'un polynôme annulateur ne sont pas forcément toutes valeurs propres de A.
- Si c'était le cas, A aurait une infinité de valeurs propres (elle en possède au plus 3 !).
Par exemple, comme $Q(X) = (X - 5)\ P(X)$ est un polynôme annulateur, un tel raisonnement permettrait de démontrer que 5 est aussi valeur propre.
- Les racines d'un polynôme annulateur sont généralement appelées valeurs propres **possibles** de A (comprendre qu'elles sont potentiellement des valeurs propres). C'est comme cela qu'il faut lire l'inclusion :
$$\mathrm{Sp}(A) \ \subset \ \{1, 3\}$$
- Afin de démontrer que 1 et 3 sont bien des valeurs propres de A, on démontre que les matrices $A - I_3$ et $A - 3\,I_3$ sont non inversibles. Ils'agit de démontrer que ces matrices sont de rang strictement inférieur à 3. Pour ce faire, on peut remarquer (comme on le fait ici) que deux colonnes (resp. lignes) de la matrice considérée sont colinéaires. La présence d'une colonne (resp. ligne) de 0 permet aussi de démontrer le caractère non inversible.

- Déterminons $E_1(f) = \mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id})$ le sous-espace propre de f associé à la valeur propre 1.

  Soit $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Notons $U = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

$$\begin{array}{rcl}
u \in E_1(f) & \Longleftrightarrow & (f - \mathrm{Id})(u) = 0_{\mathbb{R}^3} \\
& \Longleftrightarrow & (A - I) \times U = 0_{\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})} \\
& \Longleftrightarrow & \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & -3 \\ -2 & 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
& \Longleftrightarrow & \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & - & z & = & 0 \\ -x & + & 3\,y & - & 3\,z & = & 0 \\ -2\,x & + & 2\,y & - & 2\,z & = & 0 \end{array} \right. \\
& \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 + L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + 2\,L_1}}{\Longleftrightarrow} & \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & - & z & = & 0 \\ & & 4\,y & - & 4\,z & = & 0 \\ & & 4\,y & - & 4\,z & = & 0 \end{array} \right. \\
& \underset{L_3 \leftarrow L_3 - L_2}{\Longleftrightarrow} & \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & - & z & = & 0 \\ & & 4\,y & - & 4\,z & = & 0 \\ & & & & 0 & = & 0 \end{array} \right. \\
& \underset{L_1 \leftarrow 4\,L_1 - L_2}{\Longleftrightarrow} & \left\{ \begin{array}{rcrcl} 4\,x & & & = & 0 \\ & & 4\,y & = & 4\,z \end{array} \right.
\end{array}$$

  On obtient alors :

$$\begin{array}{rcl}
E_1(f) & = & \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = 0 \text{ et } y = z\} \\
& = & \{(0, z, z) \mid z \in \mathbb{R}\} \\
& = & \{z \cdot (0, 1, 1) \mid z \in \mathbb{R}\} \\
& = & \mathrm{Vect}\left((0, 1, 1)\right)
\end{array}$$

$$\boxed{\text{On en conclut : } E_1(f) = \mathrm{Vect}\left((0, 1, 1)\right).}$$

- La famille $\mathcal{F}_1 = \big((0, 1, 1)\big)$ est :

  × génératrice de $E_1(f)$,

  × libre car constituée uniquement d'un vecteur non nul.

  On en conclut que $\mathcal{F}_1$ est une base de $E_1(f)$.

$$\boxed{\text{Ainsi : } \dim\big(E_1(f)\big) = \mathrm{Card}\big(\mathcal{F}_1\big) = 1.}$$

Commentaire

- Comme A est la matrice représentative de f dans la base $\mathscr{B}$, alors : $\mathrm{Sp}(A) = \mathrm{Sp}(f)$.
- Par contre : $E_1(A) \neq E_1(f)$. En effet :
  × $E_3(A)$ est un sous-ensemble de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, espace vectoriel dont les vecteurs sont des matrices de taille 3×1.
  × $E_3(f)$ est un sous-ensemble de $\mathbb{R}^3$, espace vectoriel dont les vecteurs sont des triplets de réels.
- On peut résumer cette différence par : $(x, y, z) \neq \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

- Déterminons $E_3(f) = \text{Ker}(f - 3\,\text{Id})$ le sous-espace propre de f associé à la valeur propre 3.

  Soit $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Notons $U = \text{Mat}_{\mathscr{B}}(u) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

$$
\begin{array}{rcl}
u \in E_3(f) & \iff & (f - 3\,\text{Id})(u) = 0_{\mathbb{R}^3} \\
 & \iff & (A - 3\,I) \times U = 0_{\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})} \\
 & \iff & \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -3 \\ -2 & 2 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
 & \iff & \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} -x & + & y & - & z & = & 0 \\ -x & + & y & - & 3\,z & = & 0 \\ -2\,x & + & 2\,y & - & 4\,z & = & 0 \end{array} \right. \\
 & \underset{L_3 \leftarrow L_3 - 2\,L_1}{\overset{L_2 \leftarrow L_2 - L_1}{\iff}} & \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} -x & + & y & - & z & = & 0 \\ & & & - & 2\,z & = & 0 \\ & & & - & 2\,z & = & 0 \end{array} \right. \\
 & \overset{L_3 \leftarrow L_3 - L_2}{\iff} & \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} -x & + & y & - & z & = & 0 \\ & & & - & 2\,z & = & 0 \\ & & & & 0 & = & 0 \end{array} \right. \\
 & \overset{L_1 \leftarrow 4\,L_1 - L_2}{\iff} & \left\{ \begin{array}{rcrcl} -x & - & z & = & -y \\ & - & 2\,z & = & 0 \end{array} \right. \\
 & \overset{L_1 \leftarrow 2\,L_1 - L_2}{\iff} & \left\{ \begin{array}{rcrcl} -2x & & & = & -2y \\ & - & 2\,z & = & 0 \end{array} \right.
\end{array}
$$

  On obtient alors :

$$
\begin{array}{rcl}
E_3(f) & = & \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = y \text{ et } z = 0\} \\
 & = & \{(y, y, 0) \mid y \in \mathbb{R}\} \\
 & = & \{y \cdot (1, 1, 0) \mid y \in \mathbb{R}\} \\
 & = & \text{Vect}\left((1, 1, 0)\right)
\end{array}
$$

  On en conclut : $E_3(f) = \text{Vect}\left((1, 1, 0)\right)$.
  Ainsi, le vecteur recherché est : $w = (1, 1, 0)$.

- La famille $\mathcal{F}_2 = \big((1, 1, 0)\big)$ est :
  - × génératrice de $E_3(f)$,
  - × libre car constituée uniquement d'un vecteur non nul.

  On en conclut que $\mathcal{F}_2$ est une base de $E_3(f)$.

  Ainsi : $\dim\big(E_3(f)\big) = \text{Card}\big(\mathcal{F}_2\big) = 1$.

□

Commentaire

- Il faut s'habituer à déterminer les ensembles $E_\lambda(A)$ par lecture de la matrice $A - \lambda\, I$.
- Illustrons la méthode avec la matrice de l'exercice et $\lambda = 1$.
  On cherche les vecteurs $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ de $E_1(A)$ c'est-à-dire les vecteurs tels que :
  $(A - I_3)\, X = 0_{\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})}$. Or :

$$\begin{array}{rcl} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & -3 \\ -2 & 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} & = & x \cdot C_1 + y \cdot C_2 + z \cdot C_3 \\ & = & x \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} + y \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} + z \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix} \end{array}$$

  On peut alors remarquer que le choix $x = 0$ et $y = z$ permet d'obtenir le vecteur $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.
  Ce n'est qu'une reformulation du fait que les colonnes C_2 et C_3 de la matrice $A - I_3$ sont opposées. On en déduit alors :

$$E_1(A) \ \supset \ \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

  L'égalité peut alors s'obtenir à l'aide d'un argument de dimension. Pour cela, il faut démontrer au préalable que le rang de la matrice $A - I_3$ est de 2. On obtient ainsi, par théorème du rang :

$$\dim\big(E_1(A)\big) \ = \ \dim\big(\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})\big) - \text{rg}(A - I_3) \ = \ 3 - 2 \ = \ 1$$

d) L'endomorphisme f est-il bijectif ?
L'endomorphisme f est-il diagonalisable ?

Démonstration.

- Comme $0 \notin \text{Sp}(f)$, alors $\text{Ker}(f) = \{0_{\mathbb{R}^3}\}$ et l'endomorphisme f est donc injectif.
  De plus, $\mathbb{R}^3$ est un espace vectoriel de **dimension finie**.

$$\boxed{\text{On en conclut que } f \text{ est bijectif.}}$$

- L'endomorphisme f possède deux valeurs propres : 1 et 3. De plus :

$$\underbrace{\dim\big(E_1(f)\big)}_{=1} \ + \ \underbrace{\dim\big(E_3(f)\big)}_{=1} \ = \ 2 \ \neq \ 3 \ = \ \dim(\mathbb{R}^3)$$

$$\boxed{\text{On en conclut que } f \text{ n'est pas diagonalisable.}}$$

□

2. Pour tout endomorphisme $g \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^3)$, on rappelle que l'on note g^2 l'endomorphisme défini par :

$$g^2 = g \circ g$$

a) Démontrer : $\text{Ker}\big(f - \text{Id}\big) \subset \text{Ker}\big((f - \text{Id})^2\big)$.

Démonstration.
Soit $x \in \text{Ker}\big(f - \text{Id}\big)$.
Alors : $(f - \text{Id})(x) = 0_{\mathbb{R}^3}$.
Et par application de $f - \text{Id}$, on obtient :

$$\begin{array}{ccc} (f - \text{Id})\big((f - \text{Id})(x)\big) & = & (f - \text{Id})\big(0_{\mathbb{R}^3}\big) \\ \shortparallel & & \shortparallel \\ (f - \text{Id})^2(x) & & 0_{\mathbb{R}^3} \end{array}$$

(car $f - \text{Id}$ est un endomorphisme)

Ainsi : $(f - \text{Id})^2(x) = 0_{\mathbb{R}^3}$ et donc : $x \in \text{Ker}\big((f - \text{Id})^2\big)$.

$$\boxed{\text{On a bien : Ker}\big(f - \text{Id}\big) \subset \text{Ker}\big((f - \text{Id})^2\big).}$$

Commentaire

Cette question n'est qu'une instance particulière de la propriété qui stipule que tout endomorphisme g d'un espace vectoriel E vérifie : $\text{Ker}(g) \subset \text{Ker}(g^2)$.

□

b) Démontrer : $\text{Ker}\big((f - \text{Id})^2\big) = \text{Vect}\,(u, v)$ où $u = (0, 1, 1)$ et $v = (1, 0, 1)$.

Démonstration.

- Soit $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Notons $U = \text{Mat}_{\mathscr{B}}(u) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

$$\begin{array}{rcl} u \in \text{Ker}\big((f - \text{Id})^2\big) & \Longleftrightarrow & (f - \text{Id})^2(u) = 0_{\mathbb{R}^3} \\ & \Longleftrightarrow & (A - I)^2 \times U = 0_{\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})} \\ & \Longleftrightarrow & \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ & \Longleftrightarrow & \left\{ \begin{array}{rcrcrcr} 2\,x & + & 2\,y & - & 2\,z & = & 0 \\ 2\,x & + & 2\,y & - & 2\,z & = & 0 \\ & & & & 0 & = & 0 \end{array} \right. \\ & \underset{L_2 \leftarrow L_2 - L_1}{\Longleftrightarrow} & \left\{ \begin{array}{rcrcrcr} 2\,x & + & 2\,y & - & 2\,z & = & 0 \\ & & & & 0 & = & 0 \end{array} \right. \\ & \Longleftrightarrow & \left\{ \begin{array}{rcrcr} 2\,x & = & -2\,y & + & 2\,z \end{array} \right. \end{array}$$

On obtient alors :

$$\begin{array}{rcl} \text{Ker}\big((f - \text{Id})^2\big) & = & \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = -y + z\} \\ & = & \{(-y + z, y, z) \mid z \in \mathbb{R}\} \\ & = & \{y \cdot (-1, 1, 0) + z \cdot (0, 1, 1) \mid z \in \mathbb{R}\} \\ & = & \text{Vect}\,((-1, 1, 0), (1, 0, 1)) \end{array}$$

$$\boxed{\text{On en conclut : Ker}\big((f - \text{Id})^2\big) = \text{Vect}\,((-1, 1, 0), (1, 0, 1)).}$$

- Enfin :

$$\text{Vect}\left((-1,1,0),(1,0,1)\right) \;=\; \text{Vect}\left((-1,1,0)+(1,0,1),(1,0,1)\right) \;=\; \text{Vect}\left((0,1,1),(1,0,1)\right)$$

$$\boxed{\text{On a bien : Vect}\left((0,1,1),(1,0,1)\right).}$$ □

3. a) Démontrer que la famille (u,v,w) est une base de $\mathbb{R}^3$.
Dans la suite, on notera $\mathscr{B}'$ cette base.

Démonstration.
Rappelons tout d'abord : $u = (0,1,1)$, $v = (1,0,1)$ et $w = (1,1,0)$.

- Démontrons que la famille (u,v,w) est libre.
  Soit $(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3) \in \mathbb{R}^3$.
  Suppposons : $\lambda_1 \cdot u + \lambda_2 \cdot v + \lambda_3 \cdot w \;=\; (0,0,0)$. Or :

$$\begin{array}{cl}
 & \lambda_1 \cdot u + \lambda_2 \cdot v + \lambda_3 \cdot w \;=\; (0,0,0) \\[4pt]
\Longleftrightarrow & \lambda_1 \cdot (0,1,1) + \lambda_2 \cdot (1,0,1) + \lambda_3 \cdot (1,1,0) \;=\; (0,0,0) \\[4pt]
\Longleftrightarrow & \left\{\begin{array}{rcrcrcl} & & \lambda_2 & + & \lambda_3 & = & 0 \\ \lambda_1 & & & + & \lambda_3 & = & 0 \\ \lambda_1 & + & \lambda_2 & & & = & 0 \end{array}\right. \\[20pt]
\overset{L_1 \leftrightarrow L_2}{\Longleftrightarrow} & \left\{\begin{array}{rcrcrcl} \lambda_1 & & & + & \lambda_3 & = & 0 \\ & & \lambda_2 & + & \lambda_3 & = & 0 \\ \lambda_1 & + & \lambda_2 & & & = & 0 \end{array}\right. \\[20pt]
\overset{L_3 \leftarrow L_3 - L_1}{\Longleftrightarrow} & \left\{\begin{array}{rrcrcl} \lambda_1 & & + & \lambda_3 & = & 0 \\ & \lambda_2 & + & \lambda_3 & = & 0 \\ & \lambda_2 & - & \lambda_3 & = & 0 \end{array}\right. \\[20pt]
\overset{L_3 \leftarrow L_3 - L_2}{\Longleftrightarrow} & \left\{\begin{array}{rrcrcl} \lambda_1 & & + & \lambda_3 & = & 0 \\ & \lambda_2 & + & \lambda_3 & = & 0 \\ & & - & 2\,\lambda_3 & = & 0 \end{array}\right. \\[20pt]
\Longleftrightarrow & \{\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0 \\
 & \textit{(par remontées successives)}
\end{array}$$

$$\boxed{\text{La famille } (u,v,w) \text{ est libre.}}$$

- La famille (u,v,w) :
  × est libre.
  × vérifie : $\text{Card}\left((u,v,w)\right) = 3 = \dim\left(\mathbb{R}^3\right)$.

$$\boxed{\text{On en déduit que la famille } (u,v,w) \text{ est une base de } \mathbb{R}^3.}$$

Commentaire

- Le terme **cardinal** est réservé aux ensembles finis. La famille (u,v,w) est un ensemble qui contient 3 vecteurs. Elle est donc finie, de cardinal 3 (ce qu'on note $\text{Card}\left((u,v,w)\right) = 3$).
- $\text{Vect}\,(u,v,w)$ est l'espace vectoriel constitué de toutes les combinaisons linéaires des vecteurs (u,v,w). C'est un ensemble **infini** de vecteurs, on ne peut parler de son cardinal. Par contre, si l'on dispose d'une base (u,v,w) d'un ev, tout vecteur se décompose de manière unique sur cette base. Ceci permet de donner une représentation finie de cet ensemble infini.
- Les notations : $\cancel{\text{Card}(\text{Vect}\,(u,v,w))}$ et $\cancel{\dim((u,v,w))}$ n'ont aucun sens ! □

b) On note $T = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(f)$. Déterminer T.

Démonstration.

Notons $U = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $V = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(v) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $W = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(w) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

- $f(u) = u = 1 \cdot u + 0 \cdot v + 0 \cdot w$ car $u \in E_1(f)$.

$$\boxed{\text{Ainsi : } \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}\big(f(u)\big) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.}$$

- On cherche à décomposer le vecteur $f(v)$ suivant la base (u, v, w).
  Autrement dit, on cherche $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$ tel que : $f(v) = \alpha \cdot u + \beta \cdot v + \gamma \cdot w$. Or :

$$\begin{array}{cll}
 & f(v) = \alpha \cdot u + \beta \cdot v + \gamma \cdot w & \\
\Longleftrightarrow & \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}\big(f(v)\big) = \alpha \cdot \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u) + \beta \cdot \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(v) + \gamma \cdot \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(w) & \textit{(par linéarité de } \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\cdot)\textit{)} \\
\Longleftrightarrow & AV = \alpha \cdot U + \beta \cdot V + \gamma \cdot W & \\
\Longleftrightarrow & \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ -3 \end{pmatrix} = \alpha \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \gamma \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} & \textit{(en calculant } AV\textit{)} \\
\Longleftrightarrow & \left\{ \begin{array}{rcrcrcr} & & \beta & + & \gamma & = & 1 \\ \alpha & & & + & \gamma & = & -4 \\ \alpha & + & \beta & & & = & -3 \end{array} \right. & \\
\underset{L_1 \leftrightarrow L_2}{\Longleftrightarrow} & \left\{ \begin{array}{rcrcrcr} \alpha & & & + & \gamma & = & -4 \\ & & \beta & + & \gamma & = & 1 \\ \alpha & + & \beta & & & = & -3 \end{array} \right. & \\
\underset{L_3 \leftarrow L_3 - L_1}{\Longleftrightarrow} & \left\{ \begin{array}{rcrcrcr} \alpha & & & + & \gamma & = & -4 \\ & & \beta & + & \gamma & = & 1 \\ & & \beta & - & \gamma & = & 1 \end{array} \right. & \\
\underset{L_3 \leftarrow L_3 - L_2}{\Longleftrightarrow} & \left\{ \begin{array}{rcrcrcr} \alpha & & & + & \gamma & = & -4 \\ & & \beta & + & \gamma & = & 1 \\ & & & - & 2\gamma & = & 0 \end{array} \right. & \\
\underset{L_3 \leftarrow -\frac{1}{2} L_3}{\Longleftrightarrow} & \left\{ \begin{array}{rcrcrcr} \alpha & & & + & \gamma & = & -4 \\ & & \beta & + & \gamma & = & 1 \\ & & & & \gamma & = & 0 \end{array} \right. \underset{\substack{L_1 \leftarrow L_1 - L_3 \\ L_2 \leftarrow L_2 - L_3}}{\Longleftrightarrow} \left\{ \begin{array}{rrrcr} \alpha & & & = & -4 \\ & \beta & & = & 1 \\ & & \gamma & = & 0 \end{array} \right. &
\end{array}$$

  Ainsi : $f(v) = -4 \cdot u + 1 \cdot v + 0 \cdot w$.

$$\boxed{\text{Ainsi : } \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}\big(f(v)\big) = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.}$$

- $f(w) = 3\,w = 0 \cdot u + 0 \cdot v + 3 \cdot w$ car $w \in E_3(f)$.

$$\boxed{\text{Ainsi : } \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}\big(f(w)\big) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}.}$$

$$\boxed{\text{On en déduit : } T = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(f) = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}}$$

□

c) On note P la matrice de passage de la base $\mathscr{B}$ à la base $\mathscr{B}'$.
Déterminer l'inverse de P.

Démonstration.

- Par définition :
$$P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'} = \big(\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u), \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(v), \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(w)\big)$$
$$\boxed{\text{Ainsi : } P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.}$$

- On applique l'algorithme du pivot de Gauss.
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \left| \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right.$$
On effectue l'opération $\left\{ L_1 \leftrightarrow L_2 \right.$. On obtient :
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \left| \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right.$$
On effectue l'opération $\left\{ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \right.$. On obtient :
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \left| \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \right.$$
On effectue l'opération $\left\{ L_3 \leftarrow L_3 - L_2 \right.$. On obtient :
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \left| \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \right.$$

- La réduite obtenue est triangulaire supérieure. De plus, ses coefficients diagonaux sont tous non nuls. Ainsi, cette réduite est inversible et il en est de même de la matrice initiale P.
(c'est toujours le cas d'une matrice de passage entre deux bases $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$)

- On effectue les opérations $\left\{ \begin{array}{l} L_1 \leftarrow 2\,L_1 + L_3 \\ L_2 \leftarrow 2\,L_2 + L_3 \end{array} \right.$. On obtient :
$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \left| \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \right.$$
On effectue les opérations $\left\{ \begin{array}{l} L_1 \leftarrow \frac{1}{2}\,L_1 \\ L_2 \leftarrow \frac{1}{2}\,L_2 \\ L_3 \leftarrow -\frac{1}{2}\,L_3 \end{array} \right.$. On obtient :
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \left| \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \right.$$
$$\boxed{\text{Ainsi } P \text{ est inversible et } P^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.}$$
□

d) Rappeler la formule liant les matrices A, T et P.

Démonstration.
La formule de changement de base stipule :

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) \;=\; P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'} \times \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(f) \times P_{\mathscr{B}',\mathscr{B}}$$

$$\boxed{\text{Ainsi : } A = P\ T\ P^{-1}.}$$

□

4. a) On note : $J = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ et $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Exprimer T en fonction de J et N.

Démonstration.

$$T \;=\; \begin{pmatrix} 1 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \;=\; J - 4\,N$$

$$\boxed{\text{Ainsi : } T = J - 4\,N.}$$

□

b) À l'aide de la formule du binôme, démontrer : $\forall n \in \mathbb{N},\ T^n = J^n - 4n\ N$.

Démonstration.

- Tout d'abord :

$$N^2 \;=\; N \times N \;=\; \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\text{Par récurrence immédiate : } \forall k \geqslant 2,\ N^k = 0_{\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})}.}$$

(il est aussi possible de justifier comme suit :
pour tout $k \geqslant 2$, $N^k = N^2 \times N^{k-1} = 0_{\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})} \times N^{k-1} = 0_{\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})}$)

- D'autre part :

$$JN \;=\; \begin{pmatrix} 1 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad NJ \;=\; \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\text{Ainsi : } NJ = N = JN \text{ et les matrices } N \text{ et } J \text{ commutent.}}$$

- Soit $n \in \mathbb{N}^*$. D'après la formule du binôme :

$$\begin{aligned}
T^n \;&=\; \big(J - 4\,N\big)^n \;=\; \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\ J^{n-k}\ (-4N)^k \\
&=\; \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\ (-4)^k\ J^{n-k}\ N^k \\
&=\; \sum_{k=0}^{1} \binom{n}{k}\ (-4)^k\ J^{n-k}\ N^k + \sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k}\ (-4)^k\ J^{n-k}\ N^k && \textit{(ce découpage est valide car } n \geqslant 1\textit{)} \\
&=\; \sum_{k=0}^{1} \binom{n}{k}\ (-4)^k\ J^{n-k}\ N^k && \textit{(car : } \forall k \geqslant 2,\ N^k = 0\textit{)} \\
&=\; \binom{n}{0}\ (-4)^0\, J^n\ N^0 + \binom{n}{1}\ (-4)^1\, J^{n-1}\ N^1 \;=\; J^n - 4n\ J^{n-1}\ N
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Ainsi, pour tout } n \in \mathbb{N}^*,\ T^n = J^n - 4n\ J^{n-1}\ N.}$$

Remarquons alors :

$$J^{n-1}\, N \;=\; \begin{pmatrix} 1^{n-1} & 0 & 0 \\ 0 & 1^{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 3^{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3^{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \;=\; N$$

- Il reste à vérifier la propriété au rang 0.
  - × D'une part : $J^0 - \cancel{4 \times 0\, N} \;=\; I_3$.
  - × D'autre part : $T^0 \;=\; I_3$.

$$\boxed{\text{Ainsi, pour tout } n \in \mathbb{N},\ T^n = J^n - 4n\, N.}$$

□

c) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, déterminer A^n.

Démonstration.

- D'après la question ***3.d)*** : $A = PTP^{-1}$.

$$\boxed{\text{Par une récurrence immédiate, on en déduit : } \forall n \in \mathbb{N},\ A^n \;=\; PT^nP^{-1}.}$$

- Soit $n \in \mathbb{N}$. Tout d'abord, d'après la question précédente :

$$T^n \;=\; J^n - 4n\, N \;=\; \begin{pmatrix} 1^n & 0 & 0 \\ 0 & 1^n & 0 \\ 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix} - 4n \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} 1 & -4n & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix}$$

- Ensuite :

$$\begin{aligned} A^n &= PT^nP^{-1} \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -4n & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3^n \\ 1 & -4n & 3^n \\ 1 & 1-4n & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3^n+1 & 3^n-1 & -3^n+1 \\ 3^n-1-4n & 3^n+1+4n & -3^n-4n+1 \\ -4n & 4n & 2-4n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ A^n = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3^n+1 & 3^n-1 & -3^n+1 \\ 3^n-1-4n & 3^n+1+4n & -3^n-4n+1 \\ -4n & 4n & 2-4n \end{pmatrix}}$$

□

5. *a)* Démontrer que A est inversible et déterminer son inverse.

Démonstration.

- D'après la question ***1.a)*** : $(A - I_3)^2\,(A - 3\,I_3) = 0_{\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})}$. Or :

$$\begin{aligned} (A - I_3)^2\,(A - 3\,I_3) &= (A^2 - 2\,A + I_3)\,(A - 3\,I_3) \\ &= (A^3 - 3\,A^2) + (-2\,A^2 + 6\,A) + (A - 3\,I_3) \\ &= A^3 - 5\,A^2 + 7\,A - 3\,I_3 \end{aligned}$$

- On en déduit :

$$\begin{array}{rrcl} & A^3 - 5\,A^2 + 7\,A - 3\,I_3 & = & 0_{\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})} \\ \text{donc} & A^3 - 5\,A^2 + 7\,A & = & 3\,I_3 \\ \text{et} & \dfrac{1}{3}\,A\,(A^2 - 5\,A + 7\,I_2) & = & I_3 \\ \text{ou encore} & A\left(\dfrac{1}{3}\,\left(A^2 - 5\,A + 7\,I_2\right)\right) & = & I_3 \end{array}$$

$$\boxed{\text{On en conclut que la matrice } A \text{ est inversible d'inverse } A^{-1} = \dfrac{1}{3}\,\left(A^2 - 5\,A + 7\,I_2\right).}$$

□

b) La formule démontrée en *4.c)* est-elle valable pour $n = -1$?

Démonstration.
Déterminons tout d'abord explicitement A^{-1}.

- Tout d'abord :

$$A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -1 & 4 & -3 \\ -2 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -1 & 4 & -3 \\ -2 & 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 4 & -4 \\ 0 & 9 & -8 \\ -4 & 4 & -3 \end{pmatrix}$$

- Ainsi :

$$A^2 - 5\,A + 7\,I_2 = \begin{pmatrix} 5 & 4 & -4 \\ 0 & 9 & -8 \\ -4 & 4 & -3 \end{pmatrix} - 5\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -1 & 4 & -3 \\ -2 & 2 & -1 \end{pmatrix} + 7\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 5 & -4 & 7 \\ 6 & -6 & 9 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{A^{-1} = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 5 & -4 & 7 \\ 6 & -6 & 9 \end{pmatrix}}$$

- Par ailleurs, en remplaçant n par -1 dans le membre droit de l'égalité obtenue en *4.c)*, on obtient la matrice :

$$\begin{array}{rl} & \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 3^{-1}+1 & 3^{-1}-1 & -3^{-1}+1 \\ 3^{-1}-1+4 & 3^{-1}+1-4 & -3^{-1}+4+1 \\ 4 & -4 & 2+4 \end{pmatrix} \\ = & \dfrac{1}{2}\,\dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 1+3 & 1-3 & -1+3 \\ 1-3+12 & 1+3-12 & -1+12+3 \\ 12 & -12 & 18 \end{pmatrix} \qquad \textit{(en multipliant par } \tfrac{1}{3} \times 3 = 1\textit{)} \\ = & \dfrac{1}{2}\,\dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 4 & -2 & 2 \\ 10 & -8 & 14 \\ 12 & -12 & 18 \end{pmatrix} = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 5 & -4 & 7 \\ 6 & -6 & 9 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$\boxed{\text{La formule de la question } \textbf{\textit{4.c)}} \text{ reste valable pour } n = -1.}$$

□

Exercice 2 (EML 2010)

Les deux parties sont indépendantes

Partie I

Une gare dispose de deux guichets. Trois clients notés C_1, C_2, C_3 arrivent en même temps. Les clients C_1 et C_2 se font servir tandis que le client C_3 attend puis effectue son opération dès que l'un des deux guichets se libère.
On définit X_1, X_2, X_3 les variables aléatoires égales à la durée d'opération des clients C_1, C_2, C_3 respectivement. Ces durées sont mesurées en minutes et arrondies à l'unité supérieure ou égale. On suppose que les variables X_1, X_2, X_3 suivent la loi géométrique de paramètre p, $p \in \,]0,1[$ et qu'elles sont indépendantes. On note $q = 1 - p$.
On note A l'événement : « C_3 termine en dernier son opération ».
Ainsi l'événement A est égal à l'événement : $[\min(X_1, X_2) + X_3 > \max(X_1, X_2)]$.
On se propose de calculer la probabilité de A.

1. Rappeler la loi de X_1 ainsi que son espérance $\mathbb{E}(X_1)$ et sa variance $\mathbb{V}(X_1)$.
On définit la variable aléatoire $\Delta = |X_1 - X_2|$.

Démonstration.
D'après l'énoncé, $X_1 \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$. Autrement dit :
- × $X_1(\Omega) = \mathbb{N}^*$.
- × $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}([X_1 = k]) = p\, q^{k-1}$.

$$\boxed{\text{Enfin : } \mathbb{E}(X_1) = \frac{1}{p} \quad \text{et} \quad \mathbb{V}(X_1) = \frac{q}{p^2}.}$$ □

2. Calculer la probabilité $\mathbb{P}([\Delta = 0])$.

Démonstration.
- Tout d'abord : $[\Delta = 0] \;=\; [|X_1 - X_2| = 0] \;=\; [X_1 - X_2 = 0]$.
- La famille $([X_2 = k])_{k \in \mathbb{N}^*}$ est un système complet d'événements.
  Ainsi, d'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}([X_1 - X_2 = 0]) &= \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}([X_2 = k] \cap [X_1 - X_2 = 0]) \\
&= \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}([X_2 = k] \cap [X_1 = k]) \\
&= \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}([X_2 = k])\, \mathbb{P}([X_1 = k]) && \textit{(car } X_1 \textit{ et } X_2 \textit{ sont indépendantes)} \\
&= \sum_{k=1}^{+\infty} p\, q^{k-1}\, p\, q^{k-1} \\
&= p^2 \sum_{k=1}^{+\infty} (q^2)^{k-1} \\
&= p^2 \sum_{k=0}^{+\infty} (q^2)^{k} \;=\; p^2\, \frac{1}{1-q^2} && \textit{(en reconnaissant la somme d'une série géométrique de raison } q^2 \in \,]-1,1[\textit{)} \\
&= p^{\cancel{2}}\, \frac{1}{\cancel{(1-q)}(1+q)} \;=\; \frac{p}{1+q}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathbb{P}([X_1 = X_2]) = \frac{p}{1+q}}$$ □

3. Soit n un entier naturel non nul.

a) Justifier : $\mathbb{P}([X_1 - X_2 = n]) = \sum\limits_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}([X_2 = k])\, \mathbb{P}([X_1 = n + k])$.

Démonstration.
La famille $([X_2 = k])_{k \in \mathbb{N}^*}$ est un système complet d'événements.
Ainsi, par la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}([X_1 - X_2 = n]) &= \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}([X_2 = k] \cap [X_1 - X_2 = n]) \\
&= \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}([X_2 = k] \cap [X_1 = k + n]) \\
&= \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}([X_2 = k]) \times \mathbb{P}([X_1 = k + n]) \quad \textit{(car } X_1 \textit{ et } X_2 \textit{ sont indépendantes)}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathbb{P}([X_1 - X_2 = n]) = \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}([X_2 = k])\, \mathbb{P}([X_1 = k + n])}$$

□

b) En déduire : $\mathbb{P}([\Delta = n]) = \dfrac{2pq^n}{1+q}$.

Démonstration.

- Remarquons tout d'abord :

$$[\Delta = n] = [\ |X_1 - X_2| = n] = [X_1 - X_2 = n] \cup [X_1 - X_2 = -n]$$

- Comme $n \neq 0$, les événements $[X_1 - X_2 = n]$ et $[X_1 - X_2 = -n]$ sont incompatibles.
Ainsi :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}([\ |X_1 - X_2| = n]) &= \mathbb{P}([X_1 - X_2 = n]) + \mathbb{P}([X_1 - X_2 = -n]) \\
&= \mathbb{P}([X_1 - X_2 = n]) + \mathbb{P}([X_2 - X_1 = n])
\end{aligned}$$

- Reprenons le calcul de la question précédente.

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}([X_1 - X_2 = n]) &= \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}([X_2 = k]) \times \mathbb{P}([X_1 = k + n]) \\
&= \sum_{k=1}^{+\infty} p\ q^{k-1} \times p\ q^{k+n-1} \\
&= p^2\ q^n \sum_{k=1}^{+\infty} q^{2k-2} \\
&= p^2\ q^n \sum_{k=1}^{+\infty} \left(q^2\right)^{k-1} \\
&= p^2\ q^n \sum_{k=0}^{+\infty} \left(q^2\right)^{k} \quad \textit{(par décalage d'indice)} \\
&= p^2\ q^n \frac{1}{1 - q^2} \quad \textit{(en reconnaissant la somme d'une série géométrique de raison } q^2 \in\ ]-1, 1[\textit{)} \\
&= p^{\cancel{2}}\ q^n \frac{1}{\cancel{(1 - q)}\ (1 + q)} = \frac{p\ q^n}{1 + q}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \mathbb{P}\big(\,[X_1 - X_2 = n]\,\big) = \frac{p\, q^n}{1 + q}}$$

- On vient de démontrer que pour tout couple (U, V) de v.a.r. indépedantes et de même loi géométrique on a :
$$\mathbb{P}([U - V = n]) = \frac{p\, q^n}{1+q}$$

$$\boxed{\text{En choisissant } U = X_2 \text{ et } V = X_1\text{, on obtient : } \mathbb{P}([X_2 - X_1 = n]) = \frac{p\, q^n}{1+q}.}$$

- Et ainsi :
$$\begin{aligned}\mathbb{P}([\ \Delta = n]) &= \mathbb{P}([X_1 - X_2 = n]) \ + \ \mathbb{P}([X_2 - X_1 = n]) \\ &= 2\ \mathbb{P}([X_1 - X_2 = n]) \ = \ 2\ \frac{p\, q^n}{1+q}\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{On a bien : } \forall n \in \mathbb{N}^*, \ \mathbb{P}([\ \Delta = n]) \ = \ 2\ \frac{p\, q^n}{1+q}.}$$

Commentaire

- Lorsque deux v.a.r. X_1 et X_2 ont même loi, on a évidemment, pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$:
$$\mathbb{P}\big(\,[a \leqslant X_1 \leqslant b]\,\big) \ = \ \mathbb{P}\big(\,[a \leqslant X_2 \leqslant b]\,\big)$$
Ce type de résultat est vérifié pour tout événement écrit avec une seule v.a.r. (on peut alors remplacer X_1 par X_2).
- Lorsque l'on travaille sur une somme de v.a.r. , il faut faire attention. De manière générale :
$$\mathbb{P}([X_1 + X_2 = n]) \ \cancel{=} \ \mathbb{P}([X_1 + X_1 = n]) = \mathbb{P}([\ 2\,X_1 = n])$$
On ne peut remplacer la v.a.r. X_2 par la v.a.r. X_1 déjà présente dans l'expression. Par contre, si on dispose d'une autre v.a.r. X_3 elle aussi de même loi que X_1 et X_2, on peut écrire :
$$\mathbb{P}([X_1 + X_2 = n]) \ = \ \mathbb{P}([X_1 + X_3 = n])$$
Cela peut être vu comme un renommage de la v.a.r. considéré.
- C'est cette idée qui nous a permis d'établir l'égalité :
$$\mathbb{P}([X_1 - X_2 = n]) \ = \ \mathbb{P}([X_2 - X_1 = n])$$
Il était aussi possible d'effectuer le calcul de $\mathbb{P}([X_2 - X_1 = n])$ en mettant en place de nouveau la rédaction à l'aide de la formule des probabilités totales.
La famille $([X_1 = k])_{k \in \mathbb{N}^*}$ est un système complet d'événements.
Ainsi, par la formule des probabilités totales :
$$\begin{aligned}\mathbb{P}([X_2 - X_1 = n]) &= \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}([X_1 = k] \ \cap \ [X_2 - X_1 = n]) \\ &= \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}([X_1 = k] \ \cap \ [X_2 = k + n]) \\ &= \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}([X_1 = k]) \ \times \ \mathbb{P}([X_2 = k + n]) && \textit{(car } X_1 \textit{ et } X_2 \textit{ sont indépendantes)} \\ &= \sum_{k=1}^{+\infty} p\ q^{k-1} \ \times \ p\ q^{k+n-1} \ = \ \frac{p\, q^n}{1+q}\end{aligned}$$
□

4. a) Montrer que Δ admet une espérance $\mathbb{E}(\Delta)$ et la calculer.

Démonstration.

- Tout d'abord : $\Delta = |X_1 - X_2| \geqslant 0$.

$$\boxed{\text{Les v.a.r. } X_1 \text{ et } X_2 \text{ étant à valeurs entières, } \Delta(\Omega) \subset \mathbb{N}.}$$

- La v.a.r. Δ admet une espérance si et seulement si la série $\sum n \, \mathbb{P}\big([\Delta = n]\big)$ est absolument convergente. Cette série étant à termes positifs, cela revient à démontrer qu'elle est convergente.
- Soit $N \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{N} k\,\mathbb{P}\big([\Delta = k]\big) &= \sum_{k=1}^{N} k\,\mathbb{P}\big([\Delta = k]\big) \\
&= \sum_{k=1}^{N} k\,\frac{2\,p\,q^k}{1+q} && \textit{(d'après la question précédente et car } k \geqslant 1\textit{)} \\
&= 2\,\frac{p\,q}{1+q} \sum_{k=1}^{N} k\,q^{k-1} \quad \underset{N \to +\infty}{\longrightarrow} \quad 2\,\frac{\cancel{p}\,q}{1+q}\,\frac{1}{(1-q)^{\cancel{2}}}
\end{aligned}$$

La limite est obtenue en reconnaissant la somme partielle d'ordre N d'une série géométrique dérivée première de raison $q \in \,]-1,1[$.
On en déduit que Δ admet une espérance.

$$\boxed{\text{De plus : } \mathbb{E}(\Delta) = \frac{2\,q}{(1+q)(1-q)}.}$$

□

b) Montrer : $\mathbb{E}((X_1 - X_2)^2) = 2\,\mathbb{V}(X_1)$. En déduire que Δ admet une variance $\mathbb{V}(\Delta)$ et la calculer.

Démonstration.

- Tout d'abord :

$$(X_1 - X_2)^2 = {X_1}^2 - 2\,X_1X_2 + {X_2}^2$$

La v.a.r. $(X_1 - X_2)^2$ admet une espérance car elle est la combinaison linéaire de v.a.r. qui en admettent une. Plus précisément :

× ${X_1}^2$ (resp. ${X_2}^2$) admet une espérance car X_1 suit une loi géométrique et admet donc un moment d'ordre 2.

× $X_1\,X_2$ admet une espérance car X_1 et X_2 admettent toutes les deux un moment d'ordre 2.

$$\boxed{\text{La v.a.r. } (X_1 - X_2)^2 \text{ admet une espérance.}}$$

- De plus :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\big((X_1 - X_2)^2\big) &= \mathbb{E}\big({X_1}^2 - 2\,X_1X_2 + {X_2}^2\big) \\
&= \mathbb{E}\big({X_1}^2\big) - 2\,\mathbb{E}\big(X_1X_2\big) + \mathbb{E}\big({X_2}^2\big) && \textit{(par linéarité de l'espérance)} \\
&= \mathbb{E}\big({X_1}^2\big) - 2\,\mathbb{E}\big(X_1\big)\,\mathbb{E}\big(X_2\big) + \mathbb{E}\big({X_2}^2\big) && \textit{(car les v.a.r. } X_1 \textit{ et } X_2 \textit{ sont indépendantes)} \\
&= \mathbb{E}\big({X_1}^2\big) - 2\,\mathbb{E}\big(X_1\big)\,\mathbb{E}\big(X_1\big) + \mathbb{E}\big({X_1}^2\big) && \textit{(les v.a.r. } X_1 \textit{ et } X_2 \textit{ ont même loi donc } \mathbb{E}(X_1) = \mathbb{E}(X_2) \textit{ et } \mathbb{E}(X_1^2) = \mathbb{E}(X_2^2)\textit{)} \\
&= 2\,\Big(\mathbb{E}\big({X_1}^2\big) - \mathbb{E}\big(X_1\big)^2\Big) \ = \ 2\,\mathbb{V}(X_1)
\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathbb{E}\big((X_1 - X_2)^2\big) \ = \ 2\,\mathbb{V}(X_1)}$$

- Remarquons alors : $\Delta^2 = |X_2 - X_1|^2 = (X_2 - X_1)^2$.
  On en conclut, d'après le point précédent, que la v.a.r. Δ admet un moment d'ordre 2.
  De plus :

$$\begin{array}{rcll}
\mathbb{V}(\Delta) & = & \mathbb{E}(\Delta^2) - \big(\mathbb{E}(\Delta)\big)^2 & \textit{(par la formule de Kœnig-Huygens)} \\[2mm]
& = & 2\,\mathbb{V}(X_1) - \left(\dfrac{2\,q}{(1+q)\,(1-q)}\right)^2 & \\[2mm]
& = & 2\,\dfrac{q}{p^2} - \dfrac{4\,q^2}{(1+q)^2\,(1-q)^2} & \textit{(car } X_1 \hookrightarrow \mathcal{G}(p)\textit{)} \\[2mm]
& = & \dfrac{2\,q}{p^2}\left(1 - \dfrac{2\,q}{(1+q)^2}\right) & \\[2mm]
& = & \dfrac{2\,q}{p^2}\,\dfrac{(1+q)^2 - 2\,q}{(1+q)^2} \ = \ \dfrac{2}{p^2}\,\dfrac{(1+\cancel{2q}+q^2) - \cancel{2q}}{(1+q)^2} &
\end{array}$$

$$\boxed{\mathbb{V}(\Delta) \ = \ 2\,\dfrac{q\,(1+q^2)}{p^2\,(1+q)^2}}$$

□

5. Montrer que l'événement A est égal à l'événement $[X_3 > \Delta]$.

Démonstration.

- Remarquons tout d'abord :

$$A \ = \ [\min(X_1, X_2) + X_3 > \max(X_1, X_2)] \ = \ [X_3 > \max(X_1, X_2) - \min(X_1, X_2)]$$

- Démontrons alors : $\Delta = \max(X_1, X_2) - \min(X_1, X_2)$.
  Soit $\omega \in \Omega$.

$$\begin{array}{rcl}
\Delta(\omega) & = & |X_2(\omega) - X_1(\omega)| \\[2mm]
& = & \left\{\begin{array}{ll} X_2(\omega) - X_1(\omega) & \text{si } X_2(\omega) \geqslant X_1(\omega) \\ X_1(\omega) - X_2(\omega) & \text{si } X_2(\omega) < X_1(\omega) \end{array}\right. \\[2mm]
& = & \max\big(X_1(\omega), X_2(\omega)\big) - \min\big(X_1(\omega), X_2(\omega)\big) \\[2mm]
& = & \big(\max(X_1, X_2) - \min(X_1, X_2)\big)(\omega)
\end{array}$$

On a donc démontré :

$$\forall \omega \in \Omega,\ \Delta(\omega) = \big(\max(X_1, X_2) - \min(X_1, X_2)\big)(\omega)$$

$$\boxed{\text{Ainsi : } \Delta = \max(X_1, X_2) - \min(X_1, X_2).}$$

$$\boxed{\text{Et : } A \ = \ [X_3 > \max(X_1, X_2) - \min(X_1, X_2)] \ = \ [X_3 > \Delta].}$$

Commentaire

- On rappelle qu'une v.a.r. X est une **application** de Ω dans $\mathbb{R}$. Ainsi, démontrer l'égalité de deux v.a.r. ($X = Y$) c'est démontrer que ces deux **applications** sont égales en tout point. Plus précisément :
$$X = Y \ \Leftrightarrow\ \forall \omega \in \Omega,\ X(\omega) = Y(\omega)$$
Au passage :
  × lorsque l'on note $X = 5$, cela signifie que la v.a.r. X est la v.a.r. constante égale à 5 (la propriété : $\forall \omega \in \Omega,\ X(\omega) = 5$ est vérifiée).
  × lorsqu'on écrit « la v.a.r. X prend la valeur 5 si ... » signifie qu'il **existe** (au moins) un tirage $\omega \in \Omega$ pour lequel $X(\omega) = 5$.

  Il existe malheureusement des énoncés dans lesquels ces deux expressions sont confondues. Ce ne devrait pas être le cas : il n'y a pas lieu de confondre les symboles $\forall$ et $\exists$.
- On trouvera dans certains corrigés une disjonction de cas du type :

  × Si $X_1 > X_2$: alors $\max(X_1, X_2) = X_1$ et $\min(X_1, X_2) = X_2$ ...
  × Si $X_1 \leqslant X_2$: alors $\max(X_1, X_2) = X_2$ et $\min(X_1, X_2) = X_1$ ...

  Cette disjonction de cas n'a pas de sens.
  Pour comprendre pourquoi ce n'est pas le cas, il faut avoir bien saisi la différence entre la relation d'ordre opérant sur les réels et celle opérant sur les applications.
  × Lorsque a et b sont des réels, on a :
  $$a \leqslant b \quad \texttt{OU} \quad a > b$$
  On dit que la relation d'ordre $\leqslant$ définie sur les réels est une relation d'ordre **totale** : on peut toujours comparer deux réels.
  × La relation d'ordre sur les v.a.r. est elle aussi notée $\leqslant$ et est définie par :
  $$X_1 \leqslant X_2 \ \Leftrightarrow\ \forall \omega \in \Omega,\ X_1(\omega) \leqslant X_2(\omega)$$
  Cette relation d'ordre n'est pas **totale**. Autrement dit, il existe des v.a.r. X_1 et X_2 qui ne sont pas comparables par la relation $\leqslant$. Plus précisément, dès qu'il existe deux tirages $\omega_1 \in \Omega$ et $\omega_2 \in \Omega$ tels que :
  $$X_1(\omega_1) \leqslant X_2(\omega_1) \quad \text{et} \quad X_1(\omega_2) > X_2(\omega_2)$$
  alors aucune des relations : $X_1 \leqslant X_2$ et $X_1 > X_2$ n'est vérifiée puisque chacune de ces deux inégalités définie une propriété qui doit être vérifiée **pour tout** ω.

  La relation d'ordre définie sur les v.a.r. est dite **partielle** (on ne peut pas comparer tous les v.a.r.). La disjonction de cas présentée plus haut fait l'hypothèse forte que l'on peut comparer les v.a.r. X_1 et X_2. Cette hypothèse n'est pas raisonnable et une telle disjonction n'a donc pas lieu d'être.

6. a) En déduire : $\mathbb{P}(A) = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}([\Delta = k])\, \mathbb{P}([X_3 > k])$.

Démonstration.
La famille $([\Delta = k])_{k\in\mathbb{N}}$ est un système complet d'événements.
Ainsi, par la formule des probabilités totales :

$$\begin{array}{rcll} \mathbb{P}([X_3 > \Delta]) & = & \sum\limits_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}([\Delta = k] \ \cap \ [X_3 > \Delta]) & \\ & = & \sum\limits_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}([\Delta = k] \ \cap \ [X_3 > k]) & \\ & = & \sum\limits_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}([\Delta = k]) \ \times \ \mathbb{P}([X_3 > k]) & \textit{(car } \Delta \textit{ et } X_3 \textit{ sont indépendantes)} \end{array}$$

L'indépendance de X_3 et Δ est une conséquence du lemme des coalitions : comme X_1, X_2 et X_3 sont indépendantes, les v.a.r. $|X_2 - X_1|$ et X_3 sont indépendantes.

$$\boxed{\mathbb{P}([X_3 > \Delta]) = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}([\Delta = k]) \ \times \ \mathbb{P}([X_3 > k])}$$

□

b) Exprimer $\mathbb{P}(A)$ à l'aide de p et q.

Démonstration.

- D'après la question précédente :

$$\mathbb{P}([X_3 > \Delta]) \ = \ \sum\limits_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}([\Delta = k]) \ \times \ \mathbb{P}([X_3 > k])$$

- Or :

$$\begin{array}{rcll} \mathbb{P}([\Delta = 0]) \ \times \ \mathbb{P}([X_3 > 0]) & = & \mathbb{P}([\Delta = 0]) \ \times \ 1 & \textit{(car } [X_3 > 0] = \Omega \textit{ puisque } X_3(\Omega) = \mathbb{N}^* \textit{)} \\ & = & \dfrac{p}{1+q} & \textit{(d'après la question } \textbf{\textit{2.}}\textit{)} \end{array}$$

- Et, pour tout $k \in \mathbb{N}$: $\mathbb{P}([X_3 > k]) \ = \ q^k$.

Commentaire

- On utilise ici ce résultat sans donner la démonstration car elle n'est pas exigée par l'énoncé (ce qui arrive parfois).
- Il faut savoir démontrer cette propriété.
  Pour ce faire, démontrons tout d'abord :

$$\mathbb{P}([X > k]) \ = \ 1 - \mathbb{P}\Big(\overline{[X > k]}\Big) \ = \ 1 - \mathbb{P}([X \leqslant k])$$

  Par ailleurs : $[X \leqslant k] \ = \ \bigcup\limits_{i=1}^{k} \ [X = i]$. On en déduit :

$$\begin{array}{rcll} \mathbb{P}([X \leqslant k]) & = & \mathbb{P}\left(\bigcup\limits_{i=1}^{k} \ [X = i]\right) & \\ & = & \sum\limits_{i=1}^{k} \mathbb{P}\left([X = i]\right) & \textit{(par incompatibilité)} \\ & = & \sum\limits_{i=1}^{k} p\ q^{i-1} \ = \ p \sum\limits_{i=0}^{k-1} q^i \ = \ p\ \dfrac{1-q^k}{1-q} \ = \ 1 - q^k & \end{array}$$

  Enfin : $\mathbb{P}([X > k]) \ = \ 1 - \mathbb{P}([X \leqslant k]) \ = \ 1 - (1 - q^k) \ = \ q^k$.

- On en conclut :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}([X_3 > \Delta]) &= \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}([\Delta = k]) \times \mathbb{P}([X_3 > k]) \\
&= \mathbb{P}([\Delta = 0]) \times \mathbb{P}([X_3 > 0]) + \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}([\Delta = k]) \times \mathbb{P}([X_3 > k]) \\
&= \frac{p}{1+q} + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{2\,p\,q^k}{1+q} \times q^k \\
&= \frac{p}{1+q} + 2\,\frac{p}{1+q} \sum_{k=1}^{+\infty} q^{2k} \\
&= \frac{p}{1+q} + 2\,\frac{p}{1+q} \left(\sum_{k=0}^{+\infty} (q^2)^k - 1 \right) \\
&= \frac{p}{1+q} + 2\,\frac{p}{1+q} \left(\frac{1}{1-q^2} - 1 \right) && \textit{(en reconnaissant la somme d'une série géométrique de raison } q^2 \in\,]-1,1[\textit{)} \\
&= \frac{p}{1+q} \left(1 + 2\,\frac{\cancel{1} - (\cancel{1} - q^2)}{1-q^2} \right) \\
&= \frac{p}{1+q}\,\frac{1-q^2+2q^2}{1-q^2} \\
&= \frac{p}{1+q}\,\frac{1+q^2}{1-q^2} = \frac{\cancel{1-q}}{1+q}\,\frac{1+q^2}{(\cancel{1-q})(1+q)} = \frac{1+q^2}{(1+q)^2}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Ainsi : } \mathbb{P}\big(\,[X_3 > \Delta]\,\big) = \frac{1+q^2}{(1+q)^2}.}$$

□

Partie II

Dans cette partie, X est une variable aléatoire suivant la loi géométrique de paramètre p, $p \in\,]0,1[$ et Y est une variable aléatoire suivant la loi exponentielle de paramètre λ, $\lambda \in\,]0,+\infty[$. On note $q = 1-p$. On suppose que X et Y sont indépendantes, c'est à dire :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \forall t \in [0,+\infty[, \quad \mathbb{P}([X = k] \cap [Y \leqslant t]) = \mathbb{P}([X = k])\,\mathbb{P}([Y \leqslant t])$$

7. Rappeler une densité de Y ainsi que son espérance et sa variance.

Démonstration.

$$\boxed{\begin{array}{c} \text{Comme } Y \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda), \text{ alors une densité de } Y \text{ est : } f_Y : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \lambda\,\mathrm{e}^{-\lambda\,x} & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases} \\ \text{De plus : } \mathbb{E}(Y) = \dfrac{1}{\lambda} \quad \text{et} \quad \mathbb{V}(Y) = \dfrac{1}{\lambda^2}. \end{array}}$$

□

8. On définit la variable aléatoire $Z = \dfrac{Y}{X}$.

a) Montrer : $\forall t \in [0, +\infty[$, $\mathbb{P}([Z \geqslant t]) = \sum\limits_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}([X = k])\, \mathbb{P}([Y \geqslant kt])$.

Démonstration.
Soit $t \in [0, +\infty[$.

- Comme $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$, alors la famille $([X = k])_{k \in \mathbb{N}^*}$ forme un système complet d'événements.
- Ainsi, par formule des probabilités totales :

$$\begin{array}{rcll}
\mathbb{P}([Z \geqslant t]) & = & \sum\limits_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}([X = k] \cap [Z \geqslant t]) & \\
& = & \sum\limits_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}\left([X = k] \cap \left[\frac{Y}{X} \geqslant t\right]\right) & \\
& = & \sum\limits_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}\left([X = k] \cap \left[\frac{Y}{k} \geqslant t\right]\right) & \\
& = & \sum\limits_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}([X = k] \cap [Y \geqslant kt]) & \textit{(car } k > 0\textit{)} \\
& = & \sum\limits_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}([X = k])\ \mathbb{P}([Y \geqslant kt]) & \textit{(car } X \textit{ et } Y \textit{ sont indépendantes)}
\end{array}$$

$$\boxed{\forall t \in [0, +\infty[,\ \mathbb{P}([Z \leqslant t]) = \sum\limits_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}([X = k])\ \mathbb{P}([Y \geqslant kt])}$$

□

b) En déduire : $\forall t \in [0, +\infty[$, $\mathbb{P}([Z \geqslant t]) = \dfrac{p\,\mathrm{e}^{-\lambda t}}{1 - q\,\mathrm{e}^{-\lambda t}}$.

Démonstration.
Soit $t \in [0, +\infty[$. D'après la question précédente :

$$\begin{array}{rcll}
\mathbb{P}([Z \geqslant t]) & = & \sum\limits_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}([X = k])\ \mathbb{P}([Y \geqslant kt]) \ = \ \sum\limits_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}([X = k])\ \big(1 - \mathbb{P}([Y < kt])\big) & \\
& = & \sum\limits_{k=1}^{+\infty} q^{k-1}\, p\ \big(1 - F_Y(kt)\big) & \textit{(car } X \hookrightarrow \mathcal{G}(p) \textit{ et } Y \textit{ est à densité)} \\
& = & p \sum\limits_{k=1}^{+\infty} q^{k-1}\ \mathrm{e}^{-\lambda\, kt} & \textit{(car } Y \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda) \textit{ et } kt \geqslant 0\textit{)} \\
& = & p\,\mathrm{e}^{-\lambda t} \sum\limits_{k=1}^{+\infty} q^{k-1}\ \mathrm{e}^{-\lambda\,(k-1)t} & \\
& = & p\,\mathrm{e}^{-\lambda t} \sum\limits_{k=0}^{+\infty} q^{k}\ \mathrm{e}^{-\lambda\, kt} & \textit{(par décalage d'indice)} \\
& = & p\,\mathrm{e}^{-\lambda t} \sum\limits_{k=0}^{+\infty} \left(q\ \mathrm{e}^{-\lambda t}\right)^k & \\
& = & p\,\mathrm{e}^{-\lambda t}\ \dfrac{1}{1 - q\ \mathrm{e}^{-\lambda t}} &
\end{array}$$

La dernière égalité est obtenue en reconnaissant la somme de la série géométrique de raison $q\,\mathrm{e}^{-\lambda t} \in \,]-1, 1[$ (en effet : $q \in [0, 1[$ et $\mathrm{e}^{-\lambda t} \in [0, 1[$ car $t \geqslant 0$).

$$\boxed{\text{On en déduit : } \forall t \in [0, +\infty[,\ \mathbb{P}([Z \geqslant t]) = \frac{p\,\mathrm{e}^{-\lambda t}}{1 - q\,\mathrm{e}^{-\lambda t}}.}$$

Commentaire

On rappelle que, si $Y \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$, alors sa fonction de répartition F_Y est définie par :

$$F_Y : x \mapsto \left\{ \begin{array}{cl} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - \mathrm{e}^{-\lambda x} & \text{si } x \geqslant 0 \end{array} \right. .$$

□

c) Montrer que la variable aléatoire Z admet une densité et déterminer une densité de Z.

Démonstration.

- Tout d'abord :
  - × comme $Y \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$, alors : $Y(\Omega) = [0, +\infty[$,
  - × comme $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$, alors : $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$.

$$\boxed{\text{On en déduit : } Z(\Omega) \subset [0, +\infty[.}$$

- Déterminons la fonction de répartition F_Z de Z.
  Soit $x \in \mathbb{R}$. Deux cas se présentent.
  - × Si $x \in]-\infty, 0[$, alors $[Z \leqslant x] = \varnothing$ (car $Z(\Omega) \subset [0, +\infty[$). Donc :

$$F_Z(x) \ = \ \mathbb{P}([Z \leqslant x]) \ = \ \mathbb{P}(\varnothing) \ = \ 0$$

  - × Si $x \in [0, +\infty[$, alors :

$$F_Z(x) \ = \ \mathbb{P}([Z \leqslant x]) \ = \ 1 - \mathbb{P}([Z > x])$$

Or : $[Z \geqslant x] \ = \ [Z = x] \cup [Z > x]$.
Les événements $[Z = x]$ et $[Z > x]$ sont incompatibles. Donc :

$$\mathbb{P}([Z \geqslant x]) \ = \ \mathbb{P}([Z = x]) + \mathbb{P}([Z > x])$$

On en déduit :

$$F_Z(x) \ = \ 1 - \big(\mathbb{P}([Z \geqslant x]) - \mathbb{P}([Z = x])\big) \ = \ 1 - \frac{p\,\mathrm{e}^{-\lambda x}}{1 - q\,\mathrm{e}^{-\lambda x}} + \mathbb{P}([Z = x])$$

où la dernière égalité est obtenue avec la question ***8.b)***.
Déterminons alors $\mathbb{P}([Z = x])$.
Avec le même raisonnement qu'en question ***8.a)***, on obtient :

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{P}([Z = x]) & = & \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}([X = k])\ \mathbb{P}([Y = kt]) \\ & = & 0 \end{array}$$

(car, comme Y est une v.a.r. à densité : $\forall a \in \mathbb{R}$, $\mathbb{P}([Y = a]) = 0$)

On en déduit :

$$F_Z(x) \ = \ 1 - \frac{p\,\mathrm{e}^{-\lambda x}}{1 - q\,\mathrm{e}^{-\lambda x}} - 0$$

$$\boxed{\text{Finalement : } F_Z : x \mapsto \left\{ \begin{array}{cl} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - \dfrac{p\,\mathrm{e}^{-\lambda x}}{1 - q\,\mathrm{e}^{-\lambda x}} & \text{si } x \geqslant 0 \end{array} \right. .}$$

- Montrons que Z est une v.a.r. à densité.
  - × La fonction F_Z est continue :
    - sur $]-\infty, 0[$ en tant que fonction constante,
    - sur $]0, +\infty[$ en tant que quotient de fonctions continues sur $]0, +\infty[$ dont le dénominateur ne s'annule pas sur cet intervalle.
    - en 0. En effet, d'une part : $\lim\limits_{x \to 0^-} F_Z(x) = 0$.

      D'autre part :

$$\lim_{x \to 0^+} F_Z(x) \; = \; F_Z(0) \; = \; 1 - \frac{p\,\mathrm{e}^0}{1 - q\,\mathrm{e}^0} \; = \; 1 - \frac{p}{1-q} \; = \; 1 - \frac{p}{p} \; = \; 1 - 1 \; = \; 0$$

      On en déduit : $\lim\limits_{x \to 0^-} F_Z(x) \; = \; F_Z(0) \; = \; \lim\limits_{x \to 0^+} F_Z(x)$.

$$\boxed{\text{La fonction } F \text{ est continue sur } \mathbb{R}.}$$

  - × La fonction F_Z est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$ avec des arguments similaires à ceux de la continuité de F_Z sur ces intervalles.

$$\boxed{\text{La fonction } F \text{ est de classe } \mathcal{C}^1 \text{ sur } \mathbb{R} \text{ sauf éventuellement en } 0.}$$

$$\boxed{\text{On en déduit que la v.a.r. } Z \text{ est une v.a.r. à densité.}}$$

- Pour déterminer une densité f_Z de Z, on dérive la fonction F_Z sur les intervalles ouverts $]-\infty, 0[$ et $]0, +\infty[$.

  Soit $x \in \mathbb{R}$. Deux cas se présentent.
  - × Si $x \in\,]-\infty, 0[$:

$$f_Z(x) \; = \; F_Z'(x) \; = \; 0$$

  - × Si $x \in\,]0, +\infty[$:

$$\begin{aligned} f_Z(x) \; &= \; F_Z'(x) \; = \; -\frac{p\,(-\lambda\,\mathrm{e}^{-\lambda\,x})\big(1 - q\,\mathrm{e}^{-\lambda\,x}\big) - p\,\mathrm{e}^{-\lambda\,x}\big(-q(-\lambda\,\mathrm{e}^{-\lambda\,x})\big)}{\big(1 - q\,\mathrm{e}^{-\lambda\,x}\big)^2} \\ &= \; \frac{\lambda\,p\,\mathrm{e}^{-\lambda\,x}}{\big(1 - q\,\mathrm{e}^{-\lambda\,x}\big)^2}\,\Big(1 - \cancel{q\,\mathrm{e}^{-\lambda\,x}} + \cancel{q\,\mathrm{e}^{-\lambda\,x}}\Big) \\ &= \; \frac{\lambda\,p\,\mathrm{e}^{-\lambda\,x}}{\big(1 - q\,\mathrm{e}^{-\lambda\,x}\big)^2} \end{aligned}$$

  - × Enfin, on **choisit** : $f_Z(0) = 0$.

$$\boxed{\text{Une densité } f_Z \text{ de } Z \text{ est donc : } f_Z : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant 0 \\ \dfrac{\lambda\,p\,\mathrm{e}^{-\lambda\,x}}{\big(1 - q\,\mathrm{e}^{-\lambda\,x}\big)^2} & \text{si } x > 0 \end{cases}.}$$

Commentaire

- Lorsqu'on cherche à déterminer la fonction de répartition F_Z, on ne sait pas encore que la v.a.r. Z est une v.a.r. à densité. Ainsi, on ne peut affirmer sans démonstration :

$$\mathbb{P}([Z > x]) \ = \ \mathbb{P}([Z \geqslant x])$$

  C'est pourquoi on démontre $\mathbb{P}([Z = x]) = 0$.
- En reprenant la démonstration de la question ***8.b)***, on peut remarquer :

$$\forall t \in [0, +\infty[,\ \mathbb{P}([Z > t]) = \mathbb{P}([Z \geqslant t])$$

  Cela provient du fait que : $\mathbb{P}([Y < kt]) = \mathbb{P}([Y \leqslant kt])$ (car Y est une v.a.r. à densité). Il aurait certainement été plus judicieux que l'énoncé demande le calcul de $\mathbb{P}([Z > t])$ en ***8.b)*** : cela aurait évité d'avoir à déterminer : $\mathbb{P}([Z = t])$.

$\square$

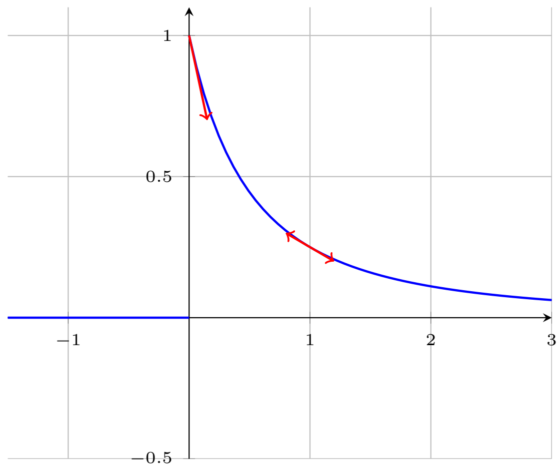
Exercice 3 (EML 2005)

On considère l'application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, définie par :

$$f : t \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } t \leqslant 0 \\ \dfrac{1}{(1+t)^2} & \text{si } t > 0 \end{cases}$$

1. Tracer l'allure de la courbe représentative de f.

Démonstration.



□

2. Montrer que f est une densité de probabilité.

Démonstration.

- La fonction f est continue :
  - × sur $]-\infty, 0[$ en tant que fonction constante,
  - × sur $]0, +\infty[$ en tant qu'inverse d'une fonction continue sur $]0, +\infty[$ qui ne s'annule pas sur cet intervalle.

La fonction f est donc continue sur $\mathbb{R}$ sauf éventuellement en 0.

Commentaire

Une densité de probabilité n'est pas nécessairement continue sur $\mathbb{R}$ tout entier. Elle doit seulement être continue sur $\mathbb{R}$ **sauf éventuellement en un nombre fini de points**. On ne se préoccupe donc pas ici de la continuité de f en 0.

- Soit $t \in \mathbb{R}$. Deux cas se présentent :
  - × si $t \in]-\infty, 0]$, alors : $f(t) = 0 \geqslant 0$.
  - × si $t \in]0, +\infty[$, alors : $f(t) = \dfrac{1}{(1+t)^2}$.

Ainsi : $\forall t \in \mathbb{R}, \ f(t) \geqslant 0$.

- Montrons que l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\ dt$ converge et vaut 1.
  - × Tout d'abord, comme la fonction f est nulle en dehors de $]0,+\infty[$:
$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\ dt \ = \ \int_{0}^{+\infty} f(t)\ dt$$
  - × La fonction f est continue par morceaux sur $[0,+\infty[$.
  - × Soit $A \in [0,+\infty[$.
$$\begin{aligned}\int_0^A f(t)\ dt \ &= \ \int_0^A \frac{1}{(1+t)^2}\ dt \ = \ \left[-\frac{1}{1+t} \right]_0^A \\ &= \ -\left[\frac{1}{1+t} \right]_0^A \ = \ -\left(\frac{1}{1+A} - \frac{1}{1+0} \right) \\ &= \ 1 - \frac{1}{1+A} \ \underset{A\to+\infty}{\longrightarrow} \ 1\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{L'intégrale } \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\ dt \text{ converge et } \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\ dt = 1.}$$

$$\boxed{\text{On en déduit que la fonction } f \text{ est une densité de probabilité.}}$$

□

3. Montrer que, pour tout réel x, l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{x} f(t)\ dt$ converge, et calculer cette intégrale.
On distinguera les cas $x \leqslant 0$ et $x > 0$.

Démonstration.
Soit $x \in \mathbb{R}$. Deux cas se présentent.

- Si $x \leqslant 0$, alors, comme la fonction f est nulle en dehors de $]0,+\infty[$:
$$\int_{-\infty}^{x} f(t)\ dt \ = \ 0$$
$$\boxed{\text{Si } x \leqslant 0, \text{ l'intégrale } \int_{-\infty}^{x} f(t)\ dt \text{ converge et vaut } 0.}$$
- Si $x > 0$.
  - × Comme f est nulle en dehors de $]0,+\infty[$:
$$\int_{-\infty}^{x} f(t)\ dt \ = \ \int_{0}^{x} f(t)\ dt$$
  - × La fonction f est continue par morceaux sur **le segment** $[0,x]$, donc l'intégrale $\displaystyle\int_0^x f(t)\ dt$ est bien définie.
  - × Enfin :
$$\int_0^x f(t)\ dt \ = \ \int_0^x \frac{1}{(1+t)^2}\ dt \ = \ \left[-\frac{1}{1+t} \right]_0^x \ = \ 1 - \frac{1}{1+x}$$
$$\boxed{\text{Si } x > 0, \text{ l'intégrale } \int_{-\infty}^{x} f(t)\ dt \text{ converge et : } \int_{-\infty}^{x} f(t)\ dt = 1 - \frac{1}{1+x}.}$$

Commentaire

- On a démontré dans la question précédente que l'intégrale impropre $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\ dt$ converge.
  Cela démontre que, pour tout $c \in \mathbb{R}$, les intégrales impropres $\displaystyle\int_{-\infty}^{c} f(t)\ dt$ et $\displaystyle\int_{c}^{+\infty} f(t)\ dt$ convergent. On pouvait utiliser cet argument pour démontrer la convergence souhaitée.
- On remarque que les deux expressions de $\displaystyle\int_{-\infty}^{x} f(t)\ dt$ (pour $x \leqslant 0$ et $x > 0$) coïncident en 0.
  Autrement dit, la fonction $x \mapsto \displaystyle\int_{-\infty}^{x} f(t)\ dt$ est continue en 0.
  Cela n'est pas surprenant car, en notant X une v.a.r. de densité f :
  × tout d'abord : $\displaystyle\int_{-\infty}^{x} f(t)\ dt = \mathbb{P}([X \leqslant x]) = F_X(x)$,
  × de plus, comme X est une v.a.r. à densité, sa fonction de répartition F_X est continue sur $\mathbb{R}$. Elle est donc en particulier continue en 0.

□

4. Déterminer un réel positif α tel que $\displaystyle\int_{0}^{\alpha} f(t)\ dt = \frac{1}{2}$.

Démonstration.
Soit $\alpha \in [0, +\infty[$. D'après la question précédente :

$$\int_{0}^{\alpha} f(t)\ dt = \frac{1}{2} \quad\Leftrightarrow\quad 1 - \frac{1}{1+\alpha} = \frac{1}{2} \quad\Leftrightarrow\quad \frac{1}{1+\alpha} = \frac{1}{2} \quad\Leftrightarrow\quad 1+\alpha = 2 \quad\Leftrightarrow\quad \alpha = 1$$

$$\boxed{\text{Ainsi, le réel } \alpha = 1 \geqslant 0 \text{ vérifie : } \int_{0}^{\alpha} f(t)\ dt = \frac{1}{2}.}$$

Commentaire

L'énoncé demande ici de déterminer (au moins) un réel α positif tel que $\displaystyle\int_{0}^{\alpha} f(t)\ dt = \frac{1}{2}$.
En raisonnant par équivalence, on a en fait démontré que 1 était **le seul** réel positif tel que $\displaystyle\int_{0}^{\alpha} f(t)\ dt = \frac{1}{2}$.

□

5. Soit $x \in [0, +\infty[$ fixé.
On considère la fonction φ_x définie sur $[0, +\infty[$ par : $\forall u \in [0, +\infty[$, $\varphi_x(u) = \displaystyle\int_{x-u}^{x+u} f(t)\ dt$.

a) Calculer $\varphi_x(0)$ et $\displaystyle\lim_{u \to +\infty} \varphi_x(u)$.

Démonstration.

- Tout d'abord : $\varphi_x(0) = \displaystyle\int_{x}^{x} f(t)\ dt = 0$.

$$\boxed{\varphi_x(0) = 0}$$

- Par relation de Chasles :

$$\forall u \in [0, +\infty[,\ \varphi_x(u) = \int_{x-u}^{x} f(t)\ dt + \int_{x}^{x+u} f(t)\ dt$$

Or, d'après la question *2.*, l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\ dt$ converge.

Donc les intégrales $\displaystyle\int_{-\infty}^{x} f(t)\ dt$ et $\displaystyle\int_{x}^{+\infty} f(t)\ dt$ convergent.

On en déduit que les limites $\displaystyle\lim_{u\to+\infty} \int_{x-u}^{x} f(t)\ dt$ et $\displaystyle\lim_{u\to+\infty} \int_{x}^{x+u} f(t)\ dt$ existent.

$$\boxed{\text{Donc la fonction } \varphi_x \text{ admet une limite en } +\infty.}$$

- De plus :

$$\begin{aligned}\lim_{u\to+\infty} \varphi_x(u) &= \lim_{u\to+\infty} \int_{x-u}^{x} f(t)\ dt + \lim_{u\to+\infty} \int_{x}^{x+u} f(t)\ dt \\ &= \int_{-\infty}^{x} f(t)\ dt + \int_{x}^{+\infty} f(t)\ dt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\ dt \ = \ 1\end{aligned}$$

$$\boxed{\lim_{u\to+\infty} \varphi_x(u) = 1}$$

□

b) Montrer, pour tout $(u,v) \in [0,+\infty[^2$:

$$u < v \quad \Rightarrow \quad \varphi_x(v) - \varphi_x(u) \geqslant \int_{x+u}^{x+v} f(t)\ dt$$

En déduire que φ_x est strictement croissante sur $[0,+\infty[$.

Démonstration.
Soit $(u,v) \in [0,+\infty[^2$.

- Supposons $u < v$.

$$\begin{aligned}&\varphi_x(v) - \varphi_x(u) \\ &= \int_{x-v}^{x+v} f(t)\ dt - \int_{x-u}^{x+u} f(t)\ dt \\ &= \left(\int_{x-v}^{x-u} f(t)\ dt + \cancel{\int_{x-u}^{x+u} f(t)\ dt} + \int_{x+u}^{x+v} f(t)\ dt\right) - \cancel{\int_{x-u}^{x+u} f(t)\ dt} \quad \textit{(par relation de Chasles)} \\ &= \int_{x+u}^{x+v} f(t)\ dt + \int_{x-v}^{x-u} f(t)\ dt\end{aligned}$$

- Or, d'après la question *2.* : $\forall t \in \mathbb{R},\ f(t) \geqslant 0$.
- Donc, par croissance de l'intégrale, les bornes étant dans l'ordre croissant ($x - v \leqslant x - u$ car $u < v$) :

$$\int_{x-v}^{x-u} f(t)\ dt \ \geqslant \ 0$$

- On en déduit :

$$\underbrace{\int_{x+u}^{x+v} f(t)\ dt + \int_{x-v}^{x-u} f(t)\ dt}_{=\ \varphi_x(v) - \varphi_x(u)} \ \geqslant \ \int_{x+u}^{x+v} f(t)\ dt$$

$$\boxed{\text{On obtient bien : } u < v \quad \Rightarrow \quad \varphi_x(v) - \varphi_x(u) \geqslant \int_{x+u}^{x+v} f(t)\ dt.}$$

Commentaire

- Soit $I \subset \mathbb{R}$ un segment. Soit $(a, b, c) \in I^3$ et f une fonction continue sur I. On rappelle la relation de Chasles :
$$\int_a^c f(t)\ dt \ = \ \int_a^b f(t)\ dt + \int_b^c f(t)\ dt$$
Notons en particulier que les bornes a, b et c n'ont pas besoin d'être dans l'ordre croissant pour que cette relation soit vraie.
- Cependant, l'ordre des bornes est crucial lors de l'utilisation de la croissance de l'intégrale.

- Soit $(u, v) \in [0, +\infty[^2$ tel que $u < v$.
Alors, d'après ce qui précéde :
$$\varphi_x(v) - \varphi_x(u) \geqslant \int_{x+u}^{x+v} f(t)\ dt$$
On cherche alors le signe de $\displaystyle\int_{x+u}^{x+v} f(t)\ dt$.
$$\begin{aligned}\int_{x+u}^{x+v} f(t)\ dt &= \int_{-\infty}^{x+v} f(t)\ dt - \int_{-\infty}^{x+u} f(t)\ dt \\ &= \left(\cancel{1} - \frac{1}{1+(x+v)}\right) - \left(\cancel{1} - \frac{1}{1+(x+u)}\right) && \textit{(d'après } \textbf{3.}\textit{, car } (x+u, x+v) \in [0,+\infty[^2\textit{)} \\ &= \frac{1}{1+x+u} - \frac{1}{1+x+v}\end{aligned}$$
Or :
$$\begin{aligned}\frac{1}{1+x+u} - \frac{1}{1+x+v} > 0 \ &\Leftrightarrow \ \frac{1}{1+x+u} > \frac{1}{1+x+v} \\ &\Leftrightarrow \ 1+x+u < 1+x+v && \textit{(par stricte décroissance de } x \mapsto \frac{1}{x} \textit{ sur }]0,+\infty[\textit{)} \\ &\Leftrightarrow \ u < v\end{aligned}$$
La dernière inégalité est vérifiée. Donc par équivalence, la première aussi. Ainsi :
$$\underbrace{\frac{1}{1+x+u} - \frac{1}{1+x+v}}_{= \int_{x+u}^{x+v} f(t)\ dt} \ > \ 0$$
On en déduit :
$$\varphi_x(v) - \varphi_x(u) \ \geqslant \ \int_{x+u}^{x+v} f(t)\ dt \ > \ 0$$
On a ainsi démontré :
$$u < v \ \Rightarrow \ \varphi_x(u) < \varphi_x(v)$$

$\boxed{\text{On en conclut que la fonction } \varphi_x \text{ est strictement croissante sur } [0, +\infty[.}$

Commentaire

On ne connaît pas, à ce stade du sujet, la régularité de la fonction φ_x. En particulier, on ne sait pas si elle est dérivable sur $[0,+\infty[$. Pour montrer qu'elle est strictement croissante sur $[0,+\infty[$, on utilise donc la définition de stricte croissance :

$$\forall (u,v) \in [0,+\infty[^2, \quad u < v \ \Rightarrow\ \varphi_x(u) < \varphi_x(v)$$

□

c) On admet que φ_x est continue sur $[0,+\infty[$. Montrer que l'équation $\varphi_x(u) = \dfrac{1}{2}$, d'inconnue u, admet une solution et une seule dans $[0,+\infty[$.

Démonstration.
La fonction φ_x est :
× continue sur $[0,+\infty[$,
× strictement croissante sur $[0,+\infty[$ (d'après la question précédente)
Ainsi, φ_x réalise une bijection de $[0,+\infty[$ sur $\varphi_x([0,+\infty[)$ avec, d'après la question ***5.a)*** :

$$\varphi_x([0,+\infty[) \ = \ \left[\varphi_x(0), \lim_{u\to+\infty} \varphi_x(u)\right[\ = \ [0,1[$$

Or $\dfrac{1}{2} \in [0,1[$.

$$\boxed{\text{L'équation } \varphi_x(u) = \dfrac{1}{2} \text{ admet donc une unique solution sur } [0,+\infty[.}$$

□

On note $U : [0,+\infty[\ \to \mathbb{R}$ l'application qui, à tout réel $x \in [0,+\infty[$, associe $U(x)$ l'unique solution de l'équation $\varphi_x(u) = \dfrac{1}{2}$.
Ainsi, pour tout $x \in [0,+\infty[$, on a : $\displaystyle\int_{x-U(x)}^{x+U(x)} f(t)\ dt = \frac{1}{2}$.

6. a) Vérifier, pour tout $x \in \left[0, \frac{1}{2}\right[$: $U(x) = 1 - x$.

Démonstration.
Soit $x \in \left[0, \frac{1}{2}\right[$.

- Vérifions : $\displaystyle\int_{x-(1-x)}^{x+(1-x)} f(t)\ dt = \frac{1}{2}$.

$$\int_{x-(1-x)}^{x+(1-x)} f(t)\ dt \ = \ \int_{2x-1}^{1} f(t)\ dt$$

  Or : $2x - 1 < 0 \ \Leftrightarrow\ 2x < 1 \ \Leftrightarrow\ x < \dfrac{1}{2}$.
  La dernière inégalité est vraie. Donc, par équivalence, la première aussi.
  Or la fonction f est nulle en dehors de $[0,+\infty[$, donc :

$$\int_{2x-1}^{1} f(t)\ dt \ = \ \int_{0}^{1} f(t)\ dt \ = \ \frac{1}{2}$$

  où la dernière égalité est obtenue grâce à la question ***4.***
  On en déduit que $1 - x$ est solution de l'équation $\varphi_x(u) = \dfrac{1}{2}$ (sur $[0,+\infty[$).
- Or, d'après la question précédente, cette équation admet une unique solution $U(x)$ sur $[0,+\infty[$.

$$\boxed{\text{Ainsi : } \forall x \in \left[0, \tfrac{1}{2}\right[,\ U(x) = 1 - x.}$$

Commentaire

La formulation d'une question est souvent déterminante pour orienter sa résolution. Ici, le terme « vérifier » suggère que la résolution doit être rapide. On vérifie donc simplement que la solution $U(x)$ proposée par l'énoncé convient. $\square$

b) Pour tout $x \in \left[\frac{1}{2}, +\infty\right[$, montrer : $\varphi_x(x) \geqslant \dfrac{1}{2}$; puis : $x - U(x) \geqslant 0$. Et en déduire :

$$U(x) = \sqrt{4 + (x+1)^2} - 2$$

Démonstration.

- Soit $x \in \left[\frac{1}{2}, +\infty\right[$. D'après la question ***3.*** :

$$\varphi_x(x) \; = \; \int_{x-x}^{x+x} f(t)\ dt \; = \; \int_0^{2x} f(t)\ dt \; = \; 1 - \frac{1}{1+2x}$$

  Donc :

$$\begin{array}{rcll} \varphi_x(x) \geqslant \dfrac{1}{2} & \Leftrightarrow & 1 - \dfrac{1}{1+2x} \geqslant \dfrac{1}{2} & \\[2ex] & \Leftrightarrow & \dfrac{1}{2} \geqslant \dfrac{1}{1+2x} & \\[2ex] & \Leftrightarrow & 2 \leqslant 1+2x & \textit{(par stricte décroissance de } x \mapsto \dfrac{1}{x} \textit{ sur }]0,+\infty[\textit{)} \\[2ex] & \Leftrightarrow & 1 \leqslant 2x & \\[1ex] & \Leftrightarrow & \dfrac{1}{2} \leqslant x & \end{array}$$

  La dernière inégalité est vraie. Donc, par équivalence, la première aussi.

$$\boxed{\text{Ainsi : } \forall x \in \left[\tfrac{1}{2}, +\infty\right[,\ \varphi_x(x) \geqslant \frac{1}{2}.}$$

- Soit $x \in \left[\frac{1}{2}, +\infty\right[$.
  On vient de démontrer : $\varphi_x(x) \ \geqslant \ \dfrac{1}{2} \ = \ \varphi_x\big(U(x)\big)$.
  De plus, d'après le théorème de la bijection, la fonction $\varphi_x^{-1} : [0, 1[\to [0, +\infty[$ est strictement croissante sur $[0, 1[$. En appliquant φ_x^{-1} de part et d'autre de l'inégalité, on obtient :

$$\begin{array}{ccc} \varphi_x^{-1}\big(\varphi_x(x)\big) & \geqslant & \varphi_x^{-1}\Big(\varphi_x\big(U(x)\big)\Big) \\ \shortparallel & & \shortparallel \\ x & & U(x) \end{array}$$

$$\boxed{\text{Finalement : } \forall x \in \left[\tfrac{1}{2}, +\infty\right[,\ x - U(x) \geqslant 0.}$$

- Soit $x \in \left[\frac{1}{2}, +\infty\right[$. Par définition de $U(x)$:

$$\int_{x-U(x)}^{x+U(x)} f(t)\ dt \; = \; \frac{1}{2}$$

Or :

$$\begin{aligned}
& \int_{x-U(x)}^{x+U(x)} f(t)\ dt \\
= \ & \int_{-\infty}^{x+U(x)} f(t)\ dt - \int_{-\infty}^{x-U(x)} f(t)\ dt \\
= \ & \left(\cancel{1} - \frac{1}{1+(x+U(x))}\right) - \left(\cancel{1} - \frac{1}{1+(x-U(x))}\right) \quad \textit{(car } (x+U(x), x-U(x)) \in [0,+\infty[^2 \textit{)} \\
= \ & \frac{1}{1+x-U(x)} - \frac{1}{1+x+U(x)}
\end{aligned}$$

D'autre part :

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{1+x-U(x)} - \frac{1}{1+x+U(x)} = \frac{1}{2} \\
\Leftrightarrow \ & \frac{(\cancel{1+x}+U(x)) - (\cancel{1+x}-U(x))}{(1+x-U(x))(1+x+U(x))} = \frac{1}{2} \\
\Leftrightarrow \ & \frac{2\,U(x)}{(1+x-U(x))(1+x+U(x))} = \frac{1}{2} \\
\Leftrightarrow \ & \frac{(1+x-U(x))(1+x+U(x))}{2\,U(x)} = 2 \\
\Leftrightarrow \ & \big((1+x)-U(x)\big)\big((1+x)+U(x)\big) = 4\,U(x) \\
\Leftrightarrow \ & (1+x)^2 - \big(U(x)\big)^2 = 4\,U(x) \\
\Leftrightarrow \ & \big(U(x)\big)^2 + 4\,U(x) - (1+x)^2 = 0
\end{aligned}$$

- Notons : $P(z) = z^2 + 4\,z - (1+x)^2$. Le réel $U(x)$ est donc une racine de ce polynôme.
  - × Calculons le discriminant du polynôme P :

$$\Delta \ = \ 4^2 - 4 \times 1 \times \big(-(1+x)^2\big) \ = \ 16 + 4\,(1+x)^2 \ > \ 0$$

  - × On en déduit que P admet 2 racines distinctes notées z_+ et z_- :

$$\begin{aligned}
z_+ \ &= \ \frac{-4+\sqrt{\Delta}}{2} = \frac{-4+\sqrt{16+4(1+x)^2}}{2} \\
&= \ \frac{-4+\sqrt{4(4+(1+x)^2)}}{2} = \frac{-4+2\sqrt{4+(1+x)^2}}{2} \\
&= \ -2+\sqrt{4+(1+x)^2}
\end{aligned}$$

De même : $z_- = \dfrac{-4-\sqrt{\Delta}}{2} = -2-\sqrt{4+(1+x)^2}$.

- On sait de plus : $U(x) \geqslant 0$. On cherche donc à déterminer si $z_+ \geqslant 0$ ou $z_- \geqslant 0$.
  - × On a déjà : $z_- < 0$.
  - × Ensuite :

$$\begin{array}{rcll} z_+ \geqslant 0 & \Leftrightarrow & -2 + \sqrt{4 + (1+x)^2} \geqslant 0 & \\ & \Leftrightarrow & \sqrt{4 + (1+x)^2} \geqslant 2 & \\ & \Leftrightarrow & 4 + (1+x)^2 \geqslant 4 & \textit{(par stricte croissance de la fonction } x \mapsto x^2 \textit{ sur } [0, +\infty[\textit{)} \\ & \Leftrightarrow & (1+x)^2 \geqslant 0 & \end{array}$$

La dernière inégalité est vérifiée. Donc, par équivalence, la première aussi. Ainsi : $z_+ \geqslant 0$.

$$\boxed{\text{Finalement : } \forall x \in \left[\tfrac{1}{2}, +\infty\right[,\ U(x) = z_+ = -2 + \sqrt{4 + (1+x)^2}.}$$

□

7. a) Montrer que l'application U est continue sur $[0, +\infty[$.

Démonstration.

- D'après les questions ***6.a)*** et ***6.b)*** :

$$U : x \mapsto \begin{cases} 1 - x & \text{si } x < \dfrac{1}{2} \\ -2 + \sqrt{4 + (1+x)^2} & \text{si } x \geqslant \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

- La fonction U est continue sur $\left[0, \frac{1}{2}\right[$ en tant que fonction polynomiale.
- La fonction $\sqrt{4 + (1+x)^2}$ est continue sur $\left]\frac{1}{2}, +\infty\right[$, car elle est la composée $h_2 \circ h_1$ de :
  - × $h_1 : x \mapsto 4 + (1+x)^2$ qui est :
    - continue sur $\left]\frac{1}{2}, +\infty\right[$,
    - telle que : $h_1\left(\left]\frac{1}{2}, +\infty\right[\right) \subset [0, +\infty[$.
  - × $h_2 : x \mapsto \sqrt{x}$ qui est continue sur $[0, +\infty[$.

  D'où U est continue sur $\left]\frac{1}{2}, +\infty\right[$ en tant que somme de fonctions continues sur $\left]\frac{1}{2}, +\infty\right[$.
- Montrons que la fonction U est continue en $\dfrac{1}{2}$.
  - × D'une part : $\lim\limits_{x \to \frac{1}{2}^-} U(x) = 1 - \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2}$.
  - × D'autre part :

$$\begin{array}{rcl} \lim\limits_{x \to \frac{1}{2}^+} U(x) & = & U\left(\dfrac{1}{2}\right) = \sqrt{4 + \left(1 + \dfrac{1}{2}\right)^2} - 2 \\ & = & \sqrt{4 + \dfrac{9}{4}} - 2 = \sqrt{\dfrac{25}{4}} - 2 = \dfrac{5}{2} - 2 \\ & = & \dfrac{1}{2} \end{array}$$

  Finalement : $\lim\limits_{x \to \frac{1}{2}^-} U(x) = U(\frac{1}{2}) = \lim\limits_{x \to \frac{1}{2}^+} U(x)$.

  Donc la fonction U est continue en $\dfrac{1}{2}$.

$$\boxed{\text{On en déduit que la fonction } U \text{ est continue sur } [0, +\infty[.}$$

□

b) Étudier la dérivabilité de U sur $[0, +\infty[$.

Démonstration.

- La fonction U est dérivable sur $\left[0, \frac{1}{2}\right[$ et sur $\left]\frac{1}{2}, +\infty\right[$ avec des arguments similairse à ceux de la continuité sur ces intervalles.

$$\boxed{\text{La fonction } U \text{ est dérivable sur } \left[0, \tfrac{1}{2}\right[\text{ et sur } \left]\tfrac{1}{2}, +\infty\right[.}$$

- D'une part, pour tout $x \in \left[0, \frac{1}{2}\right[$:

$$\frac{U(x) - U\left(\frac{1}{2}\right)}{x - \frac{1}{2}} = \frac{1 - x - \frac{1}{2}}{x - \frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{2} - x}{x - \frac{1}{2}} = -\frac{x - \frac{1}{2}}{x - \frac{1}{2}} = -1$$

D'où : $\displaystyle\lim_{x \to \frac{1}{2}^-} \frac{U(x) - U\left(\frac{1}{2}\right)}{x - \frac{1}{2}} = -1$.

- D'autre part, pour tout $x \in \left]\frac{1}{2}, +\infty\right[$:

$$\begin{aligned}
\frac{U(x) - U\left(\frac{1}{2}\right)}{x - \frac{1}{2}} &= \frac{\sqrt{4 + (x+1)^2} - 2 - \frac{1}{2}}{x - \frac{1}{2}} \\
&= \frac{2\sqrt{4 + (x+1)^2} - 5}{2x - 1} \\
&= \frac{4\left(4 + (x+1)^2\right) - 25}{(2x-1)(2\sqrt{4 + (x+1)^2} + 5)} && \textit{(en multipliant par la quantité conjuguée)} \\
&= \frac{4\,(x+1)^2 - 9}{(2x-1)(2\sqrt{4 + (x+1)^2} + 5} \\
&= \frac{(2x+5)\cancel{(2x-1)}}{\cancel{(2x-1)}\left(2\sqrt{4 + (x+1)^2} + 5\right)} \\
&= \frac{2x+5}{2\sqrt{4 + (x+1)^2} + 5}
\end{aligned}$$

D'où :

$$\lim_{x \to \frac{1}{2}^+} \frac{U(x) - U\left(\frac{1}{2}\right)}{x - \frac{1}{2}} = \frac{2\,\frac{1}{2} + 5}{2\sqrt{4 + \left(1 + \frac{1}{2}\right)^2} + 5} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$$

On constate :

$$\lim_{x \to \frac{1}{2}^-} \frac{U(x) - U\left(\frac{1}{2}\right)}{x - \frac{1}{2}} \neq \lim_{x \to \frac{1}{2}^+} \frac{U(x) - U\left(\frac{1}{2}\right)}{x - \frac{1}{2}}$$

$$\boxed{\text{On en déduit que } U \text{ n'est pas dérivable en } \frac{1}{2}.}$$

□

c) Montrer que la droite d'équation $y = x - 1$ est asymptote à la courbe représentative de U.

Démonstration.
Soit $x \in \left]\frac{1}{2}, +\infty\right[$.

$$\begin{array}{rcl} U(x) - (x-1) & = & \sqrt{4+(x+1)^2} - 2 - (x-1) \\ & = & \sqrt{4+(x+1)^2} - (x-1) \\ & = & \dfrac{4 + \cancel{(x+1)^2} - \cancel{(x+1)^2}}{\sqrt{4+(x+1)^2} + (x+1)} \\ & = & \dfrac{4}{\sqrt{4+(x+1)^2} + x + 1} \\ & \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} & 0 \end{array}$$

$\boxed{\text{La droite d'équation } y = x - 1 \text{ est asymptote à la courbe représentative de } U.}$

Commentaire

- La suppression de cette question est un regrettable oubli. En effet, la notion d'asymptote n'est plus au programme d'ECE depuis quelques années.
- La définition d'asymptote oblique est la suivante :
  on dit que la droite d'équation $y = ax + b$ est asymptote (oblique) à la courbe représentative d'une fonction f en $+\infty$ si :
  $$\lim_{x \to +\infty} f(x) - (ax+b) \ = \ 0$$
  C'est exactement cette définition qui nous permet de conclure ici.
- Graphiquement, une asymptote oblique à une courbe $\mathcal{C}$ en $+\infty$ est une droite (d) telle que la distance entre cette droite (d) et la courbe $\mathcal{C}$ tend vers 0 en $+\infty$.

□

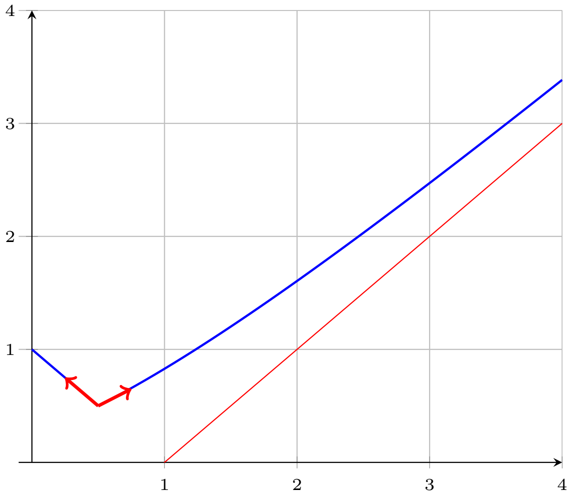
d) Tracer l'allure de la courbe représentative de U.

Démonstration.

- Commençons par étudier la fonction U.
  × D'après la question ***7.b)***, la fonction U est dérivable sur $\left[0, \frac{1}{2}\right[$ et $\left]\frac{1}{2}, +\infty\right[$.
  × Soit $x \in \left[0, \frac{1}{2}\right[$. Alors : $U'(x) \ = \ -1 \ < \ 0$.
  On en déduit que la fonction U est strictement décroissante sur $\left[0, \frac{1}{2}\right[$.
  × Soit $x \in \left]\frac{1}{2}, +\infty\right[$.
  $$U'(x) \ = \ \frac{\cancel{2}\,(x+1)}{\cancel{2}\,\sqrt{4+(1+x)^2}} \ = \ \frac{x+1}{\sqrt{4+(1+x)^2}} \ > \ 0$$
  On en déduit que la fonction U est strictement croissante sur $\left]\frac{1}{2}, +\infty\right[$.
  × On résume ces informations dans le tableau de variations suivant :

x	0	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
Signe de $U'(x)$	$-$	$\Vert$	$+$
Variations de U	$1 \searrow$	$\frac{1}{2}$	$\nearrow +\infty$

- On trace alors la courbe représentative de U.



□

8. On considère la suite réelle $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $\left\{\begin{array}{l} a_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ a_{n+1} = U(a_n) \end{array}\right.$

a) Montrer : $\forall n \in \mathbb{N},\ a_n \geqslant \dfrac{1}{2}$.

Démonstration.

Démontrons par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N},\ \mathcal{P}(n)$ où $\mathcal{P}(n) : \left\{\begin{array}{l} a_n \text{ est bien défini} \\ a_n \geqslant \dfrac{1}{2} \end{array}\right.$

▸ **Initialisation** :
D'après l'énoncé : $a_0 = 1 \geqslant \dfrac{1}{2}$.
D'où $\mathcal{P}(0)$.

▸ **Hérédité** : soit $n \in \mathbb{N}$.
Supposons $\mathcal{P}(n)$ et démontrons $\mathcal{P}(n+1)$ $\left(i.e. \left\{\begin{array}{l} a_{n+1} \text{ est bien défini} \\ a_{n+1} \geqslant \dfrac{1}{2} \end{array}\right. \right)$

Par hypothèse de récurrence, le terme a_n est bien défini et : $a_n \geqslant \dfrac{1}{2}$.

× En particulier : $a_n \geqslant 0$. Or la fonction U est définie sur $[0, +\infty[$. Donc $U(a_n)$ est bien défini, c'est-à-dire a_{n+1} est bien défini.

× D'après la question *7.d)* : $\forall x \in [0, +\infty[,\ U(x) \geqslant \dfrac{1}{2}$.
Or $a_n \in [0, +\infty[$. Donc :

$$\underset{a_{n+1}}{\overset{\parallel}{U(a_n)}} \geqslant \frac{1}{2}$$

D'où $\mathcal{P}(n+1)$.

$$\boxed{\text{Par principe de récurrence, la suite } (a_n) \text{ est bien définie et : } \forall n \in \mathbb{N},\ a_n \geqslant \frac{1}{2}.}$$

□

b) Montrer que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$a_{n+1} - a_n \ = \ U(a_n) - a_n$$

Or :

× d'après la question précédente : $a_n \geqslant \dfrac{1}{2}$,

× d'après la question ***6.b)*** : $\forall x \in \left[\frac{1}{2}, +\infty\right[$, $U(x) - x \leqslant 0$.

On en déduit : $U(a_n) - a_n \leqslant 0$, c'est-à-dire $a_{n+1} - a_n \leqslant 0$.

$$\boxed{\text{Ainsi, la suite } (a_n) \text{ est décroissante.}}$$

□

c) En déduire que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et montrer que sa limite est égale à $\dfrac{1}{2}$.

Démonstration.

- La suite (a_n) est :
  × décroissante (d'après la question ***8.b)***,
  × minorée par $\dfrac{1}{2}$ (d'après la question ***8.a)***)

$$\boxed{\text{On en déduit que la suite } (a_n) \text{ converge vers un réel } \ell \text{ vérifiant } \ell \geqslant \frac{1}{2}.}$$

- Par définition de (a_n) : $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_{n+1} = U(a_n)$.
  Par continuité de la fonction U sur $\left[\frac{1}{2}, +\infty\right[$, on en déduit alors, par passage à la limite dans l'égalité précédente :
  $$\ell \ = \ U(\ell)$$
- Résolvons donc l'équation $U(x) = x$ sur $\left[\frac{1}{2}, +\infty\right[$.
  Soit $x \in \left[\frac{1}{2}, +\infty\right[$.

$$\begin{array}{rcll}
U(x) = x & \Leftrightarrow & \sqrt{4 + (1+x)^2} - 2 = x & \\[2mm]
& \Leftrightarrow & \sqrt{4 + (1+x)^2} = x + 2 & \\[2mm]
& \Leftrightarrow & 4 + (1+x)^2 = (x+2)^2 & \textit{(car } \sqrt{4+(1+x)^2} \geqslant 0 \\
& & & \textit{et } x + 2 \geqslant 0\textit{)} \\[2mm]
& \Leftrightarrow & 4 = (x+2)^2 - (1+x)^2 & \\[2mm]
& \Leftrightarrow & 4 = \big((\cancel{x} + 2) - (\cancel{x} + 1)\big)\,\big((x+2) + (x+1)\big) & \\[2mm]
& \Leftrightarrow & 4 = 2x + 3 & \\[2mm]
& \Leftrightarrow & 1 = 2x & \\[2mm]
& \Leftrightarrow & \dfrac{1}{2} = x &
\end{array}$$

  La seule solution de l'équation $U(x) = x$ sur $\left[\frac{1}{2}, +\infty\right[$ est donc $\dfrac{1}{2}$.

  On en déduit : $\ell = \dfrac{1}{2}$.

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} a_n = \frac{1}{2}}$$

□

d) Écrire un programme en **Scilab** qui calcule et affiche le plus petit entier $n \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\left| a_n - \frac{1}{2} \right| \leqslant 10^{-6}$$

Démonstration.

```
1  n = 0
2  a = 1
3  while abs(a - 1/2) > 10 ^ (-6)
4    a = sqrt(4 + (1 + a) ^ 2) - 2
5    n = n + 1
6  end
7  disp(n)
```

Détaillons l'obtention de ce programme.

- **Début du programme** : initialisation des variables.
La variable `a` est créée pour contenir successivement les valeurs de a_0, a_1, ..., a_n pour chaque valeur de `n`. On initialise donc la variable `n` à 0 et la variable `a` à $a_0 = 1$.

```
1  n = 0
2  a = 1
```

- **Structure itérative**.
Les lignes 3 à 6 suivantes consistent à déterminer le premier entier `n` tel que $\left| a_{\mathtt{n}} - \frac{1}{2} \right| \leqslant 10^{-6}$.
Autrement dit, il s'agit de calculer les valeurs successives de a_n tant que $\left| a_n - \frac{1}{2} \right| > 10^{-6}$.
On met donc en place une structure itérative (boucle while :

```
3  while abs(a - 1/2) > 10 ^ (-6)
```

À chaque tour de boucle, si la variable `a` contient la valeur a_k, on souhaite :

× mettre à jour la variable `a` en lui affectant la valeur de a_{k+1}. Or, comme $a_k \geqslant \frac{1}{2}$:

$$a_{k+1} \; = \; U(a_k) \; = \; \sqrt{4 + (1 + a_k)^2} - 2$$

La mise à jour se fait donc avec la commande suivante :

```
4    a = sqrt(4 + (1 + a) ^ 2) - 2
```

× mettre à jour la variable `n` pour signaler qu'on a calculé le terme suivant dans la suite (a_n) :

```
5    n = n + 1
```

- **Fin du programme**.
À la fin de la boucle `while`, on est assuré que : $\left| a_n - \frac{1}{2} \right| \leqslant 10^{-6}$ (on itère tant que ce n'est pas le cas). Il reste donc à afficher la valeur de `n` obtenue :

```
7  disp(n)
```

Commentaire

- On a démontré en question ***8.a)*** : $\forall n \in \mathbb{N},\ a_n \geqslant \frac{1}{2}$, c'est-à-dire $a_n - \frac{1}{2} \geqslant 0$. Donc :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \left| a_n - \frac{1}{2} \right| = a_n - \frac{1}{2}$$

  On aurait donc pu remplacer la ligne 3 du programme précédent par :

```
3  while a - 1/2 > 10 ^ (-6)
```

- La valeur de la limite de la suite (a_n) étant connue, la recherche de l'entier N tel que $\left| a_N - \frac{1}{2} \right| \leqslant 10^{-6}$ donne une idée de la vitesse de convergence de (a_n) vers $\frac{1}{2}$.
- Au-delà de l'intérêt pratique, c'est surtout la manipulation de **Scilab** qui est testée : savoir écrire une boucle `while`, savoir écrire les termes d'une suite du type $u_{n+1} = f(u_n)$.