DS5 (version B)

Exercice

On note $E = \mathbb{R}_3[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à 3. Soit f l'application définie sur E qui associe à tout polynôme $P \in E$, le polynôme $f(P)$ défini par :

$$\big(f(P)\big)(X) = -3\,X\,P(X) + X^2\,P'(X), \text{ où } P' \text{ est la dérivée du polynôme } P$$

1. ***a)*** Rappeler la dimension de E.

b) Montrer que f est un endomorphisme de E.

c) Déterminer la matrice M de f dans 1a base canonique de E.

d) La matrice M est-elle inversible ? Est-elle diagonalisable ? Calculer pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, M^n.

e) Préciser le noyau $\mathrm{Ker}(f)$ de f ainsi qu'une base de $\mathrm{Ker}(f)$.

f) Déterminer 1'image $\mathrm{Im}(f)$ de f.

2. On note id_E et 0_E respectivement, l'endomorphisme identité et l'endomorphisme nul de E, et pour tout endomorphisme v de E, on pose $v^0 = \mathrm{id}_E$ et pour tout k de $\mathbb{N}^*$, $v^k = v \circ v^{k-1}$.
Soit u et g deux endomorphismes de E tels que : $u^4 = 0_E$, $u^3 \neq 0_E$ et $g = \mathrm{id}_E + u + u^2 + u^3$.

a) Soit P un polynôme de E tel que $P \notin \mathrm{Ker}\left(u^3\right)$. Montrer que la famille $\left(P, u(P), u^2(P), u^3(P)\right)$ est une base de E.

b) Montrer que g est un automorphisme de E. Déterminer l'automorphisme réciproque g^{-1} en fonction de u.

c) Établir l'égalité : $\mathrm{Ker}(u) = \mathrm{Ker}\left(g - \mathrm{id}_E\right)$.

d) Montrer que 1 est la seule valeur propre de g.

Problème

Dans tout le problème, n désigne un entier naturel non nul.
On considère une urne blanche contenant n boules blanches numérotées de 1 à n et une urne noire contenant n boules noires numérotées de 1 à n, dans lesquelles on effectue des suites de tirages. À chaque tirage, on tire simultanément et au hasard une boule de chaque urne. On obtient ainsi à chaque tirage, deux boules, une blanche et une noire.
On dira qu'on a obtenu une paire lors d'un tirage, si la boule blanche et la boule noire tirées portent le même numéro.

Partie I. Tirages avec remise

1. Dans cette question, on effectue les tirages avec remise jusqu'à ce que l'on obtienne pour la première fois une paire.

a) Préciser l'espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ qui modélise cette expérience.

b) On note Y la variable aléatoire égale au nombre de tirages (de deux boules) effectués.
Déterminer la loi de Y ; donner son espérance et sa variance.

2. On rappelle que `grand(1,1,'uin',1,n)` renvoie un nombre au hasard entre 1 et `n`.
Écrire en **Scilab** une fonction qui simule la v.a.r. Y dont l'en-tête est `function Y = Exp1(n)`.

3. Dans cette question, on suppose que $n = 2$. On effectue des tirages avec remise jusqu'à ce que l'on obtienne pour la première fois la boule blanche numérotée 1. On note U la variable aléatoire égale au nombre de tirages effectués, et Z la variable aléatoire égale au nombre de paires obtenues à l'issue de ces tirages.

a) Calculer, pour tout k de $\mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}([U = k])$.
En déduire la probabilité que l'on n'obtienne jamais la boule blanche numéro 1.
Reconnaître la loi de U.

b) Déterminer la loi conjointe du couple (U, Z).

c) Montrer, pour tout k de $\mathbb{N}^*$: $\mathbb{P}([Z = k]) = \sum\limits_{\ell=k}^{+\infty} \binom{\ell}{k} \left(\frac{1}{4}\right)^{\ell}$.

d) Calculer $\mathbb{P}([Z = 1])$.
Montrer : $\mathbb{P}([Z = 0]) = \frac{1}{3}$.

e) En utilisant la formule dite du triangle de Pascal et le résultat de la question ***3.c)*** pour $k = i+1$, justifier, pour tout i de $\mathbb{N}^*$, l'égalité :

$$\mathbb{P}([Z = i+1]) = \frac{1}{4}\,\mathbb{P}([Z = i+1]) + \frac{1}{4}\,\mathbb{P}([Z = i])$$

f) En déduire la loi de Z.

Partie II. Tirages sans remise.

Dans cette partie, les tirages se font sans remise dans les deux urnes, jusqu'à ce que les urnes soient vides. On note X_n le nombre de paires obtenues à l'issue des n tirages.

A. Étude de cas particuliers

4. Déterminer la loi de X_1.

5. On suppose dans cette question que $n = 2$.
Combien y a-t-il de résultats possibles ? Quelles sont les valeurs prises par X_2 ?
On précisera pour chaque valeur prise par X_2, l'ensemble des événements élémentaires permettant de l'obtenir.
En déduire la loi de X_2.

B. Étude du cas général

On se place dans le cas où n est un entier naturel non nul.

6. ***a)*** Décrire l'univers Ω des événements observables.

b) Déterminer le nombre total de suites de tirages possibles.

c) Déterminer l'ensemble des valeurs prises par X_n.

Pour tout entier naturel k, on note $a(n,k)$ le cardinal de $\{\omega \in \Omega \mid X_n(\omega) = k\}$.
Par convention, $a(0,0) = 1$.

7. ***a)*** Préciser la valeur de $\sum\limits_{j=0}^{n} a(n,j)$.

b) Déterminer $a(n,n)$ et $a(n,n-1)$.

8. ***a)*** Justifier, pour tout entier j tel que $0 \leqslant j \leqslant n$, l'égalité suivante :

$$\frac{a(n,j)}{n!} = \binom{n}{j} \frac{a(n-j,0)}{(n-j)!}$$

En déduire la relation :

$$\sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} \frac{a(j,0)}{j!} = n!$$

Donner l'expression de $a(n,0)$ en fonction des nombres $\big(a(j,0)\big)_{0 \leqslant j \leqslant n-1}$.

b) Soit k un entier compris entre 1 et n et i un entier compris entre 0 et $k-1$.
Justifier l'égalité : $\binom{j}{i}\binom{k}{j} = \binom{k}{i}\binom{k-i}{j-i}$, puis montrer :

$$\sum_{j=i}^{k} (-1)^j \binom{j}{i}\binom{k}{j} = 0$$

En déduire la valeur de la somme :

$$\sum_{j=i}^{k-1} (-1)^j \binom{j}{i}\binom{k}{j}$$

9. ***a)*** Soit k un entier tel que $1 \leqslant k \leqslant n$.
On suppose que, pour tout entier j compris entre 0 et $k-1$, on a les k égalités :

$$a(j,0) \ = \ j! \sum_{i=0}^{j} \binom{j}{i} \ (-1)^{j-i} \ i!$$

Montrer l'égalité :

$$a(k,0) \ = \ k! \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} \ (-1)^{k-i} \ i!$$

(On pourra utiliser l'expression, pour $n = k$, de $a(n,0)$ trouvée dans la question ***8.a)***)

b) En déduire, pour tout entier naturel non nul k, la valeur de $a(k,0)$.

c) Déterminer l'ensemble des valeurs prises par X_n et exprimer la loi de X_n à l'aide d'une somme.

Partie III. Tirages mixtes

Dans cette partie, les tirages se font sans remise dans l'urne blanche et avec remise dans l'urne noire, jusqu'à ce que l'urne blanche soit vide. On note X_n, le nombre de paires obtenues à l'issue des n tirages.

10. ***a)*** Montrer que X_n suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.

b) Donner, sans démonstration, l'espérance et la variance de X_n.

On désire modéliser cette expérience. On suppose que n est une constante fixée.

11. Donner la commande permettant de stocker dans une variable un vecteur ligne de longueur n, contenant les entiers de 1 à n.

12. ***a)*** Soit `V` un vecteur ligne de longueur `p` et `i` un entier compris entre 1 et `p`.
Que renvoie la fonction suivante ?

```
function W = suppression(V, i)
  p = length(V)
  W = V([1:(i-1), (i+1):p])
endfunction
```

b) On rappelle que l'appel `grand(1,1,'uin',a,b)` renvoie un nombre au hasard parmi les entiers de `a` à `b`. Compléter la fonction suivante pour qu'elle simule le tirage sans remise et au hasard des n boules numérotées. La variable `UrneB` est une matrice ligne contenant les numéros des boules pouvant être obtenues à chaque tirage. Elle doit être mise à jour à chacun d'entre eux. La variable `ListeB` est une matrice ligne contenant dans l'ordre les numéros des boules obtenues lors de la succession des n tirages.

```
function ListeB = TirageSR(n)
  ListeB = ...
  UrneB = ...
  for j = 1:n
    m = length(UrneB)
    i = ...
    ListeB(j) = UrneB(i)
    UrneB = Suppression(UrneB,i)
  end
endfunction
```

13. Écrire un programme complet permettant de simuler l'expérience de cette **Partie III** lorsque $n = 20$, puis de donner la valeur de X_n (on pourra utiliser les fonctions précédentes).