DS5 (version B)

Exercice (HEC 2013 Exo)

On note $E = \mathbb{R}_3[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à 3. Soit f l'application définie sur E qui associe à tout polynôme $P \in E$, le polynôme $f(P)$ défini par :

$$\big(f(P)\big)(X) = -3\,X\,P(X) + X^2\,P'(X), \text{ où } P' \text{ est la dérivée du polynôme } P$$

1. a) Rappeler la dimension de E.

- **1 pt :** $\dim(E) = \dim\big(\mathbb{R}_3[X]\big) = 4$

b) Montrer que f est un endomorphisme de E.

- **1 pt : caractère morphisme**
- **2 pts : caractère endo ($f(P)$ est un polynôme + de degré 3 au max)**

c) Déterminer la matrice M de f dans 1a base canonique de E.

- **2 pts :** $f(P_0)$, $f(P_1)$, $f(P_2)$, $f(P_3)$.
- **1 pt : conclusion** $M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

d) La matrice M est-elle inversible ? Est-elle diagonalisable ? Calculer pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, M^n.

- **1 pt :** $\mathrm{Sp}(M) = \{0\}$ **(M triangulaire supérieure)**
- **1 pt :** M **n'est pas inversible car** $0 \in \mathrm{Sp}(M)$
- **2 pts :** M **n'est pas diagonalisable en procédant par l'absurde (si elle l'était, on aurait** $M = 0$**)**
- **1 pt :** $M^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ **et** $M^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -6 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
- **1pt :** $\forall n \geqslant 4$, $M^n = 0_{\mathscr{M}_4(\mathbb{R})}$

e) Préciser le noyau $\mathrm{Ker}(f)$ de f ainsi qu'une base de $\mathrm{Ker}(f)$.

- **3 pts :** $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Vect}\,(P_3)$
  (1 pt pour l'écriture du système, 1 pt pour la résolution, 1 pt pour ne pas confondre $\mathbb{R}_3[X]$ **et** $\mathbb{R}^4$**)**
- **1 pt :** (P_3) **est une base de** $\mathrm{Ker}(f)$.

f) Déterminer l'image $\mathrm{Im}(f)$ de f.

- **1 pt :** $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}\,(-3P_1, -2P_2, -P_3, 0_E)$ **(calculs déjà faits pour déterminer** M**)**
- **1 pt :** $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}\,(P_1, P_2, P_3)$

2. On note id_E et 0_E respectivement, l'endomorphisme identité et l'endomorphisme nul de E, et pour tout endomorphisme v de E, on pose $v^0 = \mathrm{id}_E$ et pour tout k de $\mathbb{N}^*$, $v^k = v \circ v^{k-1}$.
Soit u et g deux endomorphismes de E tels que : $u^4 = 0_E$, $u^3 \neq 0_E$ et $g = \mathrm{id}_E + u + u^2 + u^3$.

a) Soit P un polynôme de E tel que $P \notin \mathrm{Ker}\left(u^3\right)$.
Montrer que la famille $\left(P, u(P), u^2(P), u^3(P)\right)$ est une base de E.

- **1 pt : écriture correcte de la définition de liberté**
- **1 pt : appliquer u^3 de part et d'autre et en conclure $\lambda_3 = 0$**
- **1 pt : de même, en appliquant u^2 dans la nouvelle égalité ...**
- **1 pt : base car de cardinal maximal**

b) Montrer que g est un automorphisme de E.
Déterminer l'automorphisme réciproque g^{-1} en fonction de u.

- **3 pts : soit par pivot on inverse M, soit on remarque** $(\mathrm{id}-u)\circ(\mathrm{id}+u+u^2+u^3) = \mathrm{id}-u^4$

On met seulement un point pour la détermination de G et 2 points pour la détermination de G^{-1}.

c) Établir l'égalité : $\mathrm{Ker}(u) = \mathrm{Ker}\,(g - \mathrm{id}_E)$.

- **1 pt :** $\mathrm{Ker}(u) \subset \mathrm{Ker}(g - \mathrm{id})$
- **1 pt : pour un théorème du rang**
- **1 pt :** $\dim(\mathrm{Im}(u)) = 3$ **donc** $\dim(\mathrm{Ker}(u)) = 1$
- **1 pt :** $\dim(\mathrm{Im}(g - \mathrm{id})) = 3$ **donc** $\dim(\mathrm{Ker}(g - \mathrm{id})) = 1$

d) Montrer que 1 est la seule valeur propre de g.

- **3 pts : soit on passe par** $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(g)$ **qui est triangulaire inférieure et qui ne contient que** 1 **dans la diagonale, soit on suppose** $\lambda \in \mathrm{Sp}(g)$ **puis on démontre** $\frac{\lambda-1}{\lambda} \in \mathrm{Sp}(u)$ **en appliquant** g^{-1} **et on conclut** $\lambda = 1$ **car** $\mathrm{Sp}(u) \subset \{0\}$ **(**u **est nilpotente)**

Problème (HEC 2005)

Partie I. Tirages avec remise

1. Dans cette question, on effectue les tirages avec remise jusqu'à ce que l'on obtienne pour la première fois une paire.

a) Préciser l'espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ qui modélise cette expérience.

- **1 pt :** $\Omega = \big([\![1,n]\!] \times [\![1,n]\!]\big)^{\mathbb{N}^*}$
- **1 pt :** $\mathscr{A} = \mathcal{P}(\Omega)$
- **2 pts : 1 pt pour toute début d'idée, tentative de définition raisonnable de $\mathbb{P}$ (le point n'est pas attribué pour « probabilité uniforme ») et 1 pt si c'est juste.**
- **1 pt : pour restriction de $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ sur $(\Omega', \mathscr{A}', \mathbb{P}')$**

On attribue 2 pts sur les 5 en cas d'espace probabilisé correspondant à un tirage et non pas à l'expérience ($\Omega = [\![1,n]\!] \times [\![1,n]\!]$, $\mathscr{A} = \mathcal{P}(\Omega)$ et $\mathbb{P}$ la probabilité uniforme).

b) On note Y la variable aléatoire égale au nombre de tirages (de deux boules) effectués. Déterminer la loi de Y ; donner son espérance et sa variance.

- **1 pt : description correcte de l'expérience (succession infinie d'épreuves de Bernoulli indépendantes et de même paramètre de succès p)**
- **1 pt : description de Y et conclustion $Y \hookrightarrow \mathcal{G}\left(\frac{1}{n}\right)$**
- **2 pts : $\mathbb{E}(Y)$ et $\mathbb{V}(Y)$**

2. On rappelle que `grand(1,1,'uin',1,n)` renvoie un nombre au hasard entre 1 et `n`.
Écrire en **Scilab** une fonction qui simule la v.a.r. Y dont l'en-tête est `function Y = Exp1(n)`.

- **1 pt : utilisation d'un `while`**
- **1 pt : utilisation `grand(1,1,'uin',1,n)`**
- **1 pt : utilisation d'un compteur**
- **1 pt : bonus si le programme fait ce qu'il doit**

Au maximum 2 points pour un programme qui ne répond pas à la question ou pour l'utilisation de `grand(1,1,'geom',1/n)`.

3. Dans cette question, on suppose que $n = 2$. On effectue des tirages avec remise jusqu'à ce que l'on obtienne pour la première fois la boule blanche numérotée 1. On note U la variable aléatoire égale au nombre de tirages effectués, et Z la variable aléatoire égale au nombre de paires obtenues à l'issue de ces tirages.

a) Calculer, pour tout k de $\mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}([U = k])$. En déduire la probabilité que l'on n'obtienne jamais la boule blanche numéro 1. Reconnaître la loi de U.

- **1 pt :** $[U = k] \ = \ B_1^{(2,-)} \ \cap \ \dots \ \cap \ B_{k-1}^{(2,-)} \ \cap \ B_k^{(1,-)}$
- **1 pt : FPC écrite correctement**
- **1 pt :** $\mathbb{P}\big(\,[U = k]\,\big) = \left(\dfrac{1}{2}\right)^k$
- **1 pt : conclusion** $U \hookrightarrow \mathcal{G}\left(\dfrac{1}{2}\right)$
- **1 pt :** $\overline{C} = \bigcup\limits_{k=1}^{+\infty} [U = k]$
- **2 pts : calcul (incompatibilité + somme d'une série géométrique)**

On attribue 2 points sur 4 pour la rédaction « succession infinie d'épreuves indépendantes ... ».

b) Déterminer la loi du couple (U, Z).

- 1 pt : $Z(\Omega) = \mathbb{N}$

- 1 pt : si $i < j$ **alors** $\mathbb{P}\big(\,[U = i] \,\cap\, [Z = j]\,\big) = 0$

- 3 pts : si $i \geqslant j$**,** $\mathbb{P}\big(\,[U = i] \cap [Z = j]\,\big) \;=\; \dfrac{1}{4^i}\,\dbinom{i}{j}$

(2 pts : Card $\big(\,[U = i] \cap [Z = j]\,\big) = \binom{i}{j}$**, et 1 pt pour conclusion)**

On attribue 2 points sur 4 pour la rédaction « succession d'épreuves indépendantes . . . ».

c) Montrer, pour tout k de $\mathbb{N}^*$: $\mathbb{P}([Z = k]) = \sum\limits_{\ell=k}^{+\infty} \dbinom{\ell}{k} \left(\dfrac{1}{4}\right)^{\ell}$.

- 1 pt : FPT $\mathbb{P}\big(\,[Z = k]\,\big) = \sum\limits_{\ell=1}^{+\infty} \mathbb{P}\big(\,[U = \ell] \cap [Z = k]\,\big)$

- 1 pt : réduction indices somme $\sum\limits_{\ell=k}^{+\infty} \dbinom{\ell}{k} \left(\dfrac{1}{4}\right)^{\ell}$

d) Calculer $\mathbb{P}([Z = 1])$.
Montrer : $\mathbb{P}([Z = 0]) = \dfrac{1}{3}$.

- 1 pt : $\mathbb{P}\big(\,[Z = 1]\,\big) = \sum\limits_{\ell=1}^{+\infty} \dbinom{\ell}{1} \left(\dfrac{1}{4}\right)^{\ell} = \dfrac{1}{4}\;\dfrac{1}{(1 - \frac{1}{4})^2}$

- 1 pt : résultat $\mathbb{P}\big(\,[Z = 1]\,\big) = \dfrac{4}{9}$

- 1 pt : $\mathbb{P}\big(\,[Z = 0]\,\big) = \sum\limits_{\ell=1}^{+\infty} \mathbb{P}([U = \ell] \,\cap\, [Z = 0])$

- 1 pt : $\mathbb{P}\big(\,[Z = 0]\,\big) = \sum\limits_{\ell=1}^{+\infty} \dbinom{\ell}{0} \left(\dfrac{1}{4}\right)^{\ell} = \dfrac{1}{3}$

e) En utilisant la formule dite du triangle de Pascal et le résultat de la question ***3.c)*** pour $k = i+1$, justifier, pour tout i de $\mathbb{N}^*$, l'égalité :

$$\mathbb{P}([Z = i + 1]) = \frac{1}{4}\,\mathbb{P}([Z = i + 1]) + \frac{1}{4}\,\mathbb{P}([Z = i])$$

- 1 pt : $\dfrac{1}{4}\,\mathbb{P}([Z = i + 1]) + \dfrac{1}{4}\,\mathbb{P}([Z = i]) = \dfrac{1}{4} \sum\limits_{\ell=i+1}^{+\infty} \left(\dbinom{\ell}{i+1} + \dbinom{\ell}{i}\right) \left(\dfrac{1}{4}\right)^{\ell} \;+\; \dfrac{1}{4}\left(\dfrac{1}{4}\right)^{i}$

- 1 pt : formule du triangle de Pascal
$= \dfrac{1}{4} \sum\limits_{\ell=i+1}^{+\infty} \dbinom{\ell+1}{i+1} \left(\dfrac{1}{4}\right)^{\ell} \;+\; \dfrac{1}{4}\left(\dfrac{1}{4}\right)^{i}$

- 1 pt : reste du calcul
$= \sum\limits_{\ell=i+1}^{+\infty} \dbinom{\ell}{i+1} \left(\dfrac{1}{4}\right)^{\ell} = \mathbb{P}([Z = i + 1])$

f) En déduire la loi de Z.

- 1 pt : $\forall i \in \mathbb{N}^*$**,** $\mathbb{P}([Z = i + 1]) = \dfrac{1}{3}\,\mathbb{P}([Z = i])$

- 1 pt : $\forall i \in \mathbb{N}^*$**,** $\mathbb{P}([Z = i + 1]) \;=\; \left(\dfrac{1}{3}\right)^{i}\,\dfrac{4}{9}$

Partie II. Tirages sans remise

Dans cette partie, les tirages se font sans remise dans les deux urnes, jusqu'à ce que les urnes soient vides. On note X_n le nombre de paires obtenues à l'issue des n tirages.

A. Étude de cas particuliers

4. Déterminer la loi de X_1.

- **1 pt :** $X_1 = 1$

5. On suppose dans cette question que $n = 2$.
Combien y a-t-il de résultats possibles ? Quelles sont les valeurs prises par X_2 ?
On précisera pour chaque valeur prise par X_2, l'ensemble des événements élémentaires permettant de l'obtenir. En déduire la loi de X_2.

- **1 pt : il y a donc** $2 \times 2 \times 1 \times 1 = 4$ **résultats possibles**
- **1 pt :** $X_2(\omega) = 2$ **si et seulement si** $\omega = \big((1,1),(2,2)\big)$ **ou** $\omega = \big((2,2),(1,1)\big)$
- **1 pt :** $X_2(\omega) = 0$ **si et seulement si** $\omega = \big((1,2),(2,1)\big)$ **ou** $\omega = \big((2,1),(1,2)\big)$
- **1 pt : on en conclut :** $X_2(\Omega) = \{0,2\}$, $\mathbb{P}\big(\,[X_2 = 0]\,\big) = \dfrac{1}{2} = \mathbb{P}\big(\,[X_2 = 2]\,\big)$

B. Étude du cas général

On se place dans le cas où n est un entier naturel non nul.

6. a) Décrire l'univers Ω des événements observables.

- **2 pts :** Ω **est l'ensemble des** n**-arrangements de l'ensemble** $[\![1,n]\!] \times [\![1,n]\!]$ **(ou formulation équivalente)**

b) Déterminer le nombre total de suites de tirages possibles.

- **2 pts :** $\text{Card}(\Omega) = \big(n!\big)^2$

c) Déterminer l'ensemble des valeurs prises par X_n.

Pour tout entier naturel k, on note $a(n,k)$ le cardinal de $\{\omega \in \Omega \mid X_n(\omega) = k\}$.

- **1 pt :** $X_1(\Omega) = \{1\}$ **et** $X_2(\Omega) = \{0,2\}$**.**
- **2 pts : si** $n \geqslant 3$**,** $X_n(\Omega) = [\![0,n-2]\!] \ \cup \ \{n\}$
  On attribue 1 pt pour la réponse $X_n(\Omega) = [\![0,n]\!]$**.**

Par convention, $a(0,0) = 1$.

7. a) Préciser la valeur de $\sum\limits_{j=0}^{n} a(n,j)$.

- **1 pt :** $\sum\limits_{j=0}^{n} \mathbb{P}\big(\,[X_n = j]\,\big) \ = \ 1$ **car** $\big(\,[X_n = j]\,\big)_{j \in [\![0,n]\!]}$ **est un sce**
- **1 pt :** $\mathbb{P}\big(\,[X_n = j]\,\big) \ = \ \dfrac{\text{Card}\big([X_n = j]\big)}{\text{Card}\big(\Omega\big)}$
- **1 pt : résultat** $\sum\limits_{j=0}^{n} a(n,j) = \big(n!\big)^2$

b) Déterminer $a(n,n)$ et $a(n,n-1)$.

- **2 pts :** $a(n,n) = \text{Card}\big(\,[X_n = n]\,\big) = n!$
- **1 pt :** $a(n,n-1) = \text{Card}\big(\,[X_n = n-1]\,\big) = 0$

8. a) Justifier, pour tout entier j tel que $0 \leqslant j \leqslant n$, l'égalité suivante : $\dfrac{a(n,j)}{n!} = \dbinom{n}{j} \dfrac{a(n-j,0)}{(n-j)!}$

En déduire la relation : $\displaystyle\sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} \frac{a(j,0)}{j!} = n!$

Donner l'expression de $a(n,0)$ en fonction des nombres $\big(a(j,0)\big)_{0 \leqslant j \leqslant n-1}$.

- **1 pt : il y a donc** $\binom{j}{n} \times \binom{j}{n} \times j! \times a(n-j,0)$ **tels** n**-tirages**
- **1 pt :** $\dfrac{a(n,j)}{n!} = \dbinom{n}{j} \dfrac{a(n-j,0)}{(n-j)!}$
- **1 pt :** $\displaystyle\sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} \frac{a(j,0)}{j!} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{n-k} \frac{a(n-k,0)}{(n-k)!}$
- **1 pt : reste du calcul** $\displaystyle\sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} \frac{a(j,0)}{j!} = n!$
- **1 pt :** $a(n,0) = n! \left(n! - \displaystyle\sum_{j=0}^{n-1} \binom{n}{j} \frac{a(j,0)}{j!} \right)$

b) Soit k un entier compris entre 1 et n et i un entier compris entre 0 et $k-1$.

Justifier l'égalité : $\dbinom{j}{i} \dbinom{k}{j} = \dbinom{k}{i} \dbinom{k-i}{j-i}$, puis montrer : $\displaystyle\sum_{j=i}^{k} (-1)^j \binom{j}{i} \binom{k}{j} = 0$

En déduire la valeur de la somme : $\displaystyle\sum_{j=i}^{k-1} (-1)^j \binom{j}{i} \binom{k}{j}$

- **1 pt :** $\dbinom{k}{i} \dbinom{k-i}{j-i} = \dfrac{k!}{i!\,\cancel{(k-i)!}} \; \dfrac{\cancel{(k-i)!}}{(j-i)!\,\big((k-\cancel{i})-(j-\cancel{i})\big)!} = \dfrac{j!}{i!\,(j-i)!} \; \dfrac{k!}{j!\,(k-j)!}$
- **2 pts :** $\displaystyle\sum_{j=i}^{k} (-1)^j \binom{j}{i} \binom{k}{j} = \binom{k}{i} \sum_{j=0}^{k-i} (-1)^{j+i} \binom{k-i}{j} = (-1)^i \binom{k}{i} \sum_{j=0}^{k-i} \binom{k-i}{j} 1^{(k-i)-j} \times (-1)^j = 0$

  (1 pt pour décalage d'indice, 1 pt pour binôme de Newton)
- **1 pt :** $\displaystyle\sum_{j=i}^{k-1} (-1)^j \binom{j}{i} \binom{k}{j} = -(-1)^k \binom{k}{i} = (-1)^{k+1} \binom{k}{i}$

9. a) Soit k un entier tel que $1 \leqslant k \leqslant n$.

On suppose que, pour tout entier j compris entre 0 et $k-1$, on a les k égalités :

$$a(j,0) = j! \sum_{i=0}^{j} \binom{j}{i} (-1)^{j-i}\, i!$$

Montrer l'égalité : $a(k,0) = k! \displaystyle\sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} (-1)^{k-i}\, i!$

(on pourra utiliser l'expression, pour $n = k$, de $a(n,0)$ trouvée dans la question ***8.a)***)

- **1 pt :** $a(k,0) = k! \left(k! - \displaystyle\sum_{j=0}^{k-1} \left(\sum_{i=0}^{j} \binom{k}{j} \binom{j}{i} (-1)^{j-i}\, i! \right) \right)$
- **1 pt :** $= k! \left(k! - \displaystyle\sum_{0 \leqslant i \leqslant j \leqslant k-1} \binom{k}{j} \binom{j}{i} (-1)^{j-i}\, i! \right) = k! \left(k! - \sum_{i=0}^{k-1} \left(\sum_{j=i}^{k-1} \binom{k}{j} \binom{j}{i} (-1)^{j-i}\, i! \right) \right)$
- **1 pt : utilisation** $\displaystyle\sum_{i=0}^{k-1} \left(\frac{i!}{(-1)^i} \sum_{j=i}^{k-1} \binom{k}{j} \binom{j}{i} (-1)^j \right) = \sum_{i=0}^{k-1} \frac{i!}{(-1)^i} (-1)^{k+1} \binom{k}{i}$
- **1 pt : calcul et conclusion** $a(k,0) = k! \left(\displaystyle\sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} (-1)^{k-i}\, i! \right)$

b) En déduire, pour tout entier naturel non nul k, la valeur de $a(k,0)$.

- **1 pt : initialisation**
- **2 pts : hérédité**

c) Déterminer l'ensemble des valeurs prises par X_n et exprimer la loi de X_n à l'aide d'une somme.

- **1 pt :** $\mathbb{P}(\,[X_n = j]\,) = \dfrac{\text{Card}\,(\,[X_n = j]\,)}{\text{Card}(\Omega)} = \dfrac{1}{(n!)^2}\; a(n,j)$
- **1 pt :** $= \dfrac{\cancel{(n-j)!}}{j!\,\cancel{(n-j)!}} \left(\displaystyle\sum_{i=0}^{n-j} \dfrac{(-1)^{(n-j)-i}}{((n-j)-i)!} \right)$
- **1 pt :** $= \dfrac{1}{j!} \left(\displaystyle\sum_{i=0}^{n-j} \dfrac{(-1)^k}{k!} \right)$ **sommation dans l'autre sens**

Partie III. Tirages mixtes

Dans cette partie, les tirages se font sans remise dans l'urne blanche et avec remise dans l'urne noire, jusqu'à ce que l'urne blanche soit vide. On note X_n, le nombre de paires obtenues à l'issue des n tirages.

10. *a)* Montrer que X_n suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.

- **1 pt :** $\text{Card}(\Omega) = n!\, n^n$
- **1 pt :** $X_n(\Omega) \subset [\![0,n]\!]$
- **1 pt :** $\text{Card}\,(\,[X_n = j]\,) = \dbinom{n}{j} \dbinom{n}{j}\, j!\,(n-j)!\,(n-1)^{n-j}$
- **1 pt :** $\mathbb{P}(\,[X_n = j]\,) = \dfrac{\text{Card}\,(\,[X_n = j]\,)}{\text{Card}(\Omega)} = \dbinom{n}{j} \left(\dfrac{1}{n}\right)^j \left(1 - \dfrac{1}{n}\right)^{n-j}$ **et** $X_n \hookrightarrow \mathcal{B}\left(n, \dfrac{1}{n}\right)$

On attribue 2 points sur 4 pour la rédaction « succession d'épreuves indépendantes . . . ».

b) Donner, sans démonstration, l'espérance et la variance de X_n.

- **1 pt :** $\mathbb{E}(X_n) = 1$
- **1 pt :** $\mathbb{V}(X_n) = 1 - \frac{1}{n}$

On désire modéliser cette expérience. On suppose que n est une constante fixée.

11. Donner la commande permettant de stocker dans une variable un vecteur ligne de longueur n, contenant les entiers de 1 à n.

- **1 pt :** `tab = 1:n`

12. *a)* Soit `V` un vecteur ligne de longueur `p` et `i` un entier compris entre 1 et `p`.
Que renvoie la fonction suivante ?

```
function W = suppression(V, i)
  p = length(V)
  W = V([1:(i-1), (i+1):p])
endfunction
```

- **2 pts : la fonction `suppression` prend en paramètre un vecteur `V` et un entier `i` et crée le vecteur `W`, copie de `V` dans laquelle le `i`ème élément a été supprimé** *b)* On rappelle que l'appel `grand(1,1,'uin',a,b)` renvoie un nombre au hasard parmi les entiers de `a` à `b`. Compléter la fonction suivante pour qu'elle simule le tirage sans remise et au hasard des n boules numérotées. La variable `UrneB` est une matrice ligne contenant les numéros des boules pouvant être obtenues à chaque tirage. Elle doit être mise à jour à chacun d'entre eux. La variable `ListeB` est une matrice ligne contenant dans l'ordre les numéros des boules obtenues lors de la succession des n tirages.

```
function ListeB = TirageSR(n)
  ListeB = ...
  UrneB = ...
  for j = 1:n
    m = length(UrneB)
    i = ...
    ListeB(j) = UrneB(i)
    UrneB = Suppression(UrneB,i)
  end
endfunction
```

- **1 pt :** `ListeB = zeros(1, n)` **ou équivalent**
- **1 pt :** `UrneB = 1:n`
- **2 pts :** `i = grand(1,1,'uin',1,m)`

13. Écrire un programme complet permettant de simuler l'expérience de cette **Partie III** lorsque $n = 20$, puis de donner la valeur de X_n (on pourra utiliser les fonctions précédentes).

- **1 pt :** `ListeB = tirageSR(n)`
- **1 pt :** `ListeN = grand(1,n,'uin',1,n)`
- **1 pt :** `cptPaire = 0` **(utilisation d'un compteur)**
- **2 pts : structure itérative**

```
for j = 1:n
    if ListeB(j) == ListeN(j) then
        cptPaire = cptPaire + 1
    end
end
```