DS5 (version B)

Exercice (HEC 2013)

On note $E = \mathbb{R}_3[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à 3.
Soit f l'application définie sur E qui associe à tout polynôme $P \in E$, le polynôme $f(P)$ défini par :

$$\big(f(P)\big)(X) = -3\,X\,P(X) + X^2\,P'(X), \text{ où } P' \text{ est la dérivée du polynôme } P$$

1. a) Rappeler la dimension de E.

Démonstration.

$$\boxed{\dim(E) \ = \ \dim\big(\mathbb{R}_3[X]\big) \ = \ 4}$$

□

b) Montrer que f est un endomorphisme de E.

Démonstration.

- Montrons que l'application f est linéaire.
Soit $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$. Soit $(P_1, P_2) \in E^2$.

$$\begin{aligned}
& \big(f(\lambda_1 \cdot P_1 + \lambda_2 \cdot P_2)\big)(X) \\
= \ & -3X(\lambda_1 \cdot P_1 + \lambda_2 \cdot P_2)(X) + X^2(\lambda_1 \cdot P_1 + \lambda_2 \cdot P_2)'(X) \\
= \ & -3\lambda_1 \cdot X\,P_1(X) - 3\lambda_2 \cdot X\,P_2(X) + \lambda_1 \cdot X^2\,P_1'(X) + \lambda_2 \cdot X^2\,P_2'(X) \\
= \ & \lambda_1 \cdot \big(-3\,X\,P_1(X) + X^2\,P_1'(X)\big) + \lambda_2 \cdot \big(-3\,X\,P_2(X) + X^2\,P_2'(X)\big) \\
= \ & \lambda_1 \cdot \big(f(P_1)\big)(X) + \lambda_2 \cdot \big(f(P_2)\big)(X)
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{L'application } f \text{ est linéaire.}}$$

- Montrons : $\forall P \in E,\ f(P) \in E$.
Soit $P \in E$. Alors il existe $(a_0, a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{R}^4$ tel que $P(X) = \sum\limits_{i=0}^{3} a_i\,X^i$.
Ainsi : $P'(X) = \sum\limits_{i=1}^{3} i\,a_i\,X^{i-1}$. Donc :

$$\begin{aligned}
\big(f(P)\big)(X) &= -3\,X\,P(X) + X^2\,P'(X) \\
&= -3\,X \sum_{i=0}^{3} a_i\,X^i + X^2 \sum_{i=1}^{3} i\,a_i\,X^{i-1} \\
&= -3 \sum_{i=0}^{3} a_i\,X^{i+1} + \sum_{i=1}^{3} i\,a_i\,X^{i+1} \\
&= -3 \sum_{i=1}^{4} a_{i-1}\,X^i + \sum_{i=2}^{4} (i-1)\,a_{i-1}\,X^i \\
&= \left(-3 \sum_{i=1}^{3} a_{i-1}\,X^i - \cancel{3\,a_3\,X^4}\right) + \left(\sum_{i=2}^{3} (i-1)\,a_{i-1}\,X^i + \cancel{3\,a_3\,X^4}\right) \\
&= -3 \sum_{i=1}^{3} a_{i-1}\,X^i + \sum_{i=2}^{3} (i-1)\,a_{i-1}\,X^i
\end{aligned}$$

On en déduit : $\deg\big(f(P)\big) \leqslant 3$. Donc : $f(P) \in E$.

$$\boxed{\text{Ainsi, } f \text{ est un endomorphisme de } E.}$$

□

c) Déterminer la matrice M de f dans 1a base canonique de E.

Démonstration.
On note $\mathscr{B} = (P_0, P_1, P_2, P_3)$ la base canonique de E.

- $\big(f(P_0)\big)(X) \ = \ -3\,X \times 1 + X^2 \times 0 \ = \ -3\,X \ = \ 0 \cdot P_0(X) - 3 \cdot P_1(X) + 0 \cdot P_2(X) + 0 \cdot P_3(X)$

$$\boxed{\text{Ainsi : } \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}\big(f(P_0)\big) \ = \ \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.}$$

- $\big(f(P_1)\big)(X) \ = \ -3\,X \times X + X^2 \times 1 \ = \ -2\,X^2 \ = \ 0 \cdot P_0(X) + 0 \cdot P_1(X) - 2 \cdot P_2(X) + 0 \cdot P_3(X)$

$$\boxed{\text{Ainsi : } \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}\big(f(P_1)\big) \ = \ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}.}$$

- $\big(f(P_2)\big)(X) \ = \ -3\,X \times X^2 + X^2 \times (2X) \ = \ -X^3 \ = \ 0 \cdot P_0(X) + 0 \cdot P_1(X) + 0 \cdot P_2(X) - 1 \cdot P_3(X)$

$$\boxed{\text{Ainsi : } \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}\big(f(P_2)\big) \ = \ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.}$$

- $\big(f(P_3)\big)(X) \ = \ -3\,X \times X^3 + X^2 \times (3X^2) \ = \ 0_E$

$$\boxed{\text{Ainsi : } \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}\big(f(P_3)\big) \ = \ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.}$$

$$\boxed{\text{On en déduit : } M \ = \ \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) \ = \ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.}$$

□

d) La matrice M est-elle inversible ? Est-elle diagonalisable ? Calculer pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, M^n.

Démonstration.

- La matrice M est triangulaire (inférieure). On en déduit que ses valeurs propres sont ses coefficients diagonaux.

$$\boxed{\text{Ainsi : } \mathrm{Sp}(M) = \{0\}.}$$

$$\boxed{0 \text{ est valeur propre de } M. \text{ La matrice } M \text{ n'est donc pas inversible.}}$$

- On procède par l'absurde.
  Supposons que M est diagonalisable, alors il existe :
  × $P \in \mathscr{M}_4(\mathbb{R})$ inversible,
  × $D \in \mathscr{M}_4(\mathbb{R})$ diagonale, dont les coefficients diagonaux sont les valeurs propres de M,

  telles que $M = PDP^{-1}$.
  Or $\text{Sp}(M) = \{0\}$. Donc : $D = 0 \cdot I_4 = 0_{\mathscr{M}_4(\mathbb{R})}$. Ainsi :
  $$M \;=\; PDP^{-1} \;=\; P \times 0_{\mathscr{M}_4(\mathbb{R})} \times P^{-1} \;=\; 0_{\mathscr{M}_4(\mathbb{R})}$$
  Ceci est absurde.
  $$\boxed{\text{On en déduit que la matrice } M \text{ n'est pas diagonalisable.}}$$
- On calcule :
  × $M^2 \;=\; \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
  × $M^3 \;=\; M^2 \times M \;=\; \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -6 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
  × $M^4 \;=\; M^3 \times M \;=\; \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -6 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \;=\; 0_{\mathscr{M}_4(\mathbb{R})}$
  × Par récurrence immédiate : $\forall n \geqslant 4,\ M^n = 0_{\mathscr{M}_4(\mathbb{R})}$.

$$\boxed{M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix},\ M^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ M^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -6 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } \forall n \geqslant 4,\ M^n = 0_{\mathscr{M}_4(\mathbb{R})}.}$$

Commentaire

- On rappelle qu'une matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telle qu'il existe $k \in \mathbb{N}^*$ vérifiant :
  $$A^{k-1} \neq 0_{\mathscr{M}_n(\mathbb{R})} \quad \text{et} \quad A^k = 0_{\mathscr{M}_n(\mathbb{R})}$$
  est appelée *matrice nilpotente d'indice* k (on rappelle aussi que ce terme est hors programme). La matrice M de l'énoncé est donc une matrice nilpotente d'indice 4.
- On note aussi que, comme $M^4 = 0_{\mathscr{M}_4(\mathbb{R})}$, le polynôme $Q(X) = X^4$ est un polynôme annulateur de M. On a bien : $\text{Sp}(M) = \{0\} \ \subset\ \{0\} = \{\text{racines de } Q\}$.
- Il est en fait simple de démontrer que, pour n'importe quelle matrice nilpotente A, on a toujours : $\text{Sp}(A) \subset \{0\}$.
  En effet, soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice nilpotente d'indice k. Alors : $A^k = 0_{\mathscr{M}_n(\mathbb{R})}$.
  Le polynôme $Q(X) = X^k$ est donc un polynôme annulateur de A.
  Ainsi : $\text{Sp}(A) \ \subset\ \{\text{racines de } Q\} = \{0\}$.

□

e) Préciser le noyau $\mathrm{Ker}(f)$ de f ainsi qu'une base de $\mathrm{Ker}(f)$.

Démonstration.

- Soit $P \in E$. Alors il existe $(a_0, a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{R}^4$ tel que $U = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(P) = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{4,1}(\mathbb{R})$.

$$\begin{array}{rcl} P \in \mathrm{Ker}(f) & \Leftrightarrow & f(P) = 0_E \\ & \Leftrightarrow & M\,U = 0_{\mathscr{M}_{4,1}(\mathbb{R})} \\ & \Leftrightarrow & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ & \Leftrightarrow & \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} -3\,a_0 & & & & & = & 0 \\ & - & 2\,a_1 & & & = & 0 \\ & & & - & a_2 & = & 0 \end{array} \right. \\ & \Leftrightarrow & \left\{ \begin{array}{ccccl} a_0 & & & = & 0 \\ & a_1 & & = & 0 \\ & & a_2 & = & 0 \end{array} \right. \end{array}$$

On obtient alors :

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{Ker}(f) & = & \{P = a_0 \cdot P_0 + a_1 \cdot P_1 + a_2 \cdot P_2 + a_3 \cdot P_3 \in E \mid a_0 = a_1 = a_2 = 0\} \\ & = & \{a_3 \cdot P_3 \mid a_3 \in \mathbb{R}\} \\ & = & \mathrm{Vect}\,(P_3) \end{array}$$

$$\boxed{\text{On en conclut : } \mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Vect}\,(P_3).}$$

- La famille (P_3) :
  × engendre $\mathrm{Ker}(f)$,
  × est libre car constituée uniquement d'un polynôme non nul.

$$\boxed{\text{On en conclut que } (P_3) \text{ est une base de } \mathrm{Ker}(f).}$$

□

f) Déterminer l'image $\mathrm{Im}(f)$ de f.

Démonstration.

- Par caractérisation de l'image d'une application linéaire :

$$\begin{array}{rcll} \mathrm{Im}(f) & = & \mathrm{Vect}\,(f(P_0), f(P_1), f(P_2), f(P_3)) & \\ & = & \mathrm{Vect}\,(-3 \cdot P_1, -2 \cdot P_2, -P_3, 0_E) & \qquad \textit{(d'après } \textbf{\textit{1.c)}}\textit{)} \\ & = & \mathrm{Vect}\,(P_1, P_2, P_3) & \end{array}$$

$$\boxed{\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}\,(P_1, P_2, P_3)}$$

- La famille (P_1, P_2, P_3) :
  × engendre $\mathrm{Im}(f)$,
  × est libre car c'est une sous-famille de la famille libre $\mathscr{B} = (P_0, P_1, P_2, 3)$.

$$\boxed{\text{Une base de } \mathrm{Im}(f) \text{ est } (P_1, P_2, P_3).}$$

□

2. On note id_E et 0_E respectivement, l'endomorphisme identité et l'endomorphisme nul de E, et pour tout endomorphisme v de E, on pose $v^0 = \mathrm{id}_E$ et pour tout k de $\mathbb{N}^*$, $v^k = v \circ v^{k-1}$.
Soit u et g deux endomorphismes de E tels que : $u^4 = 0_E$, $u^3 \neq 0_E$ et $g = \mathrm{id}_E + u + u^2 + u^3$.

a) Soit P un polynôme de E tel que $P \notin \mathrm{Ker}\left(u^3\right)$.
Montrer que la famille $\left(P, u(P), u^2(P), u^3(P)\right)$ est une base de E.

Démonstration.

- Soit $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4) \in \mathbb{R}^4$.
  Supposons : $\lambda_1 \cdot P + \lambda_2 \cdot u(P) + \lambda_3 \cdot u^2(P) + \lambda_4 \cdot u^3(P) = 0_E$ $(*)$.
  - × Par linéarité de u^3, on obtient, en composant par u^3 de part et d'autre de l'égalité :

$$\begin{array}{ccc} \lambda_1 \cdot u^3(P) + \lambda_2 \cdot \cancel{u^4(P)} + \lambda_3 \cdot \cancel{u^5(P)} + \lambda_4 \cdot \cancel{u^6(P)} & = & u^3\left(0_E\right) \\ \shortparallel & & \shortparallel \\ \lambda_1 \cdot u^3(P) & & 0_E \end{array}$$

    En effet, comme $u^4 = 0_{\mathscr{L}(E)}$ alors $u^5 = u \circ 0_{\mathscr{L}(E)} = 0_{\mathscr{L}(E)}$. De même : $u^6 = 0_{\mathscr{L}(E)}$.
    Et en particulier : $u^4(P) = u^5(P) = u^6(P) = 0_E$.
  - × On obtient : $\lambda_1 \cdot u^3(P) = 0_E$.
    Or, d'après l'énoncé : $P \notin \mathrm{Ker}\left(u^3\right)$. Ainsi : $u^3(P) \neq 0_E$.

$$\boxed{\text{On en déduit : } \lambda_1 = 0.}$$

  - × L'égalité $(*)$ se réécrit alors : $\lambda_2 \cdot u(P) + \lambda_3 \cdot u^2(P) + \lambda_4 \cdot u^3(P) = 0_E$.
    En composant par u^2 de part et d'autre, on obtient alors :

$$\lambda_2 \cdot u^3(P) = 0_E$$

$$\boxed{\text{On en déduit alors : } \lambda_2 = 0.}$$

  - × L'égalité $(*)$ se réécrit alors : $\lambda_3 \cdot u^2(P) + \lambda_4 \cdot u^3(P) = 0_E$.
    En composant par u de part et d'autre, on obtient alors :

$$\lambda_3 \cdot u^3(P) = O_E$$

$$\boxed{\text{On en conclut : } \lambda_3 = 0.}$$

  - × L'égalité $(*)$ se réécrit alors : $\lambda_4 \cdot u^3(P) = O_E$.

$$\boxed{\text{On en déduit : } \lambda_4 = 0.}$$

$$\boxed{\text{Ainsi, la famille } \mathscr{B}' = \left(P, u(P), u^2(P), u^3(P)\right) \text{ est bien libre.}}$$

- Ainsi, la famille $\mathscr{B}'$:
  - × est libre,
  - × vérifie : $\mathrm{Card}(\mathscr{B}') = 4 = \dim(E)$

$$\boxed{\text{On en déduit que } \mathscr{B}' = \left(P, u(P), u^2(P), u^3(P)\right) \text{ est une base de } E.}$$

□

b) Montrer que g est un automorphisme de E. Déterminer l'automorphisme réciproque g^{-1} en fonction de u.

Démonstration.

- Tout d'abord, g est un endomorphisme de E en tant que somme d'endomorphismes de E.
- Comme les endomorphismes id_E et g commutent :

$$\begin{array}{ccc} (\mathrm{id}_E - u) \circ (\mathrm{id}_E + u + u^2 + u^3) & = & \mathrm{id}_E^4 - u^4 \\ \shortparallel & & \shortparallel \\ (\mathrm{id}_E - u) \circ g & & \mathrm{id}_E \qquad \textit{(car } u^4 = 0_{\mathscr{L}(E)}\textit{)} \end{array}$$

On en déduit que g est bijectif et $g^{-1} = \mathrm{id}_E - u$.

$$\boxed{\text{Finalement, } g \text{ est un automorphisme et } g^{-1} = \mathrm{id}_E - u.}$$

Commentaire

On utilise ici la propriété suivante.
Soit $(f, g) \in (\mathscr{L}(E))^2$ tel que : $f \circ g = g \circ f$, alors :

$$f^n - g^n \ = \ (f - g) \sum_{k=0}^{n-1} f^k \circ g^{n-k}$$

On l'applique ici à $n = 4$, $f = \mathrm{id}_E$ et $g = u$.
C'est un raisonnement classique pour trouver la réciproque d'un endomorphisme h de la forme : $h = \mathrm{id}_E + f + \cdots + f^{n-1}$ avec $f^n = 0_{\mathscr{L}(E)}$. (on démontre, avec la relation précédente, que h est bijectif et $h^{-1} = \mathrm{id}_E - f$)

□

Commentaire

On pouvait également répondre à cette question en exploitant la matrice représentative de g dans la base $\mathscr{B}'$.

- Commençons par déterminer la matrice représentative de u dans la base $\mathscr{B}'$.
  - × $u(P) \ = \ 0 \cdot P + 1 \cdot u(P) + 0 \cdot u^2(P) + 0 \cdot u^3(P)$.

    Donc : $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}\big(u(P)\big) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.
  - × $u\big(u(P)\big) \ = \ u^2(P) \ = \ 0 \cdot P + 0 \cdot u(P) + 1 \cdot u^2(P) + 0 \cdot u^3(P)$.

    Donc : $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}\Big(u\big(u(P)\big)\Big) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.
  - × $u\big(u^2(P)\big) \ = \ u^3(P) \ = \ 0 \cdot P + 0 \cdot u(P) + 0 \cdot u^2(P) + 1 \cdot u^3(P)$.

    Donc : $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}\Big(u\big(u^2(P)\big)\Big) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.
  - × $u\big(u^3(P)\big) \ = \ u^4(P) \ = \ 0_E$.

    Donc : $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}\Big(u\big(u^3(P)\big)\Big) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

  Ainsi : $N = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(u) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.
- On en déduit, par isomorphisme de représentation :
$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(u^2) = N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(u^3) = N^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
- Et finalement, toujours par isomorphisme de représentation :
$$B \ = \ \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(g) \ = \ \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(\mathrm{id}_E + u + u^2 + u^3) \ = \ I_4 + N + N^2 + N^3 \ = \ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$
- La matrice B est triangulaire et tous ses coefficients diagonaux sont non nuls.
  Elle est donc inversible. On en déduit que l'endomorphisme g est bijectif.
- Avec l'algorithme du pivot de Gauss, on détermine B^{-1}. On trouve :
$$B^{-1} \ = \ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \ = \ I_4 - N$$

  Par passerelle matrice-endomorphisme, on obtient bien : $g^{-1} = \mathrm{id}_E - u$.

c) Établir l'égalité : $\mathrm{Ker}(u) = \mathrm{Ker}\,(g - \mathrm{id}_E)$.

Démonstration.

- Démontrons d'abord : $\mathrm{Ker}(u) \subset \mathrm{Ker}(g - \mathrm{id}_E)$.
  Soit $P \in \mathrm{Ker}(u)$. Alors $u(P) = 0_E$. Ainsi :

$$(g - \mathrm{id}_E)(P) \;=\; g(P) - P \;=\; \cancel{P} + u(P) + u^2(P) + u^3(P) - \cancel{P} \;=\; u(P) + u^2(P) + u^3(P)$$

  Or : $u(P) = 0$. On obtient donc :

$$u^2(P) \;=\; u\big(u(P)\big) \;=\; u(0_E) \;=\; 0_E \quad \textit{(par linéarité de u)}$$

  De même :

$$u^3(P) \;=\; u\big(u^2(P)\big) \;=\; u(0_E) \;=\; 0_E$$

  On en déduit : $(g - \mathrm{id}_E)(P) = 0_E$, *i.e.* $\in \mathrm{Ker}(g - \mathrm{id}_E)$.

$$\boxed{\mathrm{Ker}(u) \subset \mathrm{Ker}(g - \mathrm{id}_E)}$$

- Montrons ensuite : $\dim\big(\mathrm{Ker}(u)\big) = \dim\big(\mathrm{Ker}(g - \mathrm{id}_E)\big)$.
  × Déterminons donc d'abord $\dim\big(\mathrm{Ker}(u)\big)$.
  D'après le théorème du rang :

$$\underset{\substack{\shortparallel \\ 4}}{\dim(E)} \;=\; \dim\big(\mathrm{Ker}(u)\big) + \dim\big(\mathrm{Im}(u)\big)$$

  De plus, par caractérisation de l'image d'une application linéaire (en utilisant la base $\mathscr{B}'$) :

$$\begin{aligned}\mathrm{Im}(u) &= \mathrm{Vect}\,\big(u(P), u\big(u(P)\big), u\big(u^2(P)\big), u\big(u^3(P)\big)\big)\\ &= \mathrm{Vect}\,\big(u(P), u^2(P), u^3(P), u^4(P)\big)\\ &= \mathrm{Vect}\,\big(u(P), u^2(P), u^3(P), \cancel{0_E}\big)\\ &= \mathrm{Vect}\,\big(u(P), u^2(P), u^3(P)\big)\end{aligned}$$

  Ainsi, la famille $\big(u(P), u^2(P), u^3(P)\big)$:
  - engendre $\mathrm{Im}(u)$,
  - est libre car est une sous-famille de la famille libre $\mathscr{B}' = \big(P, u(P), u^2(P), u^3(P)\big)$.

  On en déduit que $\big(u(P), u^2(P), u^3(P)\big)$ est une base de $\mathrm{Im}(u)$. Donc :

$$\dim\big(\mathrm{Im}(u)\big) \;=\; \mathrm{Card}\Big(\big(u(P), u^2(P), u^3(P)\big)\Big) \;=\; 3$$

$$\boxed{\text{On en conclut : } \dim\big(\mathrm{Ker}(u)\big) = 4 - 1 = 3.}$$

  × Déterminons maintenant $\dim\big(\mathrm{Ker}(g - \mathrm{id}_E)\big)$.
  D'après le théorème du rang :

$$\underset{\substack{\shortparallel \\ 4}}{\dim(E)} \;=\; \dim\big(\mathrm{Ker}(g - \mathrm{id}_E)\big) + \dim\big(\mathrm{Im}(g - \mathrm{id}_E)\big)$$

De plus, par caractérisation de l'image d'une application linéaire en utilisant la base $\mathscr{B}'$ (on rappelle la relation : $u^4 = 0_{\mathscr{L}(E)}$) :

$$\begin{array}{cll} & \mathrm{Im}(g - \mathrm{id}_E) & \\ = & \mathrm{Vect}\left((g-\mathrm{id}_E)(P), (g-\mathrm{id}_E)\big(u(P)\big), (g-\mathrm{id}_E)\big(u^2(P)\big), (g-\mathrm{id}_E)\big(u^3(P)\big)\right) & \\ = & \mathrm{Vect}\left(u(P)+u^2(P)+u^3(P), u^2(P)+u^3(P), u^3(P), \cancel{0_E}\right) & \\ = & \mathrm{Vect}\left(u(P)+u^2(P), u^2(P), u^3(P)\right) & \textit{(on met à jour le } 1^{er} \textit{ et le } 2^{ème} \textit{ polynôme en leur retirant 1 fois le } 3^{ème}\textit{)} \\ = & \mathrm{Vect}\left(u(P), u^2(P), u^3(P)\right) & \textit{(on met à jour le } 1^{er} \textit{ polynôme en lui retirant 1 fois le } 2^{ème}\textit{)} \end{array}$$

Ainsi, la famille $\big(u(P), u^2(P), u^3(P)\big)$:

- engendre $\mathrm{Im}(g - \mathrm{id}_E)$,
- est libre car est une sous-famille de la famille libre $\mathscr{B}' = \big(P, u(P), u^2(P), u^3(P)\big)$.

On en déduit que $\big(u(P), u^2(P), u^3(P)\big)$ est une base de $\mathrm{Im}(g - \mathrm{id}_E)$. Donc :

$$\dim\big(\mathrm{Im}(g - \mathrm{id}_E)\big) \ = \ 3$$

$$\boxed{\text{On en conclut : } \dim\big(\mathrm{Ker}(g - \mathrm{id}_E)\big) = 4 - 1 = 3.}$$

On en déduit bien : $\dim\big(\mathrm{Ker}(u)\big) = \dim\big(\mathrm{Ker}(g - \mathrm{id}_E)\big)$.

- Ainsi :
  × $\mathrm{Ker}(u) \subset \mathrm{Ker}(g - \mathrm{id}_E)$
  × $\dim\big(\mathrm{Ker}(u)\big) = \dim\big(\mathrm{Ker}(g - \mathrm{id}_E)\big)$

$$\boxed{\text{Finalement : } \mathrm{Ker}(u) = \mathrm{Ker}(g - \mathrm{id}_E).}$$

□

d) Montrer que 1 est la seule valeur propre de g.

Démonstration.

- On commence par remarquer :

$$g\big(u^3(P)\big) \ = \ (\mathrm{id}_E + u + u^2 + u^3)\big(u^3(P)\big) \ = \ u^3(P) + \cancel{u^4(P) + u^5(P) + u^6(P)}$$

Donc le polynôme $u^3(P)$ vérifie :
× $u^3(P) \neq 0_E$
× $g\big(u^3(P)\big) = 1 \cdot u^3(P)$

On en déduit que $u^3(P)$ est un vecteur propre de g associé à la valeur propre 1.

$$\boxed{1 \text{ est donc valeur propre de } g, \text{ d'où } \{1\} \subset \mathrm{Sp}(g).}$$

- Montrons alors que c'est la seule valeur propre de g, *i.e.* $\text{Sp}(g) \subset \{1\}$.
  Soit $\lambda \in \text{Sp}(g)$. Alors il existe $P \in E$ tel que :

  × $P \neq 0_E$

  × $g(P) = \lambda \cdot P$.

  Or g est bijectif, donc :

  - 0 n'est pas valeur propre de g. Ainsi : $\lambda \neq 0$.
  - en composant par g^{-1} l'égalité $g(P) = \lambda \cdot P$, on obtient :

$$\begin{array}{rcll} P & = & g^{-1}(\lambda \cdot P) \ = \ \lambda \cdot g^{-1}(P) & \textit{(par linéarité de } g^{-1}\textit{)} \\ & = & \lambda \cdot (\text{id}_E - u)(P) & \textit{(d'après } \textbf{\textit{2.b)}}\textit{)} \\ & = & \lambda \cdot P - \lambda \cdot u(P) & \end{array}$$

  On en déduit :

  × $P \neq 0_E$

  × $u(P) = \dfrac{\lambda - 1}{\lambda} \cdot P$.

  Donc P est un vecteur propre de u associé à la valeur propre $\dfrac{\lambda - 1}{\lambda}$.
  En particulier : $\dfrac{\lambda - 1}{\lambda} \in \text{Sp}(u)$.
  Or, d'après l'énoncé : $u^4 = 0_{\mathscr{L}(E)}$.
  Le polynôme $Q(X) = X^4$ est donc un polynôme annulateur de u. On en déduit :

$$\text{Sp}(u) \ \subset \ \{\text{racines de } Q\} \ = \ \{0\}$$

  Ainsi : $\dfrac{\lambda - 1}{\lambda} = 0$. D'où : $\lambda = 1$.

$$\boxed{\text{On en conclut : } \text{Sp}(g) \subset \{1\}.}$$

$$\boxed{\text{Finalement : } \text{Sp}(g) = \{1\}.}$$

Commentaire

Si on a répondu à ***2.b)*** à l'aide de la matrice représentative de g, alors la réponse à cette question est plus directe.

Comme $B = \text{Mat}_{\mathscr{B}'}(g) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ est triangulaire (inférieure), ses valeurs propres sont ses coefficients diagonaux. D'où : $\text{Sp}(B) = \{1\}$.
Ainsi : $\text{Sp}(g) = \text{Sp}(B) = \{1\}$.

□

Problème (HEC 2005)

Dans tout le problème, n désigne un entier naturel non nul.
On considère une urne blanche contenant n boules blanches numérotées de 1 à n et une urne noire contenant n boules noires numérotées de 1 à n, dans lesquelles on effectue des suites de tirages. À chaque tirage, on tire simultanément et au hasard une boule de chaque urne. On obtient ainsi à chaque tirage, deux boules, une blanche et une noire.
On dira qu'on a obtenu une paire lors d'un tirage, si la boule blanche et la boule noire tirées portent le même numéro.

Partie I. Tirages avec remise

1. Dans cette question, on effectue les tirages avec remise jusqu'à ce que l'on obtienne pour la première fois une paire.

a) Préciser l'espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ qui modélise cette expérience.

Démonstration.
Dans un premier temps, considérons que l'expérience ne s'arrête pas et que les tirages continuent indéfiniment même si l'on obtient des paires.

- Les tirages étant effectués avec remise, le résultat possible de l'expérience est un ∞-tirage. Chacun de ces ∞-tirage doit contenir tous les résultats partiels de l'expérience, à savoir les résultats obtenus lors de chaque étape de l'expérience.
  Comme à chaque étape on effectue un tirage simultané dans les deux urnes, un résultat partiel peut être représenté par un couple de valeurs de l'ensemble $[\![1,n]\!]$.
  $$\boxed{\text{On peut donc choisir : } \Omega = \big([\![1,n]\!] \times [\![1,n]\!]\big)^{\mathbb{N}^*}.}$$
- On choisit alors pour $\mathscr{A}$ la tribu discrète associée à Ω.
  $$\boxed{\text{Autrement dit : } \mathscr{A} = \mathcal{P}(\Omega).}$$
- Il reste alors à définir une probabilité $\mathbb{P}$ sur l'espace probabilisable $(\Omega, \mathscr{A})$.
  Pour ce faire, on s'intéresse à des événements particuliers.
  Soit $k \in \mathbb{N}^*$ et soit $(c_1, \dots, c_k) \in \big([\![1,n]\!] \times [\![1,n]\!]\big)^k$. On définit :
  $$A^{(c_1,\dots,c_k)} \ = \ \{(u_m)_{m\in\mathbb{N}^*} \in \Omega \mid \forall i \in [\![1,k]\!],\ u_i = c_i\}$$
  Autrement dit, l'événement $A^{(c_1,\dots,c_k)}$ est constitué de tous les ∞-tirages $(u_m)_{m\in\mathbb{N}^*}$ qui commencent par le k-uplet de **couples** $(c_1, \dots, c_k)$. On définit alors $\mathbb{P}$ comme l'application σ-additive qui attribue la même probabilité à tous ces événements.
  Plus précisément, on définit $\mathbb{P}$ par :
  $$\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \forall (c_1, \dots, c_k) \in \big([\![1,n]\!] \times [\![1,n]\!]\big)^k,\ \mathbb{P}\big(A^{(c_1,\dots,c_k)}\big) \ = \ \left(\frac{1}{n^2}\right)^k$$
  (ce résultat provient du fait que : $\mathrm{Card}\Big(\big([\![1,n]\!] \times [\![1,n]\!]\big)^k\Big) \ = \ (n^2)^k$*)*
  $$\boxed{\text{Le triplet } (\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P}) \text{ ainsi défini est un espace probabilisé.}}$$

Nous avons fait initialement l'hypothèse que l'expérience de s'arrêtait pas. Si l'expérience s'arrête dès l'apparition de la première paire, on peut considérer l'espace probabilisé $(\Omega', \mathscr{A}', \mathbb{P}')$ suivant :

× Ω' est obtenu à partir de Ω en coupant chaque ∞-tirage à la première paire obtenue (Ω' est alors constitué de suites mais aussi de séquences finies).

× $\mathscr{A}' = \mathcal{P}(\Omega')$.

× $\mathbb{P}' = \mathbb{P}_{|\mathscr{A}'}$ (restriciton de $\mathbb{P}$ à la tribu $\mathscr{A}'$).

□

Commentaire

- La notion d'∞-tirage n'est pas définie dans le programme officiel. Elle est introduite ici pour aider à distinguer entre le résultat de l'expérience (une suite de couples de l'ensemble $[\![1,n]\!]$) et un résultat partiel de l'expérience (le couple d'éléments de $[\![1,n]\!]$ que l'on obtient lors d'une étape *i.e.* lors d'un tirage).
- On ne peut considérer la probabilité uniforme sur $(\Omega, \mathscr{A})$. En effet, cette application n'est définie que lorsque l'ensemble Ω est fini. La probabilité uniforme est alors l'application qui à tout événement élémentaire attribue la même probabilité, à savoir :
$$\forall \omega \in \Omega,\ \mathbb{P}\big(\{\omega\}\big) \ = \ \frac{1}{\text{Card}(\Omega)}$$
On ne peut agir de la sorte ici, car Ω est infini. L'application $\mathbb{P}$ que l'on a défini dans cette question est telle que : $\forall \omega \in \Omega,\ \mathbb{P}\big(\{\omega\}\big) = 0$. Ainsi, l'application $\mathbb{P}$ associe bien à chaque événement élémentaire la même probabilité mais cette probabilité est nulle.
- Le caractère uniforme que l'application $\mathbb{P}$ doit vérifier est qu'à chaque étape, la probabilité d'obtenir chacun des tirages (on parle ici de tirage et pas d'∞-tirage) doit être la même.
Démontrons que c'est bien le cas pour la probabilité $\mathbb{P}$ définie dans cette question.
Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, définissons l'événement :
$$B_k^{(i,j)} \ : \text{« le résultat du } k^{\text{ème}} \text{ tirage est le couple } (i,j) \in [\![1,n]\!]^2 \text{ »}$$
L'idée est alors de décomposer l'événement $B_k^{(i,j)}$ suivant les événements qui ont permis la définition de $\mathbb{P}$. Soit $k \in \mathbb{N}^*$ et soit $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$. On a alors :
$$B_k^{(i,j)} \ = \ \bigcup_{(c_1,\dots,c_{k-1}) \in \left([\![1,n]\!]\times[\![1,n]\!]\right)^{k-1}} A^{(c_1,\dots,c_{k-1},(i,j))}$$
Ainsi :
$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\big(B_k^{(i,j)}\big) &= \mathbb{P}\Big(\bigcup_{(c_1,\dots,c_{k-1}) \in \left([\![1,n]\!]\times[\![1,n]\!]\right)^{k-1}} A^{(c_1,\dots,c_{k-1},(i,j))}\Big) \\
&= \sum_{(c_1,\dots,c_{k-1}) \in \left([\![1,n]\!]\times[\![1,n]\!]\right)^{k-1}} \mathbb{P}\big(A^{(c_1,\dots,c_{k-1},(i,j))}\big) && \textit{(par } \sigma\textit{-additivité)} \\
&= \sum_{(c_1,\dots,c_{k-1}) \in \left([\![1,n]\!]\times[\![1,n]\!]\right)^{k-1}} \left(\frac{1}{n^2}\right)^k && \textit{(par définition de } \mathbb{P}\textit{)} \\
&= \left(n^2\right)^{k-1} \left(\frac{1}{n^2}\right)^k \ = \ \frac{1}{n^2}
\end{aligned}$$
la dernière ligne est obtenue en remarquant : $\text{Card}\left(\left([\![1,n]\!]\times[\![1,n]\!]\right)^{k-1}\right) = \left(n^2\right)^{k-1}$.
- S'interroger sur la définition de Ω est important car cela permet de comprendre plus précisément ce qu'est l'expérience. Il est par exemple utile de comprendre si, au cours de l'expérience, on effectue :
  - × un nombre de tirages fini fixé à l'avance.
  - × un nombre infini de tirages.

  Ce point est particulièrement important lorsque l'on demande de reconnaître une loi classique : on ne s'oriente pas vers le même type de loi si l'expérience consiste une succession finie ou infinie d'épreuves de Bernoulli.

Commentaire

- Arrêter l'expérience lors de la découverte de la première paire n'a aucun intérêt. Cela complique l'écriture de l'espace probabilisé ($(\Omega', \mathscr{A}', \mathbb{P}')$ au lieu de $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$). Il est ainsi préférable de considérer que l'expérience continue même après la découverte de la $1^{\text{ère}}$ paire. On pourra alors considérer la v.a.r. qui donne le rang d'apparition de la $2^{\text{ème}}$ paire (classique dans un tel exercice) ou de la $3^{\text{ème}}$, ..., $k^{\text{ème}}$ ...
- Définir un espace probablisé n'est pas chose aisée. D'ailleurs, on n'a pas démontré que l'application $\mathbb{P}$ que l'on a définie est bien une application probabilité. L'esprit du programme est plutôt de considérer qu'il existe un espace probabilisé. C'est l'hypothèse qui sera faite dans la plupart des sujets. Au pire, on peut demander de renseigner l'espace probabilisable $(\Omega, \mathscr{A})$ et, dans le cas où Ω est fini, d'indiquer que l'on choisit pour $\mathbb{P}$ l'application probabilité uniforme. Mais il ne paraît pas raisonnable de demander la définition de $\mathbb{P}$ lorsque l'univers Ω est infini. Il est d'ailleurs difficile de comprendre ce qu'attendait cet énoncé.

b) On note Y la variable aléatoire égale au nombre de tirages (de deux boules) effectués.
Déterminer la loi de Y ; donner son espérance et sa variance.

Démonstration.
On se permet, dans cette question uniquement, de considérer que l'expérience continue même après l'obtention d'une paire. On verra, notamment en question ***3.a)***, comment rédiger sans faire cette hypothèse.

- L'expérience aléatoire consiste en la succession infinie d'épreuves de Bernoulli (tirage simultanée des deux boules) indépendantes et de même paramètre de succès $p = \dfrac{1}{n}$ (correspondant à la probabilité d'obtenir une paire). Précisons l'obtention du paramètre p :
$$p = \frac{\text{nombre de paires d'éléments de } [\![1,n]\!]}{\text{nombre de couples d'éléments de } [\![1,n]\!]} = \frac{n}{n^2} = \frac{1}{n}$$
- La v.a.r. Y est le rang d'apparition du premier succès de cette expérience.
$$\boxed{\text{Ainsi : } Y \hookrightarrow \mathcal{G}\left(\tfrac{1}{n}\right).}$$
- On en déduit que Y admet une espérance et une variance. De plus :
$$\mathbb{E}(Y) = \frac{1}{p} = \frac{1}{\frac{1}{n}} = n$$
$$\mathbb{V}(Y) = \frac{1-p}{p^2} = \frac{1-\frac{1}{n}}{\left(\frac{1}{n}\right)^2} = \left(1-\frac{1}{n}\right)\, n^2 = \frac{n-1}{n}\, n^2 = n\,(n-1)$$
$$\boxed{\mathbb{E}(Y) = n \quad \text{et} \quad \mathbb{V}(Y) = n\,(n-1)}$$
□

2. On rappelle que `grand(1,1,'uin',1,n)` renvoie un nombre au hasard entre 1 et `n`.
Écrire en **Scilab** une fonction dont l'en-tête est `function Y = Exp1(n)` qui modélise l'expérience précédente et renvoie alors la valeur de la v.a.r. Y.

Démonstration.

```
function Y = Exp1(n)
    Y = 1
    while grand(1,1,'uin',1,n) <> grand(1,1,'uin',1,n)
        Y = Y + 1
    end
endfunction
```

Détaillons les différents éléments de ce programme.

- **Début du programme**
  On commence par initialiser la variable `Y`.
  On lui donne le rôle de compteur. Pour ce faire, on l'initialise à 1.

```
Y = 1
```

- **Structure itérative**
  - × Il s'agit de modéliser le tirage dans l'urne noire et le tirage dans l'urne blanche. Chaque urne possède n boules qui ont la même probabilité d'être tirées. Ainsi, le résultat du tirage dans une urne peut être modélisé par l'appel : `grand(1,1,'uin',1,n)`.
  - × L'expérience s'arrête dès la $1^{\text{ère}}$ paire obtenue. Elle doit donc continuer tant que les numéros tirés dans chaque urne sont différents.
  - × À chaque nouveau tirage effectué, on met à jour la variable `Y`, qui compte le nombre de tirages effectués.

  On en déduit la structure itérative suivante.

```
while grand(1,1,'uin',1,n) <> grand(1,1,'uin',1,n)
    Y = Y + 1
end
```

Commentaire

- Afin de permettre une bonne compréhension des mécanismes en jeu, on a détaillé la réponse à cette question. Cependant, écrire correctement le programme **Scilab** démontre la bonne compréhension de la simulation demandée et permet d'obtenir les points alloués à cette question.
- Cette question date de l'époque où le langage de programmation était le `PASCAL`. Ce langage n'offrait pas de fonction de simulation de v.a.r. comme `grand`. Il était donc obligatoire de tout faire à partir d'une fonction `random` permettant de simuler les v.a.r. qui suivent une loi $\mathcal{U}([\![1,n]\!])$. Ici, on pouvait se contenter de l'appel :

```
grand(1,1,'geom',1/n)
```

pour simuler la v.a.r. Y.

$\square$

3. Dans cette question, on suppose que $n = 2$. On effectue des tirages avec remise jusqu'à ce que l'on obtienne pour la première fois la boule blanche numérotée 1. On note U la variable aléatoire égale au nombre de tirages effectués, et Z la variable aléatoire égale au nombre de paires obtenues à l'issue de ces tirages.

a) Calculer, pour tout k de $\mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}([U = k])$.
En déduire la probabilité que l'on n'obtienne jamais la boule blanche numéro 1.
Reconnaître la loi de U.

Commentaire

L'énoncé aurait pu, une nouvelle fois, présenter différemment l'expérience en n'exigeant pas son arrêt lors de la découverte de la première boule blanche numérotée 1.
Il aurait alors fallu adopter la présentation suivante :

- × l'expérience consiste à effectuer des tirages avec remise.
- × on note alors U le rang d'apparition de la première boule blanche tirée.

On adopte dans la suite du corrigé le point de vue de l'exercice, à savoir l'arrêt de l'expérience pour la condition citée.

Démonstration.
Soit $k \in \mathbb{N}^*$.

- L'événement $[U = k]$ est réalisé si et seulement si k tirages ont été effectués au cours de l'expérience. Autrement dit, si la première boule blanche numérotée 1 est apparue lors du $k^{\text{ème}}$ tirage.
- Pour tout $\ell \in \mathbb{N}^*$, et tout $i \in [\![1, 2]\!]$ on note :

$$B_\ell^{(i,-)} : \text{« la boule blanche numéro } i \text{ est obtenue lors du } \ell^{\text{ème}} \text{ tirage »}$$

D'après ce qui précède :

$$[U = k] \ = \ B_1^{(2,-)} \ \cap \ \dots \ \cap \ B_{k-1}^{(2,-)} \ \cap \ B_k^{(1,-)}$$

- On en déduit alors :

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}\big([U = k] \big) \\ = \ & \mathbb{P}\Big(B_1^{(2,-)}\Big) \times \mathbb{P}_{B_1^{(2,-)}}\Big(B_2^{(2,-)}\Big) \times \dots \times \mathbb{P}_{B_1^{(2,-)} \cap \ \dots \ \cap B_{k-2}^{(2,-)}}\Big(B_{k-1}^{(2,-)}\Big) \times \mathbb{P}_{B_1^{(2,-)} \cap \ \dots \ \cap B_{k-1}^{(2,-)}}\Big(B_k^{(1,-)}\Big) \\ = \ & \frac{2}{4} \times \frac{2}{4} \times \dots \times \frac{2}{4} \times \frac{2}{4} \ = \ \left(\frac{1}{2}\right)^k \end{aligned}$$

En effet, à chaque tirage, on peut obtenir chacun des 4 couples différents avec la même probabilité. Deux de ces couples commencent par 1 (ce qui signifie que la boule blanche numérotée 1 est tirée) et deux autres commencent par 2 (c'est la boule blanche numérotée 2 qui est tirée).

- En résumé :
  × $U(\Omega) = \mathbb{N}^*$ (la boule blanche numérotée 1 peut apparaître lors de n'importe quel tirage).
  × $\forall k \in \mathbb{N}^*, \ \mathbb{P}\big([U = k] \big) = \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} \ \frac{1}{2}$.

$$\boxed{\text{On en conclut : } U \hookrightarrow \mathcal{G}\left(\frac{1}{2}\right).}$$

Commentaire

- La manière dont est présentée l'expérience influe sur la rédaction. Ici, on ne peut pas dire que les tirages sont indépendants. On comprend aisément qu'il y a une influence du résultat d'un tirage sur le résultat du suivant, ce qui se traduit en terme de probabilités. Plus précisément, considérons l'événement « obtenir la boule blanche numérotée 1 lors des deux premiers tirages ». Cet événement est l'événement impossible puisque l'expérience prend fin lors de l'obtention de la première boule blanche numérotée 1. On a alors :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{P}\Big(B_1^{(1,-)} \cap B_2^{(1,-)}\Big) & \neq & \mathbb{P}\Big(B_1^{(1,-)}\Big) \times \mathbb{P}\Big(B_2^{(1,-)}\Big) \\ \shortparallel & & \shortparallel \\ 0 & & \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \end{array}$$

- Si l'on considère que l'expérience ne s'arrête jamais, on peut mettre en place la rédaction usuelle qui suit pour démontrer : $U \hookrightarrow \mathcal{G}\left(\frac{1}{2}\right)$.
  × L'expérience aléatoire consiste en la succession infinie d'épreuves de Bernoulli (tirage simultanée des deux boules) indépendantes et de même paramètre de succès $p = \frac{1}{2}$ (correspondant à la probabilité d'obtenir la boule blanche numérotée 1).
  × La v.a.r. U est le rang d'apparition du premier succès de cette expérience.

- Il reste à déterminer la probabilité de l'événement C : « ne jamais obtenir la boule blanche numérotée 1 ». Remarquons tout d'abord :

$$\overline{C} = \bigcup_{k=1}^{+\infty} [U = k]$$

En effet, $\overline{C}$ est réalisé si et seulement si il existe un rang $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $[U = k]$ est réalisé. On en déduit :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(C) &= 1 - \mathbb{P}\left(\overline{C}\right) \\
&= 1 - \mathbb{P}\Big(\bigcup_{k=1}^{+\infty} [U = k]\Big) \\
&= 1 - \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}\big([U = k]\big) && \textit{(car les événements de la famille } \big([U = k]\big)_{k\in\mathbb{N}^*} \textit{ sont 2 à 2 incompatibles)} \\
&= 1 - \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k \\
&= 1 - \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k - 1\right) \\
&= 1 - \left(\frac{1}{1 - \frac{1}{2}} - 1\right) && \textit{(en reconnaissant la somme d'une série géométrique de raison } \tfrac{1}{2} \in \,]-1, 1[\textit{)} \\
&= 1 - \left(\frac{1}{\frac{1}{2}} - 1\right) \;=\; 1 - (2 - 1) \;=\; 1 - 1 \;=\; 0
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{La probabilité de ne jamais tirer la boule blanche numérotée 1 est nulle.}}$$

Commentaire

On raisonne ici à l'aide de l'événement contraire de C.
On peut aussi raisonner directement sur C :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(C) &= \mathbb{P}\Big(\bigcap_{k=1}^{+\infty} [U \neq k]\Big) \\
&= \lim_{N\to+\infty} \mathbb{P}\Big(\bigcap_{k=1}^{N} [U \neq k]\Big) && \textit{(d'après le théorème de la limite monotone)}
\end{aligned}$$

On doit alors calculer $\mathbb{P}\Big(\bigcap_{k=1}^{N} [U \neq k]\Big)$. Les événements constituant cette intersection n'étant pas indépendants, il n'y a alors guère le choix : il est nécessaire de raisonner à l'aide de l'événement contraire. Plus précisément :

$$\mathbb{P}\Big(\bigcap_{k=1}^{N} [U \neq k]\Big) \;=\; 1 - \mathbb{P}\Big(\bigcup_{k=1}^{N} [U = k]\Big)$$

On retombe alors sur une démonstration similaire à la précédente. □

b) Déterminer la loi du couple (U, Z).

Démonstration.

- Rappelons tout d'abord : $U(\Omega) = \mathbb{N}^*$.
  Par ailleurs : $Z(\Omega) = \mathbb{N}$. En effet, lors de l'expérience, il est possible :
  - × de n'obtenir aucune paire. Par exemple, si $\omega = \big((1,2)\big)$, alors $Z(\omega) = 0$.
  - × d'obtenir une seule paire. Par exemple, si $\omega = \big((2,2),(1,2)\big)$, alors $Z(\omega) = 1$.
  - × ...
  - × d'obtenir j paires ($j \in \mathbb{N}^*$). Par exemple, si $\omega = \big(\underbrace{(2,2),\ldots,(2,2)}_{j \text{ fois}},(1,2)\big)$, alors $Z(\omega) = j$.
  - × ...
- Soit $i \in \mathbb{N}^*$ et soit $j \in \mathbb{N}$.

	L'événement $[U = i] \cap [Z = j]$ est réalisé		
$\Leftrightarrow$	L'événement $[U = i]$ est réalisé	et	l'événement $[Z = j]$ est réalisé
$\Leftrightarrow$	On a effectué i tirages (la $1^{\text{ère}}$ boule blanche numérotée 1 a été obtenue lors du $i^{\text{ème}}$ tirage)	et	on a obtenu j paires

Deux cas se présentent.

× Si $i < j$, alors : $[U = i] \cap [Z = j] = \varnothing$.
En effet, on ne peut obtenir plus de paires que le nombre de tirages effectués.

$$\boxed{\text{Si } i < j \text{ alors } \mathbb{P}\big([U = i] \cap [Z = j]\big) = 0.}$$

× Si $i \geqslant j$, il s'agit alors de dénombrer l'ensemble des i-tirages qui réalisent l'événement $[U = i] \cap [Z = j]$. De tels i-tirages sont constituées de j paires.
Deux cas se présentent.

- Un i-tirage qui réalise l'événement $[U = i] \cap [Z = j]$ et **qui finit par une paire** est constitué de $j-1$ paires $(2,2)$, d'une paire $(1,1)$ (en dernière position) et de $i-j$ couples $(2,1)$. Un tel i-tirage est entièrement déterminé par :
  - ▸ la position des $j-1$ paires $(2,2)$ sur les $i-1$ premières places : $\dbinom{i-1}{j-1}$ possibilités.

  Il y a $\dbinom{i-1}{j-1}$ tels i-tirages.
- Un i-tirage qui réalise l'événement $[U = i] \cap [Z = j]$ et **qui ne finit par une paire** est constitué de j paires $(2,2)$, d'un couple $(1,2)$ (en dernière position) et de $i-j$ couples $(2,1)$. Un tel i-tirage est entièrement déterminé par :
  - ▸ la position des j paires $(2,2)$ sur les $i-1$ premières places : $\dbinom{i-1}{j}$ possibilités.

  Il y a $\dbinom{i-1}{j}$ tels i-tirages.

Ainsi, il y a :

$$\binom{i-1}{j-1} + \binom{i-1}{j} = \binom{i}{j} \qquad \textit{(d'après la formule du triangle de Pascal)}$$

i-tirages réalisant l'événement $[U = i] \cap [Z = j]$.

Comme il y a en tout 4^i i-tirages (Card $\Big((⟦1,2⟧ \times ⟦1,2⟧)^i \Big) = 4^i$), on a :

$$\mathbb{P}\big([U=i] \cap [Z=j] \big) \ = \ \frac{\binom{i}{j}}{4^i}$$

$$\boxed{\text{Si } i \geqslant j,\ \mathbb{P}\big([U=i] \cap [Z=j] \big) \ = \ \frac{1}{4^i} \binom{i}{j}.}$$

Commentaire

- On peut remarquer que pour tout $i \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $j \in ⟦0,i⟧$:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}_{[U=i]}\big([Z=j] \big) \ &= \ \frac{\mathbb{P}\big([U=i] \cap [Z=j] \big)}{\mathbb{P}\big([U=i]\big)} \\ &= \ \frac{\binom{i}{j} \frac{1}{4^i}}{\frac{1}{2^i}} \ = \ \binom{i}{j} \frac{1}{4^i}\, 2^i \ = \ \binom{i}{j} \frac{1}{2^i} \\ &= \ \binom{i}{j} \left(\frac{1}{2}\right)^j \left(\frac{1}{2}\right)^{i-j}\end{aligned}$$

  Cela permet de conclure que la loi conditionnelle de Z sachant (que l'événement) $[U=i]$ (est réalisé) est la loi $\mathcal{B}\left(i, \frac{1}{2}\right)$.

- Il semble assez naturel, pour la question posée, de définir plutôt la loi conditionnelle et de s'en servir pour définir la loi de couple à l'aide de l'égalité (vérifiée pour tout $i \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $j \in ⟦0,i⟧$) :

$$\mathbb{P}\big([U=i] \cap [Z=j] \big) \ = \ \mathbb{P}\big([U=i]\big)\ \mathbb{P}_{[U=i]}\big([Z=j] \big)$$

  Mais peut-on facilement déterminer $\mathbb{P}_{[U=i]}\big([Z=j] \big)$?
  On a envie de rédiger comme suit.

  – Si $[U=i]$ est réalisé, c'est que la première boule blanche numérotée 1 apparaît lors du $i^{\text{ème}}$ tirage. Dans ce cas, l'événement $[Z=j]$ est réalisé si et seulement si ces i premiers tirages contiennent exactement j paires.

  – L'expérience a donc consisté en une succession de i épreuves de Bernoulli (lancer de pièce) de même paramètre de succès $p = \frac{1}{2}$ (correspondant à la probabilité d'obtenir une paire).

  Il manque un argument important pour conclure que l'on a bien affaire à une loi binomiale : les épreuves de Bernoulli doivent être **indépendantes**. Or, on a déjà vu que l'hypothèse d'indépendance n'est pas raisonnable puisque l'on considère que l'expérience prend fin dès la découverte de la première boule blanche numérotée 1. □

c) Montrer, pour tout k de $\mathbb{N}^*$: $\mathbb{P}([Z=k]) = \sum\limits_{\ell=k}^{+\infty} \binom{\ell}{k} \left(\frac{1}{4}\right)^{\ell}$.

Démonstration.
La famille $\big([U=\ell]\big)_{\ell\in\mathbb{N}^*}$ forme un système complet d'événements.
Soit $k \in \mathbb{N}^*$. D'après la formule de probabilités totales :

$$\begin{array}{rcl}
\mathbb{P}\big([Z=k]\big) & = & \sum\limits_{\ell=1}^{+\infty} \mathbb{P}\big([U=\ell]\cap[Z=k]\big) \\
& = & \cancel{\sum\limits_{\substack{\ell=1\\ \ell<k}}^{+\infty} \mathbb{P}([U=\ell]\cap[Z=k])} + \sum\limits_{\substack{\ell=1\\ \ell\geqslant k}}^{+\infty} \mathbb{P}([U=\ell]\cap[Z=k]) \\
& = & \sum\limits_{\ell=k}^{+\infty} \mathbb{P}([U=\ell]\cap[Z=k]) \qquad \textit{(car } k\geqslant 1\textit{)} \\
& = & \sum\limits_{\ell=k}^{+\infty} \binom{\ell}{k}\left(\frac{1}{4}\right)^{\ell}
\end{array}$$

$$\boxed{\text{On a bien : } \forall k\in\mathbb{N}^*,\ \mathbb{P}\big([Z=k]\big) = \sum\limits_{\ell=k}^{+\infty} \binom{\ell}{k}\left(\frac{1}{4}\right)^{\ell}.}$$

Commentaire

- Il n'est pas envisageable de ne pas savoir comment traiter cette question : déterminer une loi marginale à partir d'une loi de couple est une méthode classique qu'il faut parfaitement connaître. Seule la $4^{\text{ème}}$ égalité nécessite d'avoir très précisément déterminer la loi du couple (U,Z). On rappelle que tout ce qui est écrit **de juste** sera comptabilisé aux concours. Une erreur précédente sur la loi de couple ne devrait pas être de nouveau pénalisée ici.
- Le résultat étant formulé, cette question nous révèle en ce que l'on était supposé trouver pour la loi du couple (U,Z). Cela permet de se rassurer quant aux résultats obtenus précédemment (ou de déceler une erreur qu'on essaiera alors de corriger).

□

d) Calculer $\mathbb{P}([Z=1])$.
Montrer : $\mathbb{P}([Z=0]) = \frac{1}{3}$.

Démonstration.

- D'après la question précédente :

$$\begin{array}{rcl}
\mathbb{P}\big([Z=1]\big) & = & \sum\limits_{\ell=1}^{+\infty} \binom{\ell}{1}\left(\frac{1}{4}\right)^{\ell} \\
& = & \frac{1}{4}\sum\limits_{\ell=1}^{+\infty} \ell\left(\frac{1}{4}\right)^{\ell-1} \\
& = & \frac{1}{4}\,\frac{1}{(1-\frac{1}{4})^2} \qquad \textit{(en reconnaissant la somme d'une série géométrique dérivée première de raison } \tfrac{1}{4}\in\,]-1,1[\textit{)} \\
& = & \frac{1}{4}\,\frac{1}{\left(\frac{3}{4}\right)^2} = \frac{1}{\cancel{4}}\,\frac{4^{\cancel{2}}}{3^2} = \frac{4}{9}
\end{array}$$

$$\boxed{\mathbb{P}\big([Z=1]\big) = \frac{4}{9}}$$

- En reprenant la question précédente :

$$\begin{array}{rcll}
\mathbb{P}\big([Z=0]\big) & = & \sum\limits_{\substack{\ell=1 \\ \ell \geqslant 0}}^{+\infty} \mathbb{P}([U=\ell] \cap [Z=0]) & \\
& = & \sum\limits_{\ell=1}^{+\infty} \mathbb{P}([U=\ell] \cap [Z=0]) & (\textit{car } [\![1,+\infty[\![\cap [\![0,+\infty[\![= [\![1,+\infty[\![) \\
& = & \sum\limits_{\ell=1}^{+\infty} \binom{\ell}{0} \left(\frac{1}{4}\right)^{\ell} & \\
& = & \sum\limits_{\ell=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^{\ell} = \sum\limits_{\ell=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^{\ell} - \left(\frac{1}{4}\right)^{0} & \\
& = & \dfrac{1}{1-\frac{1}{4}} - 1 = \dfrac{1}{\frac{3}{4}} - 1 = \dfrac{4}{3} - 1 = \dfrac{1}{3} &
\end{array}$$

$$\boxed{\mathbb{P}\big([Z=0]\big) = \frac{1}{3}}$$

Commentaire

- La formule démontrée en question précédente est vérifiée pour tout $k \in \mathbb{N}^*$. On ne peut donc pas l'appliquer en $k=0$. Pour obtenir la valeur de $\mathbb{P}\big([Z=0]\big)$ on cherche dans la démonstration de la question précédente à quel moment l'hypothèse $k \geqslant 1$ a été utilisée. On modifie la fin en conséquence.
- Le fait que cette question demande le calcul de $\mathbb{P}\big([Z=0]\big)$ alors que la précédente consiste à démontrer une formule pour $\mathbb{P}\big([Z=k]\big)$ avec $k \in \mathbb{N}^*$ doit alerter : le cas $k=0$ est forcément un cas particulier (sinon on aurait écrit directement une formule pour tout $k \in \mathbb{N}$). Il n'est pas facile de penser à ce cas particulier $k=0$ lors de la résolution de la question précédente. C'est pourquoi on traite d'abord le cas $k \in \mathbb{N}^*$ (le cas qui ne pose pas de problème).
- Enfin, on remarque que l'énoncé donne la valeur à trouver pour $\mathbb{P}\big([Z=0]\big)$. Cela permet de repérer qu'on commet une erreur si l'on essaie d'utiliser la formule de la question précédente lorsque $k=0$.

$\square$

e) En utilisant la formule dite du triangle de Pascal et le résultat de la question ***3.c)*** pour $k=i+1$, justifier, pour tout i de $\mathbb{N}^*$, l'égalité :

$$\mathbb{P}([Z=i+1]) = \frac{1}{4}\,\mathbb{P}([Z=i+1]) + \frac{1}{4}\,\mathbb{P}([Z=i])$$

Commentaire

L'énoncé de cette question contient tous les éléments permettant de la résoudre. Il faut s'efforcer de repérer et traiter ce type de questions qui décrivent précisément la méthode de résolution.

Démonstration.
Soit $i \in \mathbb{N}^*$. On a alors :

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{4}\ \mathbb{P}([Z = i+1]) + \frac{1}{4}\ \mathbb{P}([Z = i]) \\
= \ & \frac{1}{4} \sum_{\ell=i+1}^{+\infty} \binom{\ell}{i+1} \left(\frac{1}{4}\right)^{\ell} + \frac{1}{4} \sum_{\ell=i}^{+\infty} \binom{\ell}{i} \left(\frac{1}{4}\right)^{\ell} && \textit{(d'après la question } \textbf{\textit{3.c)}}\textit{)} \\
= \ & \frac{1}{4} \sum_{\ell=i+1}^{+\infty} \binom{\ell}{i+1} \left(\frac{1}{4}\right)^{\ell} + \frac{1}{4} \sum_{\ell=i+1}^{+\infty} \binom{\ell}{i} \left(\frac{1}{4}\right)^{\ell} + \frac{1}{4} \binom{i}{i} \left(\frac{1}{4}\right)^{i} \\
= \ & \frac{1}{4} \sum_{\ell=i+1}^{+\infty} \left(\binom{\ell}{i+1} + \binom{\ell}{i}\right) \left(\frac{1}{4}\right)^{\ell} + \frac{1}{4} \left(\frac{1}{4}\right)^{i} && \textit{(en regroupant les sommes)} \\
= \ & \frac{1}{4} \sum_{\ell=i+1}^{+\infty} \binom{\ell+1}{i+1} \left(\frac{1}{4}\right)^{\ell} + \frac{1}{4} \left(\frac{1}{4}\right)^{i} && \textit{(par la formule du triangle de Pascal)} \\
= \ & \frac{1}{4} \sum_{\ell=i}^{+\infty} \binom{\ell+1}{i+1} \left(\frac{1}{4}\right)^{\ell} && \textit{(en remarquant } \tbinom{\ell+1}{i+1} = 1 \textit{ lorsque } \ell = i\textit{)} \\
= \ & \frac{1}{4} \sum_{\ell=i+1}^{+\infty} \binom{\ell}{i+1} \left(\frac{1}{4}\right)^{\ell-1} && \textit{(par décalage d'indice)} \\
= \ & \sum_{\ell=i+1}^{+\infty} \binom{\ell}{i+1} \left(\frac{1}{4}\right)^{\ell} \\
= \ & \mathbb{P}([Z = i+1]) && \textit{(d'après la question } \textbf{\textit{3.c)}}\textit{)}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{On a bien : } \forall i \in \mathbb{N}^*,\ \mathbb{P}([Z = i+1]) = \frac{1}{4}\ \mathbb{P}([Z = i+1]) + \frac{1}{4}\ \mathbb{P}([Z = i]).}$$

Commentaire

Dans la démonstration, on commence par $\frac{1}{4}\ \mathbb{P}([Z = i+1]) + \frac{1}{4}\ \mathbb{P}([Z = i])$ pour former finalement $\mathbb{P}([Z = i+1])$. Il y a deux raisons à cela :

× de manière générale, on part du plus compliqué pour aller vers le plus simple.

× on manipule, dans la démonstration, des sommes infinies. Ces sommes existent : on l'a démontré à l'aide de la formule des probabilités totales en question ***3.c)***. On peut alors regrouper ces sommes en une somme qui existe elle aussi (c'est la propriété de linéarité des sommes infinies qui le stipule). En revanche, si on part de $\mathbb{P}([Z = i+1])$, il va falloir découper en deux sommes. Pour ce faire, il faudra démontrer la convergence de ces deux sommes. Il conviendrait alors de travailler à l'aide de somme partielles (ce qui permet de s'assurer de la bonne existence de tous les objets) avant d'obtenir le résultat souhaité par passage à la limite.

□

f) En déduire la loi de Z.

Démonstration.

- Rappelons tout d'abord $Z(\Omega) = \mathbb{N}$.
- En question ***3.d)***, on a démontré : $\mathbb{P}\big([Z=0]\big) = \dfrac{1}{3}$ et $\mathbb{P}\big([Z=1]\big) = \dfrac{4}{9}$.
- Soit $i \in \mathbb{N}^*$. D'après la question précédente :
$$\mathbb{P}([Z=i+1]) = \frac{1}{4}\,\mathbb{P}([Z=i+1]) + \frac{1}{4}\,\mathbb{P}([Z=i])$$
Ainsi, en réordonnant :
$$\frac{3}{4}\,\mathbb{P}([Z=i+1]) = \frac{1}{4}\,\mathbb{P}([Z=i])$$
$$\boxed{\forall i \in \mathbb{N}^*,\ \mathbb{P}([Z=i+1]) = \frac{\cancel{4}}{3}\,\frac{1}{\cancel{4}}\,\mathbb{P}([Z=i]) = \frac{1}{3}\,\mathbb{P}([Z=i])}$$
- Par une récurrence immédiate, on a alors :
$$\forall i \in \mathbb{N}^*,\ \mathbb{P}([Z=i+1]) \ = \ \left(\frac{1}{3}\right)^i \mathbb{P}([Z=1]) \ = \ \left(\frac{1}{3}\right)^i \frac{4}{9}$$

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{En résumé : } Z(\Omega) = \mathbb{N},\ \mathbb{P}\big([Z=0]\big) = \dfrac{1}{3},\ \mathbb{P}\big([Z=1]\big) = \dfrac{4}{9} \text{ et enfin :} \\ \forall i \in \mathbb{N}^*,\ \mathbb{P}([Z=i+1]) \ = \ \left(\dfrac{1}{3}\right)^i \dfrac{4}{9}.\end{array}}$$

□

Partie II. Tirages sans remise

Dans cette partie, les tirages se font sans remise dans les deux urnes, jusqu'à ce que les urnes soient vides. On note X_n le nombre de paires obtenues à l'issue des n tirages.

A. Étude de cas particuliers

4. Déterminer la loi de X_1.

Démonstration.
La v.a.r. X_1 compte le nombre de paires obtenues à l'issue d'1 tirage dans des urnes contenant seulement 1 boule. Lors de ce tirage, on obtient forcément le couple $(1,1)$ qui est une paire.
Ainsi, la v.a.r. X_1 est constante égale à 1.

$$\boxed{\text{On a notamment : } X_1(\Omega) = \{1\} \text{ et } \mathbb{P}\big([X_1=1]\big) = 1.}$$

□

5. On suppose dans cette question que $n = 2$.
Combien y a-t-il de résultats possibles ? Quelles sont les valeurs prises par X_2 ?
On précisera pour chaque valeur prise par X_2, l'ensemble des événements élémentaires permettant de l'obtenir. En déduire la loi de X_2.

Démonstration.
Chaque urne contient deux boules. Ainsi, un 2-tirage est entièrement déterminé par :

× la boule blanche obtenue lors du premier tirage : 2 possibilités.

× la boule noire obtenue lors du premier tirage : 2 possibilités.

× la boule blanche obtenue lors du deuxième tirage : 1 possibilité.

× le numéro de la deuxième boule noire obtenue : 1 possibilité.

$$\boxed{\text{Il y a donc } 2 \times 2 \times 1 \times 1 = 4 \text{ résultats possibles.}}$$

- La v.a.r. X_2 compte le nombre de paires obtenues lors de ces deux tirages.
  Deux cas se présentent.
  - × Si on obtient une paire lors du premier tirage (par exemple $(1,1)$), alors il reste deux boules (une dans chaque urne) numérotées par le même numéro (les deux boules numérotées 2).
    Lors du deuxième tirage, on obtient donc forcément une paire.
    Dans ce cas, X_2 prend la valeur 2.

    $$\boxed{\text{Plus précisément, } X_2(\omega) = 2 \text{ si et seulement si } \omega = \big((1,1),(2,2)\big) \text{ ou } \omega = \big((2,2),(1,1)\big).}$$

  - × Si on n'obtient pas une paire lors du premier tirage, c'est qu'on a tiré une boule numérotée 1 et une boule numérotrée 2. À l'issue de ce tirage, il reste une boule dans chaque urne : l'une numérotée 1, l'autre numérotée 2.
    Lors du deuxième tirage, on obtient donc forcément un couple qui n'est pas une paire.
    Dans ce cas, X_2 prend la valeur 0.

    $$\boxed{\text{Plus précisément, } X_2(\omega) = 0 \text{ si et seulement si } \omega = \big((1,2),(2,1)\big) \text{ ou } \omega = \big((2,1),(1,2)\big).}$$

$$\boxed{X_2(\Omega) = \{0,2\}}$$

Commentaire

- Il ne faut pas confondre les deux propriétés suivantes.
  – La v.a.r. X_2 prend la valeur 2 : cette propriété signifie qu'il existe (au moins) un 2-tirage $\omega \in \Omega$ tel que $X_2(\omega) = 2$. Autrement dit :

  $$\boxed{\text{La v.a.r. } X_2 \text{ prend la valeur 2} \quad \Leftrightarrow \quad \exists \omega \in \Omega,\ X(\omega) = 2}$$

  – $X_2 = 2$: cette propriété signifie que X_2 est la v.a.r. constante égale à 2. Autrement dit, pour tout 2-tirage $\omega \in \Omega$ on a : $X_2(\omega) = 2$. Autrement dit :

  $$\boxed{\text{La v.a.r. } X_2 \text{ prend la valeur 2} \quad \Leftrightarrow \quad \exists \omega \in \Omega,\ X(\omega) = 2}$$

  Certains énoncés (comme `ECRICOME 2017`) se permettent de confondre ces deux propriétés pour éviter l'introduction des tirages ω, objet considérés comme difficile à manipuler. On peut s'interroger sur l'intérêt d'une telle pratique consistant à confondre la quantification universelle ($\forall$) et la quantification existentielle ($\exists$).
- L'énoncé propose de préciser les événements élémentaires permettant d'obtenir chacune des valeurs de X_2. Rappelons qu'un événement élémentaire est un événement constitué d'un seul tirage ω. Il faut donc comprendre qu'on demande les tirages ω qui permettent à X_2 de prendre la valeur étudiée. Autrement dit, il est demandé d'exhiber, dans le premier cas, les tirages ω qui réalisent l'événement $[X_2 = 2]$ et, dans le deuxième cas, les tirages qui réalisent $[X_2 = 0]$.

- Chacun des 4 tirages possibles étant équiprobables, on en déduit :

$$\mathbb{P}\big([X_2 = 2]\big) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad \mathbb{P}\big([X_2 = 0]\big) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

$$\boxed{\text{On en conclut : } X_2(\Omega) = \{0,2\},\ \mathbb{P}\big([X_2 = 0]\big) = \frac{1}{2} = \mathbb{P}\big([X_2 = 2]\big).}$$

Commentaire

Le fait que X_2 ne prenne que deux valeurs ne signifie pas que X_2 suit une loi de Bernoulli.
L'ensemble image d'une v.a.r. X suivant une loi de Bernoulli est $X(\Omega) = \{0, 1\}$.
Ainsi, X_2 ne suit pas une loi de Bernoulli.

□

B. Étude du cas général

On se place dans le cas où n est un entier naturel non nul.

6. a) Décrire l'univers Ω des événements observables.

Démonstration.

- Les deux urnes contiennent des boules dont le numéro est dans l'ensemble $[\![1, n]\!]$.
- Chaque tirage résulte donc en un couple d'éléments de $[\![1, n]\!]$.
  Autrement dit, le résultat d'un tirage est un élément de $[\![1, n]\!] \times [\![1, n]\!]$.
- Les tirages étant effectués sans remise, Ω est constitué des n-uplets d'éléments distincts de l'ensemble $[\![1, n]\!] \times [\![1, n]\!]$.

$$\boxed{\Omega \text{ est l'ensemble des } n\text{-arrangements de l'ensemble } [\![1, n]\!] \times [\![1, n]\!].}$$

□

b) Déterminer le nombre total de suites de tirages possibles.

Démonstration.
Un n-tirages de Ω est entièrement déterminé par :

× le couple obtenu lors du 1^{er} tirage : $n \times n$ possibilités.
(avant le 1^{er} tirage, chaque urne contient n boules)

× le couple obtenu lors du $2^{\text{ème}}$ tirage : $(n-1) \times (n-1)$ possibilités.
(avant le $2^{\text{ème}}$ tirage, chaque urne contient $n-1$ boules)

× ...

× le couple obtenu lors du $n^{\text{ème}}$ tirage : 1×1 possibilités.
(avant le $n^{\text{ème}}$ tirage, chaque urne contient 1 boule)

Il y a en tout :

$$(n \times n) \times \big((n-1) \times (n-1)\big) \times \ldots \times (1 \times 1) \ = \ \big(n \times (n-1) \times \ldots \times 1\big)^2 \ = \ \big(n!\big)^2$$

$$\boxed{\text{On en déduit : } \mathrm{Card}(\Omega) = \big(n!\big)^2.}$$

□

c) Déterminer l'ensemble des valeurs prises par X_n.

Démonstration.

- Dans le cas $n = 1$, on a démontré $X_1(\Omega) = \{1\}$.
- Dans le cas $n = 2$, on a démontré $X_2(\Omega) = \{0, 2\}$.
- Étudions maintenant le cas $n \geqslant 3$.
  × si $\omega = \big((1, 2), (2, 3), \ldots, (n-1, n), (n, 1)\big)$, alors $X_n(\omega) = 0$.
  × soit $i \in [\![1, n-2]\!]$. Considérons le n-tirage :

$$\omega \ = \ \big((1, 1), \ldots, (i, i), (i+1, i+2), \ldots, (n-1, n), (n, i)\big)$$

(i paires suivies de $n - i$ couples qui ne sont pas des paires)
Alors $X_n(\omega) = i$.

- × si $\omega = \big((1,1), \ldots, (n,n)\big)$, alors $X_n(\omega) = n$.
- × enfin, notons que X_n ne peut prendre la valeur $n-1$. En effet, si un n-tirage contient $n-1$ paires, les deux numéros non utilisés dans ces paires forment eux-mêmes une paire.
  Ainsi, un n-tirage contenant $n-1$ paires contient donc n paires.

$$\boxed{\text{Dans le cas } n \geqslant 3,\ X_n(\Omega) = [\![0, n-2]\!] \ \cup\ \{n\}.}$$

□

Pour tout entier naturel k, on note $a(n,k)$ le cardinal de $\{\omega \in \Omega \mid X_n(\omega) = k\}$.
Par convention, $a(0,0) = 1$.

7. a) Préciser la valeur de $\sum\limits_{j=0}^{n} a(n,j)$.

Démonstration.

- Comme $X_n(\Omega) \subset [\![0,n]\!]$, la famille $\big(\,[X_n = j]\,\big)_{j \in [\![0,n]\!]}$ forme un système complet d'événements.
  On en déduit :
  $$\sum_{j=0}^{n} \mathbb{P}\big(\,[X_n = j]\,\big) \ = \ 1$$
- Chacun des tirages étant équiprobables, on en déduit, pour tout $j \in [\![0,n]\!]$:
  $$\mathbb{P}\big(\,[X_n = j]\,\big) \ = \ \frac{\text{Card}\,\big(\,[X_n = j]\,\big)}{\text{Card}\,(\Omega)}$$
- On a donc : $\sum\limits_{j=0}^{n} \dfrac{\text{Card}\,\big(\,[X_n = j]\,\big)}{\text{Card}\,(\Omega)} \ = \ 1$. Et ainsi :
  $$\begin{array}{ccc} \sum\limits_{j=0}^{n} \text{Card}\,\big(\,[X_n = j]\,\big) & = & \text{Card}\,(\Omega) \\ \shortparallel & & \shortparallel \\ \sum\limits_{j=0}^{n} a(n,j) & & \big(n!\big)^2 \end{array}$$

$$\boxed{\sum_{j=0}^{n} a(n,j) = \big(n!\big)^2}$$

Commentaire

- Rappelons que si X est une v.a.r. **discrète**, la famille $\big(\,[X = x]\,\big)_{x \in X(\Omega)}$ forme un système complet d'événements, appelé système complet d'événements associé à X.
- On rappelle de plus que la famille obtenue en ajoutant l'événement impossible $\varnothing$ à un système complet d'événements est encore un système complet d'événements (les événements de cette famille sont encore 2 à 2 incompatibles et leur réunion forme Ω). Ce résultat est très pratique dans les cas où on n'a pas déterminé précisément l'ensemble $X(\Omega)$ d'une v.a.r. X **discrète**. Plus précisément :
  $$X(\Omega) \subset E \ \Rightarrow \ \big(\,[X = x]\,\big)_{x \in E} \text{ forme un système complet d'événements}$$
  Dans la question traitée : $X_n(\Omega) = [\![1,n]\!] \setminus \{n-1\}$.
  Ainsi, la famille $\big(\,[X = j]\,\big)_{j \in [\![1,n]\!] \setminus \{n-1\}}$ forme un système complet d'événements.
  La famille $\big(\,[X = j]\,\big)_{j \in [\![1,n]\!]}$ forme elle aussi un système complet d'événements.

□

b) Déterminer $a(n, n)$ et $a(n, n-1)$.

Démonstration.

- Tout d'abord, rappelons : $a(n, n) = \text{Card}\big([X_n = n]\big)$.
  Il s'agit donc de dénombrer les n-tirages réalisant $[X_n = n]$.

  Un n-tirage réalisant $[X_n = n]$ est un n-tirage constitué de n paires.
  Un tel n-tirage est entièrement déterminé par :

  × la position de la paire $(1, 1)$: n possibilités.

  × la position de la paire $(2, 2)$ parmi les $n-1$ positions restantes : $n-1$ possibilités.

  × ...

  × la position de la paire (n, n) parmi la seule position restante : 1 possibilité.

  Il y a donc $n!$ tels n-tirages.

  $$\boxed{a(n, n) = \text{Card}\big([X_n = n]\big) = n!}$$

- Rappelons maintenant : $a(n, n-1) = \text{Card}\big([X_n = n-1]\big)$.
  On a démontré en question ***6.c)*** que X_n ne peut pas prendre la valeur $n-1$.
  Ainsi : $[X_n = n-1] = \varnothing$.

  $$\boxed{a(n, n-1) = \text{Card}\big([X_n = n-1]\big) = 0}$$

□

8. a) Justifier, pour tout entier j tel que $0 \leqslant j \leqslant n$, l'égalité suivante :

$$\frac{a(n, j)}{n!} = \binom{n}{j} \frac{a(n-j, 0)}{(n-j)!}$$

En déduire la relation :

$$\sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} \frac{a(j, 0)}{j!} = n!$$

Donner l'expression de $a(n, 0)$ en fonction des nombres $\big(a(j, 0)\big)_{0 \leqslant j \leqslant n-1}$.

Démonstration.
Soit $j \in [\![0, n]\!]$.

- Il s'agit de dénombrer l'ensemble $[X_n = j]$.
  Un n-tirage réalisant $[X_n = j]$ est un n-tirage constitué exactement de j paires.
  Un tel n-tirage est entièrement déterminé par :

  × les j entiers de $[\![1, n]\!]$ apparaissant dans les paires : $\binom{n}{j}$ possibilités.

  × les j positions du n-tirage qui contiennent des paires : $\binom{n}{j}$ possibilités.

  × la manière dont les j paires sont placées dans les j positions choisies : $j!$ possibilités.

  × le choix et la position des $n-j$ couples qui ne sont pas des paires dans les $n-j$ positions restantes : $a(n-j, 0)$ possibilités. $(*)$

  Il y a donc $\binom{j}{n} \times \binom{j}{n} \times j! \times a(n-j, 0)$ tels n-tirages. Ainsi :

  $$a(n, j) = \binom{j}{n} \binom{j}{n} j!\, a(n-j, 0) = \binom{j}{n} \frac{n!}{\cancel{j!}(n-j)!} \cancel{j!}\, a(n-j, 0)$$

  $$\boxed{\text{On a bien : } \frac{a(n, j)}{n!} = \binom{n}{j} \frac{a(n-j, 0)}{(n-j)!}}$$

$(*)$ Détaillons ce point.
À ce stade, les j paires participant au n-tirage ont déjà été choisies. Les couples restants (ce ne sont pas des paires) sont donc construits à l'aide de $n-j$ entiers de $[\![1,n]\!]$.
Renumérotons ces entiers pour les appeler, du plus petit au plus grand : 1, 2, ..., $(n-j)$.
On peut de même renuméroter les $n-j$ positions restantes.

Il s'agit alors de former $n-j$ couples distincts d'éléments de $[\![1,n-j]\!]$ qui ne sont pas des paires. On forme ainsi un $(n-j)$-uplet d'éléments de $[\![1,n-j]\!] \times [\![1,n-j]\!]$ constitué d'éléments distincts et qui ne sont pas des paires. Autrement dit, on forme un $(n-j)$-tirage qui réalise l'événement $[X_{n-j} = 0]$.

- On a alors :

$$\begin{aligned}
\sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} \frac{a(j,0)}{j!} &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{n-k} \frac{a(n-k,0)}{(n-k)!} && \textit{(en posant le changement de variable } k = n-j\textit{)} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{a(n-k,0)}{(n-k)!} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \frac{a(n,k)}{n!} = \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} a(n,k) \\
&= \frac{1}{\cancel{n!}} \, (n!)^{\cancel{2}} = n! && \textit{(d'après la question \textbf{7.a)})}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{On a bien : } \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} \frac{a(j,0)}{j!} = n!.}$$

Commentaire

- Détaillons le changement de variable effectué dans cette question.
  Considérons une suite de réels $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}
\sum_{j=0}^{n} u_j &= u_0 + u_1 + \ldots + u_{n-1} + u_n \\
&= u_n + u_{n-1} + \ldots + u_1 + u_0 \\
&= \sum_{k=0}^{n} u_{n-k}
\end{aligned}$$

  On appelle parfois ce procédé : sommation dans l'autre sens.
- Il faut faire attention aux indices de la somme de départ.
  Par exemple, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\sum_{j=1}^{n} u_j = \sum_{k=0}^{n-1} u_{n-k}$$

- Enfin :

$$\begin{aligned}
\sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} \frac{a(j,0)}{j!} &= \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n}{j} \frac{a(j,0)}{j!} + \binom{n}{n} \frac{a(n,0)}{n!} && \textit{(par linéarité de la somme)} \\
&= n! && \textit{(d'après ce qui précède)}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Comme } \binom{n}{n} = 1, \text{ on a : } a(n,0) = n! \left(n! - \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n}{j} \frac{a(j,0)}{j!} \right)}$$

$\square$

b) Soit k un entier compris entre 1 et n et i un entier compris entre 0 et $k-1$.
Justifier l'égalité : $\dbinom{j}{i}\dbinom{k}{j} = \dbinom{k}{i}\dbinom{k-i}{j-i}$, puis montrer :

$$\sum_{j=i}^{k} (-1)^j \binom{j}{i}\binom{k}{j} = 0$$

En déduire la valeur de la somme :

$$\sum_{j=i}^{k-1} (-1)^j \binom{j}{i}\binom{k}{j}$$

Démonstration.
Rappelons que l'on choisit $k \in [\![1,n]\!]$ et $i \in [\![0,k-1]\!]$.

- Tout d'abord :

$$\begin{aligned}
\binom{k}{i}\binom{k-i}{j-i} &= \frac{k!}{i!\,\cancel{(k-i)!}}\ \frac{\cancel{(k-i)!}}{(j-i)!\,\big((k-\cancel{i})-(j-\cancel{i})\big)!} \\
&= \frac{1}{i!\,(j-i)!}\ \frac{k!}{(k-j)!} \\
&= \frac{j!}{i!\,(j-i)!}\ \frac{k!}{j!\,(k-j)!} && \textit{(en multiplicant par } \tfrac{j!}{j!}\textit{)} \\
&= \binom{j}{i}\binom{k}{j}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Ainsi : } \forall k \in [\![1,n]\!],\ \forall i \in [\![0,k-1]\!],\ \binom{j}{i}\binom{k}{j} = \binom{k}{i}\binom{k-i}{j-i}.}$$

Commentaire

Cette relation sur les coefficients binomiaux peut aussi se démontrer par dénombrement.
Pour ce faire, on considère un ensemble E à k éléments.
(on peut penser à une pièce qui contient k individus)
On souhaite alors construire un couple (P,Q) de parties de E où P est une partie à j éléments de E et Q est une partie de P qui contient i éléments *(on peut penser à choisir dans la pièce un groupe de j individus qui seront des représentants régionaux et, parmi ces individus, choisir i représentants nationaux)*.
Pour ce faire, on peut procéder de deux manières.

1) On choisit d'abord la partie P à j éléments de E : $\binom{k}{j}$ possibilités.
On choisit alors la partie Q à i de cette partie P : $\binom{j}{i}$ possibilités.
(on choisit d'abord les j représentants régionaux et on élit parmi eux i représentants nationaux)
Ainsi, il y a $\binom{j}{i}\binom{k}{j}$ manières de construire le couple (P,Q).

2) On choisit d'abord la partie Q à i éléments de E : $\binom{k}{i}$ possibilités.
On choisit ensuite $j-i$ éléments dans $E \setminus Q$ que l'on ajoute à Q pour former P : $\binom{k-i}{j-i}$ possibilités.
(on choisit d'abord les i représentants nationaux -qui seront aussi représentants régionaux- puis on ajoute les $j-i$ représentants régionaux manquants)
Ainsi, il y a $\binom{k}{i}\binom{k-i}{j-i}$ manières de construire le couple (P,Q).

On retrouve ainsi le résultat.

- On a alors :

$$\begin{array}{rcll}
\displaystyle\sum_{j=i}^{k} (-1)^j \binom{j}{i} \binom{k}{j} & = & \displaystyle\sum_{j=i}^{k} (-1)^j \binom{k}{i} \binom{k-i}{j-i} & \textit{(d'après ce qui précède)} \\
& = & \displaystyle\binom{k}{i} \sum_{j=i}^{k} (-1)^j \binom{k-i}{j-i} & \textit{(car } \binom{k}{i} \textit{ ne dépend pas de l'indice de sommation } j\textit{)} \\
& = & \displaystyle\binom{k}{i} \sum_{j=0}^{k-i} (-1)^{j+i} \binom{k-i}{j} & \textit{(par décalage d'indice)} \\
& = & \displaystyle(-1)^i \binom{k}{i} \sum_{j=0}^{k-i} (-1)^j \binom{k-i}{j} & \textit{(car } (-1)^i \textit{ ne dépend pas de l'indice de sommation } j\textit{)} \\
& = & \displaystyle(-1)^i \binom{k}{i} \sum_{j=0}^{k-i} \binom{k-i}{j} 1^{(k-i)-j} \times (-1)^j & \textit{(en multipliant par } 1^{(k-i)-j} = 1\textit{)} \\
& = & \displaystyle(-1)^i \binom{k}{i} \big((-1)+1\big)^{k-i} & \textit{(en reconnaissant la formule du binôme de Newton)} \\
& = & 0 &
\end{array}$$

$$\boxed{\text{On a bien : } \sum_{j=i}^{k} (-1)^j \binom{j}{i} \binom{k}{j} = 0.}$$

- Enfin :

$$\begin{array}{rcll}
\displaystyle\sum_{j=i}^{k} (-1)^j \binom{j}{i} \binom{k}{j} & = & \displaystyle\sum_{j=i}^{k-1} (-1)^j \binom{j}{i} \binom{k}{j} + (-1)^k \binom{k}{i} \binom{k}{k} & \textit{(par linéarité de la somme)} \\
& = & 0 & \textit{(d'après ce qui précède)}
\end{array}$$

$$\boxed{\text{On en déduit : } \sum_{j=i}^{k-1} (-1)^j \binom{j}{i} \binom{k}{j} = -(-1)^k \binom{k}{i} = (-1)^{k+1} \binom{k}{i}.}$$

□

9. a) Soit k un entier tel que $1 \leqslant k \leqslant n$.
On suppose que, pour tout entier j compris entre 0 et $k-1$, on a les k égalités :

$$a(j,0) = j! \sum_{i=0}^{j} \binom{j}{i} (-1)^{j-i} \, i!$$

Montrer l'égalité :

$$a(k,0) = k! \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} (-1)^{k-i} \, i!$$

(On pourra utiliser l'expression, pour $n = k$, de $a(n,0)$ trouvée dans la question ***8.a)***)

Démonstration.

- En question ***8.a)*** on a démontré que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$a(n,0) = n! \left(n! - \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n}{j} \frac{a(j,0)}{j!} \right)$$

- On a alors :

$$\begin{array}{rcll}
a(k,0) & = & k! \left(k! - \sum\limits_{j=0}^{k-1} \dbinom{k}{j} \dfrac{a(j,0)}{j!} \right) & \textit{(en appliquant la formule précédente à } n = k \in \mathbb{N}^*\textit{)} \\[2ex]
& = & k! \left(k! - \sum\limits_{j=0}^{k-1} \dbinom{k}{j} \dfrac{1}{\cancel{j!}} \left(\cancel{j!} \sum\limits_{i=0}^{j} \dbinom{j}{i} \ (-1)^{j-i} \ i! \right) \right) & \textit{(par hypothèse de l'énoncé avec } j \in [\![0, k-1]\!]\textit{)} \\[2ex]
& = & k! \left(k! - \sum\limits_{j=0}^{k-1} \left(\sum\limits_{i=0}^{j} \dbinom{k}{j} \dbinom{j}{i} \ (-1)^{j-i} \ i! \right) \right) & \textit{(car } \binom{k}{j} \textit{ ne dépend pas de l'indice de sommation } i\textit{)} \\[2ex]
& = & k! \left(k! - \sum\limits_{0 \leqslant i \leqslant j \leqslant k-1} \dbinom{k}{j} \dbinom{j}{i} \ (-1)^{j-i} \ i! \right) & \textit{(par définition des sommes doubles)} \\[2ex]
& = & k! \left(k! - \sum\limits_{i=0}^{k-1} \left(\sum\limits_{j=i}^{k-1} \dbinom{k}{j} \dbinom{j}{i} \ (-1)^{j-i} \ i! \right) \right) & \textit{(par définition des sommes doubles)} \\[2ex]
& = & k! \left(k! - \sum\limits_{i=0}^{k-1} \left(\dfrac{i!}{(-1)^i} \sum\limits_{j=i}^{k-1} \dbinom{k}{j} \dbinom{j}{i} \ (-1)^{j} \right) \right) & \textit{(car } (-1)^{-i} \, i! \textit{ ne dépend pas de l'indice de sommation } j\textit{)} \\[2ex]
& = & k! \left(k! - \sum\limits_{i=0}^{k-1} \dfrac{i!}{(-1)^i} \ (-1)^{k+1} \dbinom{k}{i} \right) & \textit{(d'après la question précédente)} \\[2ex]
& = & k! \left(k! - (-1) \sum\limits_{i=0}^{k-1} \dbinom{k}{i} \ (-1)^{k-i} \, i! \right) & \textit{(car } -1 \textit{ ne dépend pas de l'indice de sommation } i\textit{)} \\[2ex]
& = & k! \left(\sum\limits_{i=0}^{k} \dbinom{k}{i} \ (-1)^{k-i} \, i! \right) &
\end{array}$$

$$\boxed{a(k,0) \ = \ k! \left(\sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} \ (-1)^{k-i} \, i! \right).}$$

□

b) En déduire, pour tout entier naturel non nul k, la valeur de $a(k,0)$.

Démonstration.
Démontrons par récurrence **forte** : $\forall k \in \mathbb{N}, \mathcal{P}(k)$ où $\mathcal{P}(k) : a(k,0) \ = \ k! \left(\sum\limits_{i=0}^{k} \dbinom{k}{i} \ (-1)^{k-i} \, i! \right)$.

- ▸ **Initialisation** :
  - D'une part : $a(0,0) = 1$ par convention.
  - D'autre part : $0! \left(\sum\limits_{i=0}^{0} \dbinom{0}{i} \ (-1)^{0-i} \, i! \right) = \dbinom{0}{0} \ (-1)^{0-0} \, 0! = 1$.

  D'où $\mathcal{P}(0)$.
- ▸ **Hérédité** : soit $k \in \mathbb{N}^*$. $(*)$
  Supposons : $\forall j \in [\![0, k-1]\!], \mathcal{P}(j)$ *(ce qui signifie que la propriété est vraie jusqu'au rang $k-1$)* et démontrons $\mathcal{P}(k)$.
  C'est le cas d'après la question ***9.a)***.

$$\boxed{\text{Par principe de récurrence : } \forall k \in \mathbb{N}, \ a(k,0) \ = \ k! \left(\sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} \ (-1)^{k-i} \, i! \right).}$$

Commentaire

- Lorsque l'on procède par récurrence pour démontrer : $\forall k \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(k)$, l'étape d'hérédité consiste à démontrer la propriété :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \big(\mathcal{P}(k) \ \Rightarrow\ \mathcal{P}(k+1)\big)$$

Cela permettre de comprendre le schéma de rédaction associé à cette étape.
On commence par introduire k : « Soit $k \in \mathbb{N}$ ».
Puis on démontre l'implication, ce qui se fait à l'aide du schéma de rédaction suivant : « Supposons $\mathcal{P}(k)$ et démontrons $\mathcal{P}(k+1)$ ».

- Lorsque l'on démontre : $\forall k \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(k)$ par récurrence forte, l'étape d'hérédité est différente :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \Big(\big(\forall j \in [\![0, k]\!], \mathcal{P}(j)\big) \ \Rightarrow\ \mathcal{P}(k+1) \Big)$$

ce qui peut encore s'écrire :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \Big(\big(\forall j \in [\![0, k-1]\!], \mathcal{P}(j)\big) \ \Rightarrow\ \mathcal{P}(k) \Big)$$

C'est cette écriture qui explique la rédaction de la question $(*)$.

- L'énoncé demande de démontrer la propriété pour tout entier $k \in \mathbb{N}^*$. Évidemment, en la démontrant pour tout $k \in \mathbb{N}$ on répond convenablement à la question. $\square$

c) Déterminer l'ensemble des valeurs prises par X_n et exprimer la loi de X_n à l'aide d'une somme.

Démonstration.

- On a déjà vu en question ***6.c)*** : $X_n(\Omega) = [\![0, n-2]\!] \cup \{n\}$.
- Soit $j \in [\![0, n-2]\!] \cup \{n\}$.

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\big([X_n = j]\big) &= \frac{\mathrm{Card}\big([X_n = j]\big)}{\mathrm{Card}(\Omega)} \\
&= \frac{1}{(n!)^2}\, a(n,j) && \textit{(d'après la question } \textbf{\textit{6.b)}}\textit{)} \\
&= \frac{1}{(n!)^{\cancel{2}}} \left(\cancel{n!} \binom{n}{j} \frac{a(n-j,0)}{(n-j)!} \right) && \textit{(d'après la question } \textbf{\textit{8.a)}}\textit{)} \\
&= \frac{1}{n!\, \cancel{(n-j)!}} \binom{n}{j} \left(\cancel{(n-j)!} \sum_{i=0}^{n-j} \binom{n-j}{i} (-1)^{n-j-i}\ i! \right) && \textit{(d'après la question } \textbf{\textit{9.b)}} \textit{ avec } k = n-j \in \mathbb{N}\textit{)} \\
&= \frac{1}{\cancel{n!}} \frac{\cancel{n!}}{j!\,(n-j)!} \left(\sum_{i=0}^{n-j} \frac{(n-j)!}{\cancel{i!}\,(n-j-i)!} (-1)^{n-j-i}\ \cancel{i!} \right) \\
&= \frac{\cancel{(n-j)!}}{j!\,\cancel{(n-j)!}} \left(\sum_{i=0}^{n-j} \frac{(-1)^{(n-j)-i}}{((n-j)-i)!} \right) \\
&= \frac{1}{j!} \left(\sum_{i=0}^{n-j} \frac{(-1)^k}{k!} \right) && \textit{(avec le décalage d'indice } k = (n-j)-i\textit{)}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\forall j \in [\![0, n-2]\!] \cup \{n\},\ \mathbb{P}\big([X_n = j]\big) = \frac{1}{j!} \left(\sum_{i=0}^{n-j} \frac{(-1)^k}{k!} \right)}$$

Commentaire

- On ne se sert jamais dans la démonstration du fait que j est différent de $n-1$. Ainsi, la formule démontrée est aussi vérifiée pour $j = n-1$.
  On peut le vérifier par le calcul :
  $$\begin{aligned}\frac{1}{(n-1)!} \sum_{i=0}^{n-(n-1)} \frac{(-1)^k}{k!} &= \frac{1}{(n-1)!} \sum_{i=0}^{1} \frac{(-1)^k}{k!} \\ &= \frac{1}{(n-1)!} \left(\frac{(-1)^0}{0!} + \frac{(-1)^1}{1!} \right) \\ &= \frac{1}{(n-1)!} \big(1 + (-1)\big) \ = \ 0\end{aligned}$$
  Cela correspond à ce que l'on doit trouver car : $\mathbb{P}\big([X_n = n-1] \big) = \mathbb{P}(\varnothing) = 0$.
- On peut aussi, à l'aide de ce que l'on a démontré en question ***7.b)***, vérifier par le calcul que la formule démontrée dans cette question est bien vérifiée pour $j = n$:
  $$\begin{aligned}\frac{1}{n!} \sum_{i=0}^{n-n} \frac{(-1)^k}{k!} &= \frac{1}{n!} \sum_{i=0}^{0} \frac{(-1)^k}{k!} \\ &= \frac{1}{n!} \frac{(-1)^0}{0!} \ = \ \frac{1}{n!} \\ &= \frac{n!}{\big(n!\big)^2} \ = \ \frac{\mathrm{Card}\big([X_n = n] \big)}{\mathrm{Card}(\Omega)} \ = \ \mathbb{P}\big([X_n = n] \big)\end{aligned}$$

□

Partie III. Tirages mixtes

Dans cette partie, les tirages se font sans remise dans l'urne blanche et avec remise dans l'urne noire, jusqu'à ce que l'urne blanche soit vide. On note X_n, le nombre de paires obtenues à l'issue des n tirages.

10. a) Montrer que X_n suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.

Démonstration.

- Notons tout d'abord que l'expérience comprend au plus n tirages puisqu'on effectue des tirages sans remise dans l'urne blanche. Le résultat d'un tirage est un couple de $[\![1, n]\!] \times [\![1, n]\!]$. L'univers Ω est constitué des n-tirages constitués de n couples tels que :
  - × le premier élément de chaque couple n'apparaît qu'une fois dans le n-tirage (le tirage des boules blanches se fait avec remise).
  - × le deuxième élément de chaque couple est un entier quelconque de $[\![1, n]\!]$ (les répétitions sont permises car les tirages se font avec remise dans l'urne noire).

  Ainsi, un n-tirage de Ω est entièrement déterminé par :
  - × la position des n premiers éléments de chaque couple : $n!$ possibilités.
  - × les deuxièmes éléments de chaque couple : n^n possibilités.

  $$\boxed{\text{On en déduit : } \mathrm{Card}(\Omega) = n!\, n^n.}$$
- D'autre part, l'expérience comprenant au plus n tirages, on peut donc obtenir au maximum n paires.

  $$\boxed{\text{On en déduit : } X_n(\Omega) \subset [\![0, n]\!].}$$

- Soit $j \in [\![0, n]\!]$.
Un n-tirage réalisant $[X_n = j]$ est un n-uplet d'éléments de $[\![1, n]\!] \times [\![1, n]\!]$ qui contient j paires.
Plus précisément, un tel n-tirage est entièrement déterminé par :
  - × les j entiers de $[\![1, n]\!]$ apparaissant dans les paires : $\binom{n}{j}$ possibilités.
  - × les j positions du n-tirage qui contiennent des paires : $\binom{n}{j}$ possibilités.
  - × la manière dont les j paires sont placées dans les j positions choisies : $j!$ possibilités.
  - × la manière dont les $(n-j)$ numéros de boules blanches apparaissent dans les $n-j$ positions restantes : $(n-j)!$ possibilités.
  - × les choix des $(n-j)$ numéros de boules noires permettant de former des couples qui ne sont pas des paires : $(n-1)^{n-j}$ possibilités.

  En effet, pour former un couple qui n'est pas une paire, on choisit un entier de $[\![1, n]\!]$ qui n'est pas celui choisi pour la boule blanche : $n-1$ possibilités pour chacun des ces $n-j$ numéros.

  Il y a donc $\binom{n}{j} \binom{n}{j} j!\,(n-j)!\,(n-1)^{n-j}$ tels n-tirages.

$$\boxed{\text{Card}\left([X_n = j]\right) = \binom{n}{j} \binom{n}{j} j!\,(n-j)!\,(n-1)^{n-j}}$$

- On en déduit :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}([X_n = j]) &= \frac{\text{Card}\left([X_n = j]\right)}{\text{Card}(\Omega)} \\
&= \frac{\binom{n}{j}\binom{n}{j} j!\,(n-j)!\,(n-1)^{n-j}}{n!\,n^n} \\
&= \binom{n}{j}\binom{n}{j} \frac{j!\,(n-j)!}{n!} \frac{(n-1)^{n-j}}{n^n} \\
&= \binom{n}{j}\cancel{\binom{n}{j}} \cancel{\frac{j!\,(n-j)!}{n!}} \frac{1}{n^j} \frac{(n-1)^{n-j}}{n^{n-j}} \\
&= \binom{n}{j} \left(\frac{1}{n}\right)^j \left(\frac{n-1}{n}\right)^{n-j} = \binom{n}{j} \left(\frac{1}{n}\right)^j \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n-j}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{On en déduit : } X_n \hookrightarrow \mathcal{B}\left(n, \frac{1}{n}\right).}$$

□

b) Donner, sans démonstration, l'espérance et la variance de X_n.

Démonstration.

$$\boxed{\begin{gathered}\text{Comme } X_n \hookrightarrow \mathcal{B}\left(n, \frac{1}{n}\right) \text{ alors } X_n \text{ admet une espérance et une variance. De plus :} \\ \mathbb{E}(X_n) = n\,\frac{1}{n} = 1 \quad \text{et} \quad \mathbb{V}(X_n) = n\,\frac{1}{n}\left(1 - \frac{1}{n}\right) = 1 - \frac{1}{n}\end{gathered}}$$

□

On désire modéliser cette expérience. On suppose que n est une constante fixée.

11. Donner la commande permettant de stocker dans une variable un vecteur ligne de longueur n, contenant les entiers de 1 à n.

Démonstration.

```
tab = 1:n
```

$\square$

12. ***a)*** Soit `V` un vecteur ligne de longueur `p` et `i` un entier compris entre 1 et `p`.
Que renvoie la fonction suivante ?

```
function W = suppression(V, i)
  p = length(V)
  W = V([1:(i-1), (i+1):p])
endfunction
```

Démonstration.

- L'instruction `[1:(i-1), (i+1):p]` pemet de créer une matrice ligne contenant tous les entiers de `1` à `p` à l'exception de l'entier `i`. Pour ce faire, on crée d'abord la matrice ligne des entiers `1` à `(i-1)` et on lui adjoint la matrice ligne des entiers `(i+1)` à `p`.
- Ainsi, l'instruction `V([1:(i-1), (i+1):p])` permet d'accéder à tous les éléments du vecteur `V` hormis le `i`$^{\text{ème}}$. Le résultat est un vecteur ligne de taille `p-1` stocké dans une variable `W`.

La fonction `suppression` prend en paramètre un vecteur `V` et un entier `i` et crée le vecteur `W`, copie de `V` dans laquelle le `i`$^{\text{ème}}$ élément a été supprimé.

$\square$

b) On rappelle que l'appel `grand(1,1,'uin',a,b)` renvoie un nombre au hasard parmi les entiers de `a` à `b`. Compléter la fonction suivante pour qu'elle simule le tirage sans remise et au hasard des n boules numérotées. La variable `UrneB` est une matrice ligne contenant les numéros des boules pouvant être obtenues à chaque tirage. Elle doit être mise à jour à chacun d'entre eux. La variable `ListeB` est une matrice ligne contenant dans l'ordre les numéros des boules obtenues lors de la succession des n tirages.

```
function ListeB = tirageSR(n)
  ListeB = ...
  UrneB = ...
  for j = 1:n
    m = length(UrneB)
    i = ...
    ListeB(j) = UrneB(i)
    UrneB = suppression(UrneB,i)
  end
endfunction
```

Démonstration.

- **Début du programme**
  - Initialement, l'urne blanche contient toutes les boules numérotées de 1 à n. On code cette information à l'aide d'une variable `UrneB` qui contient initialement la matrice ligne `1:n`.
  - Le vecteur `ListeB` a pour but de contenir le résultat des tirages successifs dans l'urne blanche. Initialement, c'est un vecteur ligne de longueur n.

On en déduit les 2 lignes suivantes.

```
ListeB = zeros(1, n)
UrneB = 1:n
```

- **Structure itérative**
  Il s'agit de simuler `n` tirages successifs dans l'urne blanche. Pour ce faire, on va utiliser une boucle `for` et donner à une variable `j` (qui code le numéro du tirage) successivement toutes les valeurs entre `1` et `n`.

  – Afin de simuler la pioche dans l'urne blanche, on commence par récupérer la longueur de la liste `UrneB` qui contient les numéros des boules encore présentes dans l'urne.

```
    m = length(UrneB)
```

  – Simuler le `j`$^{\text{ème}}$ tirage dans l'urne se fait en 3 temps.

  1) On choisit au hasard un entier entre `1` et `m`.

```
    i = grand(1,1,'uin',1,m)
```

  2) On récupère la boule placée à la `i`$^{\text{ème}}$ place du vecteur ligne `UrneB` et on la stocke à la `j`$^{\text{ème}}$ position du vecteur `ListeB`.

```
    ListeB(j) = UrneB(i)
```

  3) Cette boule ajoutée au résultat des tirages doit être supprimée de l'urne blanche : on retire la boule placée à la `i`$^{\text{ème}}$ place du vecteur ligne `UrneB`.

```
    UrneB = suppression(UrneB,i)
```

  Ce faisant, on a retiré un élément du vecteur `UrneB` et cet élément a été placé en `j`$^{\text{ème}}$ position dans le vecteur `ListeB`.

Commentaire

Afin de permettre une bonne compréhension des mécanismes en jeu, on a détaillé la réponse à cette question. Cependant, compléter correctement le programme **Scilab** démontre la bonne compréhension de la simulation demandée et permet certainement d'obtenir la majorité des points alloués à cette question.

□

13. Écrire un programme complet permettant de simuler l'expérience de cette **Partie III** lorsque $n = 20$, puis de donner la valeur de X_n (on pourra utiliser les fonctions précédentes).

Démonstration.

- **Début du programme**

  – On effectue 20 tirages. Cette valeur est stockée dans une variable `n`.
  On utilise une variable `ListeB` pour simuler le résultat d'un tirage sans remise dans l'urne blanche à l'aide de la fonction `tirageSR`.
  On utilise une variable `ListeN` pour simuler le résultat d'un tirage avec remise dans l'urne noire. Il suffit pour cela de choisir successivement et de manière alétoire `n` nombres de l'intervalle $[\![1, \texttt{n}]\!]$. On utilise pour ce faire la fonction `grand`.
  Enfin, on utilise une variable `cptPaire` afin de compter le nombre de paires créées par chaque tirage. Cette variable est initialement nulle.

```
n = 20
ListeB = tirageSR(n)
ListeN = grand(1,n,'uin',1,n)
cptPaire = 0
```

- **Structure itérative**
  Il s'agit de vérifier si les 2 boules obtenues à chaque tirage ont permis de créer une paire ou non. En cas d'égalité des `j`$^{\text{ème}}$ boules tirées, on met à jour le compteur de paires `cptPaire`.

```
for j = 1:n
    if ListeB(j) == ListeN(j) then
        cptPaire = cptPaire + 1
    end
end
```

- **Fin du programme**
  La variable `cptPaire` contient en fin de programme le nombre de paires associé aux `n` tirages effectués. On stocke le contenu de cette variable dans une variable `X` (dont le nom rappelle X_n).

```
X = cptPaire
```

- Finalement, on a obtenu le programme suivant, stockant dans `X` le nombre de paires obtenu lors de la simulation des `n` tirages successifs dans les deux urnes.

```
n = 20
ListeB = tirageSR(n)
ListeN = grand(1,n,'uin',1,n)
cptPaire = 0
for j = 1:n
    if ListeB(j) == ListeN(j) then
        cptPaire = cptPaire + 1
    end
end
X = cptPaire
```

□