DS6 (version A)

Exercice 1

On désigne par E l'espace vectoriel des fonctions polynomiales de degré inférieur ou égal à 2 et on note $\mathscr{B}$ la base (e_0, e_1, e_2) de E, où pour tout réel x, on a : $e_0(x) = 1$, $e_1(x) = x$ et $e_2(x) = x^2$.
On considère l'application, notée f, qui à toute fonction polynomiale P appartenant à E, associe la fonction polynômiale $f(P)$ définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \big(f(P)\big)(x) = 2\,x\,P(x) - (x^2-1)\,P'(x)$$

1. a) Montrer que f est une application linéaire.

b) En écrivant, pour tout réel x, $P(x) = a + b\,x + c\,x^2$, définir explicitement $\big(f(P)\big)(x)$ puis en déduire que f est un endomorphisme de E.

c) Écrire $f(e_0)$, $f(e_1)$ et $f(e_2)$ comme des combinaisons linéaires de e_0, e_1 et e_2, puis en déduire la matrice A de f dans la base $\mathscr{B}$.

2. a) Vérifier que $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}\,(e_1, e_0 + e_2)$ et donner la dimension de $\mathrm{Im}(f)$.

b) Déterminer $\mathrm{Ker}(f)$.

3. a) A l'aide de la méthode du pivot de Gauss, déterminer les valeurs propres de A.

b) En déduire que f est diagonalisable et donner les sous-espaces propres de f.

c) Vérifier que les sous-espaces propres de f, autres que $\mathrm{Ker}(f)$, sont inclus dans $\mathrm{Im}(f)$.

Exercice 2

Étude d'une suite et programmation

On note $(c_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite réelle définie pour tout entier n strictement positif par :

$$c_n = \int_0^1 \frac{x^{n-1}}{1+x}\,dx$$

1. Montrer que $(c_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite décroissante de réels positifs.

2. Montrer, pour tout entier n strictement positif : $c_{n+1} + c_n = \dfrac{1}{n}$.

3. Établir, pour tout entier n supérieur ou égal à 2, la double inégalité :

$$\frac{1}{n} \ \leqslant\ 2\,c_n \ \leqslant\ \frac{1}{n-1}$$

En déduire un équivalent simple de c_n quand n tend vers l'infini.

4. Calculer c_1 et prouver, pour tout entier n supérieur ou égal à 2, l'égalité :

$$c_n \ =\ (-1)^n \left(\sum_{k=1}^{n-1} \frac{(-1)^{k+1}}{k} - \ln(2) \right)$$

5. Écrire un programme en **Scilab** qui, pour une valeur d'un entier n strictement positif entrée par l'utilisateur, calcule et affiche la valeur de c_n.

Étude d'une suite de variables aléatoires à densité

Pour tout entier n strictement positif, on note f_n l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$f_n(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 1 \\ \dfrac{1}{c_n\, t^n(1+t)} & \text{si } t \geqslant 1 \end{cases}$$

6. À l'aide d'un changement de variable, établir pour tout entier n strictement positif et pour tout réel x supérieur ou égal à 1, l'égalité :

$$\int_1^x \frac{1}{t^n(1+t)}\, dt = \int_{\frac{1}{x}}^1 \frac{u^{n-1}}{1+u}\, du$$

7. En déduire que, pour tout entier n strictement positif, f_n est une densité de probabilité. Dans la suite de l'exercice, on suppose que $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite de variables aléatoires définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$, telle que, pour tout entier n strictement positif, X_n prend ses valeurs dans $[1, +\infty[$ et admet f_n comme densité. On note F_n la fonction de répartition de X_n.

8. Pour quelles valeurs de n la variable aléatoire X_n admet-elle une espérance ? Dans le cas où l'espérance de X_n existe, calculer cette espérance en fonction de c_n et de c_{n-1}.

9. Dans cette question, exclusivement, on suppose que n est égal à 1. Préciser la fonction F_1.
En déduire l'ensemble des réels y vérifiant $\mathbb{P}([X_1 \leqslant y]) \geqslant \dfrac{1}{2}$.
Déterminer une densité de la variable aléatoire $Z = \ln(X_1)$.

10. Soit x un réel strictement supérieur à 1.
Justifier l'encadrement :

$$0 \leqslant \int_{\frac{1}{x}}^1 \frac{u^n}{(1+u)^2}\, du \leqslant \frac{1}{n+1}$$

En déduire la limite suivante :

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\int_{\frac{1}{x}}^1 \frac{u^n}{(1+u)^2}\, du \right).$$

Transformer, pour tout entier naturel n non nul, $F_n(x)$ à l'aide d'une intégration par parties et en déduire l'égalité suivante :

$$\lim_{n\to+\infty} F_n(x) = 1.$$

Problème

On lance une pièce équilibrée (la probabilité d'obtenir Pile et celle d'obtenir Face étant toutes deux égales à $\frac{1}{2}$) et on note Z la variable aléatoire égale au rang du lancer où l'on obtient le premier Pile.
Après cette série de lancers, si Z a pris la valeur k ($k \in \mathbb{N}^*$), on remplit une urne de k boules numérotées 1, 2, $\cdots$, k, puis on extrait au hasard une boule de cette urne.
On note X la variable aléatoire égale au numéro de la boule tirée après la procédure décrite ci-dessus.

1. On décide de coder l'événement « obtenir un Pile » par 1 et l'événement « obtenir un Face » par 0. On rappelle par ailleurs que la fonction `grand(1,1,'uin',1,k)` renvoie un entier aléatoire compris entre 1 et k.

a) Compléter le programme suivant pour qu'il affiche la valeur prise par Z lors de la première partie de l'expérience décrite ci-dessus.

```
z = 0
while hasard <> 1
  z = ........
  hasard = ........
end
disp(z)
```

b) Quelles instructions faut-il ajouter à la fin de ce programme pour qu'il simule l'expérience aléatoire décrite dans ce problème et affiche la valeur prise par la variable aléatoire X ?

2. Établir la convergence de la série de terme général $\frac{1}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^k$ ($k \in \mathbb{N}^*$).

3. Rappeler la loi de Z ainsi que son espérance et sa variance.

4. ***a)*** Pour tout couple (i, k) de $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$, déterminer la probabilité $\mathbb{P}_{[Z=k]}([X = i])$.

b) En déduire : $\forall i \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}([X = i]) = \sum\limits_{k=i}^{+\infty} \frac{1}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^k$.

c) On admet dans cette question que $\sum\limits_{i=1}^{+\infty} \sum\limits_{k=i}^{+\infty} = \sum\limits_{k=1}^{+\infty} \sum\limits_{i=1}^{k}$. Vérifier : $\sum\limits_{i=1}^{+\infty} \mathbb{P}([X = i]) = 1$

5. ***a)*** Montrer que, pour tout entier naturel i non nul, on a : $i\, \mathbb{P}([X = i]) \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^{i-1}$.

b) En déduire que X possède une espérance.

c) Montrer, en admettant qu'il est licite de permuter les symboles $\sum$ comme dans la question ***4c)*** :

$$\mathbb{E}(X) = \frac{3}{2}$$

6. ***a)*** Utiliser le résultat de la question ***5a)*** pour montrer que X a un moment d'ordre 2.

b) Établir, alors, toujours en admettant qu'il est licite de permuter les symboles $\sum$ comme dans la question ***4c)*** :

$$\mathbb{E}(X^2) = \frac{1}{6} \sum_{k=1}^{+\infty} (k+1)(2k+1) \left(\frac{1}{2}\right)^k$$

c) Déterminer les réels a, b et c tels que : $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $(k+1)(2k+1) = a\,k\,(k-1) + b\,k + c$.

d) En déduire la valeur de $\mathbb{E}(X^2)$ et vérifier : $\mathbb{V}(X) = \dfrac{11}{12}$.

7. On admet le résultat suivant, appelé *Inégalité de Bienaymé-Chebychev.*
Soit X une v.a.r. qui admet une variance. Alors :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \mathbb{P}\left([|X - \mathbb{E}[X]| \geqslant \varepsilon]\right) \leqslant \frac{\mathbb{V}(X)}{\varepsilon^2}$$

En déduire : $\mathbb{P}([X \geqslant 3]) \leqslant \dfrac{11}{27}$.

8. On se propose de calculer $\mathbb{P}([X = 1])$, $\mathbb{P}([X = 2])$ et $\mathbb{P}([X \geqslant 3])$.

a) Écrire explicitement en fonction de x et n la somme $\sum\limits_{k=1}^{n} x^{k-1}$ (n désignant un entier naturel non nul et x un réel différent de 1).

b) En déduire : $\forall n \in \mathbb{N}^*$: $\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k} \left(\dfrac{1}{2}\right)^k = \ln(2) - \displaystyle\int_0^{frac12} \dfrac{x^n}{1-x}\, dx$.

c) Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}^*$: $0 \leqslant \displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \dfrac{x^n}{1-x}\, dx \leqslant \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$.

En déduire la valeur de $\lim\limits_{n \to +\infty} \displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \dfrac{x^n}{1-x}\, dx$.

d) Établir alors : $\mathbb{P}([X = 1]) = \ln(2)$, puis donner la valeur de $\mathbb{P}([X = 2])$.

e) Utiliser les résultats précédents pour calculer $\mathbb{P}([X \geqslant 3])$, puis donner une valeur approchée de $\mathbb{P}([X \geqslant 3])$ en prenant $\ln(2) \simeq 0,7$. Que peut-on en déduire en ce qui concerne le majorant trouvé à la septième question ?