DS6 (version A) /152

Exercice 1 (EDHEC 2011) /26

On désigne par E l'espace vectoriel des fonctions polynomiales de degré inférieur ou égal à 2 et on note $\mathscr{B}$ la base (e_0, e_1, e_2) de E, où pour tout réel x, on a : $e_0(x) = 1$, $e_1(x) = x$ et $e_2(x) = x^2$.
On considère l'application, notée f, qui à toute fonction polynomiale P appartenant à E, associe la fonction polynômiale $f(P)$ définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \ \big(f(P)\big)(x) = 2\,x\,P(x) - (x^2 - 1)\,P'(x)$$

1. a) Montrer que f est une application linéaire.

- 3 pts (-1 si confusion d'objets)

b) En écrivant, pour tout réel x, $P(x) = a + b\,x + c\,x^2$, définir explicitement $\big(f(P)\big)(x)$ puis en déduire que f est un endomorphisme de E.

- 2 pts (-1 si confusion d'objets)

c) Écrire $f(e_0)$, $f(e_1)$ et $f(e_2)$ comme des combinaisons linéaires de e_0, e_1 et e_2, puis en déduire la matrice A de f dans la base $\mathscr{B}$.

- 1 pt : $f(e_0) = 2\,e_1$
- 1 pt : $f(e_1) = e_0 + e_2$
- 1 pt : $f(e_2) = 2\,e_1$

2. a) Vérifier que $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}\,(e_1, e_0 + e_2)$ et donner la dimension de $\mathrm{Im}(f)$.

- 2 pts : $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}\,(e_1, e_0 + e_2)$ **(-1 si confusion d'objets)**
- 1 pt : $(e_1, e_0 + e_2)$ **base de** $\mathrm{Im}(f)$
- 1 pt : $\dim(\mathrm{Im}(f)) = 2$

b) Déterminer $\mathrm{Ker}(f)$.

- 1 pt : $e_0 + e_2 \in \mathrm{Ker}(f)$
- 1 pt : $\dim(\mathrm{Ker}(f)) = 1$ **par théorème du rang**
- 1 pt : $(e_0 + e_2)$ **base de** $\mathrm{Ker}(f)$ **(libre et de bon cardinal)**

3. a) A l'aide de la méthode du pivot de Gauss, déterminer les valeurs propres de A.

- 3 pts : $\mathrm{Sp}(A) = \{0, -2, 2\}$

b) En déduire que f est diagonalisable et donner les sous-espaces propres de f.

- 1 pt : f **admet** 3 **valeurs propres distinctes donc est diagonalisable**
- 1 pt : $E_0 = \mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Vect}\,(e_0 - e_2)$
- 3 pts : $E_2 = \mathrm{Vect}\,(e_1 + 2\,e_2 + e_3)$ **(1 pt obtention système, 1 pt résolution, 1 pt base)**
- 1 pt : $E_{-2} = \mathrm{Vect}\,(e_1 - 2\,e_2 + e_3)$

c) Vérifier que les sous-espaces propres de f, autres que $\mathrm{Ker}(f)$, sont inclus dans $\mathrm{Im}(f)$.

- 2 pts

Exercice 2 (HEC 2004) /63

Étude d'une suite et programmation /19

On note $(c_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite réelle définie pour tout entier n strictement positif par :

$$c_n = \int_0^1 \frac{x^{n-1}}{1+x}\, dx$$

1. Montrer que $(c_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite décroissante de réels positifs.

- **1 pt :** $x \mapsto \dfrac{x^{n-1}}{1+x}$ **continue sur** $[0,1]$
- **1 pt :** $\forall x \in [0,1]$, $\dfrac{x^{n-1}}{1+x} \geqslant 0$
- **1 pt :** $c_n \geqslant 0$ **par croissance de l'intégrale**
- **1 pt :** $c_{n+1} - c_n \leqslant 0$

2. Montrer, pour tout entier n strictement positif : $c_{n+1} + c_n = \dfrac{1}{n}$.

- **2 pts**

3. Établir, pour tout entier n supérieur ou égal à 2, la double inégalité :

$$\frac{1}{n} \ \leqslant\ 2\,c_n \ \leqslant\ \frac{1}{n-1}$$

En déduire un équivalent simple de c_n quand n tend vers l'infini.

- **1 pt :** $c_n \leqslant c_{n-1}$**, donc** $2\,c_n \leqslant \dfrac{1}{n-1}$
- **1 pt :** $c_{n+1} \leqslant c_n$**, donc** $\dfrac{1}{n} \leqslant 2\,c_n$
- **1 pt :** $1 \leqslant \dfrac{c_n}{\frac{1}{2n}} \leqslant \dfrac{n}{n-1}$
- **1 pt :** $c_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{2n}$

4. Calculer c_1 et prouver, pour tout entier n supérieur ou égal à 2, l'égalité :

$$c_n \ = \ (-1)^n \left(\sum_{k=1}^{n-1} \frac{(-1)^{k+1}}{k} - \ln(2)\right)$$

- **1 pt :** $c_1 = \ln(2)$
- **3 pts : récurrence (1 pt pour initialisation, 2 pts pour hérédité)**

5. Écrire un programme en **Scilab** qui, pour une valeur d'un entier n strictement positif entrée par l'utilisateur, calcule et affiche la valeur de c_n.

- **5 pts : 1 pt pour initialisation, 2 pts pour boucle `for`, 1 pt pour valeur de `c`, 1 pt pour `disp`**

Étude d'une suite de variables aléatoires à densité /44

Pour tout entier n strictement positif, on note f_n l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$f_n(t) = \left\{ \begin{array}{cl} 0 & \text{si } t < 1 \\ \dfrac{1}{c_n\, t^n(1+t)} & \text{si } t \geqslant 1 \end{array} \right.$$

6. À l'aide d'un changement de variable, établir pour tout entier n strictement positif et pour tout réel x supérieur ou égal à 1, l'égalité :

$$\int_1^x \frac{1}{t^n(1+t)}\, dt = \int_{\frac{1}{x}}^1 \frac{u^{n-1}}{1+u}\, du$$

- **3 pts : changement de variable** $u = \dfrac{1}{t}$

7. En déduire que, pour tout entier n strictement positif, f_n est une densité de probabilité. Dans la suite de l'exercice, on suppose que $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite de variables aléatoires définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$, telle que, pour tout entier n strictement positif, X_n prend ses valeurs dans $[1, +\infty[$ et admet f_n comme densité. On note F_n la fonction de répartition de X_n.

- **1 pt :** f_n **continue sur** $\mathbb{R}$ **sauf éventuellement en** 1
- **1 pt :** $f_n \geqslant 0$
- **2 pts :** $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f_n(t)\, dt$ **converge et vaut** 1

8. Pour quelles valeurs de n la variable aléatoire X_n admet-elle une espérance ? Dans le cas où l'espérance de X_n existe, calculer cette espérance en fonction de c_n et de c_{n-1}.

- **1 pt : convergence absolue**
- **1 pt :** f_n **nulle en dehors de** $[1, +\infty[$
- **3 pts : critère d'équivalence des intégrales de fonctions continues positives (**X_n **admet une espérance ssi** $n \geqslant 2$**)**
- **2 pts : si** $n \geqslant 2$**,** $\mathbb{E}(X_n) = \dfrac{c_{n-1}}{c_n}$ **(dont 1 pt pour** f_{n-1} **densité)**

9. Dans cette question, exclusivement, on suppose que n est égal à 1. Préciser la fonction F_1.
En déduire l'ensemble des réels y vérifiant $\mathbb{P}([X_1 \leqslant y]) \geqslant \dfrac{1}{2}$.
Déterminer une densité de la variable aléatoire $Z = \ln(X_1)$.

- **1 pt :** $X_1(\Omega) \subset [1, +\infty[$
- **1 pt : si** $x < 1$**,** $F_1(x) = 0$
- **3 pts : si** $x \geqslant 1$**,** $F_1(x) = 1 - \dfrac{1}{\ln(2)}\ \ln\left(1 + \dfrac{1}{x}\right)$
- **3 pts :** $[\sqrt{2}+1, +\infty[$ **est l'ensemble** $\mathcal{S}$ **des solutions de** $\mathbb{P}([X_1 \leqslant y]) \geqslant \dfrac{1}{2}$ **(dont 1 pt pour** $\mathcal{S} \subset [1, +\infty[$**)**
- **1 pt :** $Z(\Omega) \subset [0, +\infty[$
- **1 pt : si** $x < 0$**,** $F_Z(x) = 0$
- **2 pts : si** $x \geqslant 0$**,** $F_Z(x) = 1 - \dfrac{1}{\ln(2)}\ \ln(1 + \mathrm{e}^{-x})$

- **2 pts : Z est une v.a.r. à densité (1 pt pour F_Z continue sur $\mathbb{R}$, 1 pt pour F_Z de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ sauf éventuellement en 0)**
- **3 pts : $f_Z : x \mapsto \begin{cases} 0 & \textbf{si } x \in \,]-\infty, 0] \\ \dfrac{1}{\ln(2)} \, \dfrac{1}{\mathrm{e}^x + 1} & \textbf{si } x \in \,]0, +\infty[\end{cases}$ (1 pt pour cas $]-\infty, 0[$, 1 pt pour cas $]0, +\infty[$, 1 pt pour choix en 0)**

10. Soit x un réel strictement supérieur à 1.
Justifier l'encadrement :
$$0 \leqslant \int_{\frac{1}{x}}^{1} \frac{u^n}{(1+u)^2} \, du \leqslant \frac{1}{n+1}$$
En déduire la limite suivante :
$$\lim_{n \to +\infty} \left(\int_{\frac{1}{x}}^{1} \frac{u^n}{(1+u)^2} \, du \right).$$
Transformer, pour tout entier naturel n non nul, $F_n(x)$ à l'aide d'une intégration par parties et en déduire l'égalité suivante :
$$\lim_{n \to +\infty} F_n(x) = 1.$$

- **1 pt : $u \mapsto \dfrac{u^n}{(1+u)^2}$ continue sur $[\frac{1}{x}, 1]$**
- **1 pt : positivité**
- **2 pts : $\displaystyle\int_{\frac{1}{x}}^{1} \frac{u^n}{(1+u)^2} \, du \leqslant \int_{\frac{1}{x}}^{1} u^n \, du$**
- **1 pt : $\displaystyle\int_{\frac{1}{x}}^{1} u^n \, du \leqslant \int_{0}^{1} u^n \, du$**
- **1 pt : $\displaystyle\int_{0}^{1} u^n \, du = \frac{1}{n+1}$**
- **1 pt : $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \int_{\frac{1}{x}}^{1} \frac{u^n}{(1+u)^2} \, du = 0$ par théorème d'encadrement**
- **2 pts : $F_n(x) = \dfrac{1}{c_n} \displaystyle\int_{\frac{1}{x}}^{1} \frac{u^n}{1+u} \, du$**
- **2 pts : par IPP, $F_n(x) = \dfrac{1}{2n \, c_n} - \dfrac{1}{n \, c_n} \, \dfrac{1}{x^n + x^{n-1}} + \dfrac{1}{n \, c_n} \displaystyle\int_{\frac{1}{x}}^{1} \frac{u^n}{(1+u)^2} \, du$**
- **2 pts : $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} F_n(x) = 1$ (dont 1 pt pour utilisation question *3.*)**

Problème (EDHEC 2007) /63

On lance une pièce équilibrée (la probabilité d'obtenir Pile et celle d'obtenir Face étant toutes deux égales à $\frac{1}{2}$) et on note Z la variable aléatoire égale au rang du lancer où l'on obtient le premier Pile.
Après cette série de lancers, si Z a pris la valeur k ($k \in \mathbb{N}^*$), on remplit une urne de k boules numérotées $1, 2, \cdots, k$, puis on extrait au hasard une boule de cette urne.
On note X la variable aléatoire égale au numéro de la boule tirée après la procédure décrite ci-dessus.

1. On décide de coder l'événement « obtenir un Pile » par 1 et l'événement « obtenir un Face » par 0. On rappelle par ailleurs que la fonction `grand(1,1,'uin', 1,k)` renvoie un entier aléatoire compris entre 1 et k.

a) Compléter le programme suivant pour qu'il affiche la valeur prise par Z lors de la première partie de l'expérience décrite ci-dessus.

```
z = 0
while hasard <> 1
  z = ........
  hasard = ........
end
disp(z)
```

- 2 pts : 1 pt par ligne

b) Quelles instructions faut-il ajouter à la fin de ce programme pour qu'il simule l'expérience aléatoire décrite dans ce problème et affiche la valeur prise par la variable aléatoire X ?

- 2 pts

2. Établir la convergence de la série de terme général $\frac{1}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^k$ ($k \in \mathbb{N}^*$).

- 3 pts : critère de comparaison de séries à termes positifs

3. Rappeler la loi de Z ainsi que son espérance et sa variance.

- 1 pt : $Z \hookrightarrow \mathcal{G}\left(\frac{1}{2}\right)$

- 1 pt : $\mathbb{E}(Z) = 2$

- 1 pt : $\mathbb{V}(Z) = 2$

4. *a)* Pour tout couple (i, k) de $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$, déterminer la probabilité $\mathbb{P}_{[Z=k]}([X = i])$.

- 1 pt : si $i > k$, $\mathbb{P}_{[Z=k]}([X = i]) = 0$

- 2 pts : si $i \leqslant k$, $\mathbb{P}_{[Z=k]}([X = i]) = \frac{1}{k}$

b) En déduire : $\forall i \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}([X = i]) = \sum\limits_{k=i}^{+\infty} \frac{1}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^k$.

- 1 pt : $([Z = k])_{k\in\mathbb{N}^*}$ **SCE**

- 2 pts : FPT + calcul

- 1 pt : cas $i = 1$

c) On admet dans cette question que $\sum\limits_{i=1}^{+\infty} \sum\limits_{k=i}^{+\infty} = \sum\limits_{k=1}^{+\infty} \sum\limits_{i=1}^{k}$. Vérifier : $\sum\limits_{i=1}^{+\infty} \mathbb{P}([X = i]) = 1$

- 2 pts : $\sum\limits_{i=1}^{+\infty} \mathbb{P}([X = i]) = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} \left(\dfrac{1}{2}\right)^k - 1$

- 1 pt : série géométrique de raison $\dfrac{1}{2} \in \,]-1, 1[$

- 1 pt : conclusion

5. a) Montrer que, pour tout entier naturel i non nul, on a : $i\, \mathbb{P}([X = i]) \leqslant \left(\dfrac{1}{2}\right)^{i-1}$.

- 1 pt : $\forall k \geqslant i$**,** $\dfrac{1}{k} \left(\dfrac{1}{2}\right)^k \leqslant \dfrac{1}{i} \left(\dfrac{1}{2}\right)^k$

- 2 pts : $\sum\limits_{k \geqslant i} \dfrac{1}{i} \left(\dfrac{1}{2}\right)^k$ **converge et sa somme vaut** $\dfrac{1}{i} \left(\dfrac{1}{2}\right)^i$

- 1 pt : $i\, \mathbb{P}([X = i]) \leqslant \left(\dfrac{1}{2}\right)^{i-1}$

b) En déduire que X possède une espérance.

- 3 pts : critère de comparaison de SATP

c) Montrer, en admettant qu'il est licite de permuter les symboles $\sum$ comme dans la question ***4c)*** :

$$\mathbb{E}(X) = \frac{3}{2}$$

- 3 pts (dont 1 pt pour décalage d'indice)

6. a) Utiliser le résultat de la question ***5a)*** pour montrer que X a un moment d'ordre 2.

- 1 pt : $i^2\, \mathbb{P}([X = i]) \leqslant i \left(\dfrac{1}{2}\right)^{i-1}$ **d'après *5.a)***

- 2 pts : critère de comparaison de SATP

b) Établir, alors, toujours en admettant qu'il est licite de permuter les symboles $\sum$ comme dans la question ***4c)*** :

$$\mathbb{E}(X^2) \; = \; \frac{1}{6} \sum_{k=1}^{+\infty} (k+1)(2k+1) \left(\frac{1}{2}\right)^k$$

- 2 pts

c) Déterminer les réels a, b et c tels que : $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $(k+1)(2k+1) = a\, k\, (k-1) + b\, k + c$.

- 2 pts : $a = 2$**,** $b = 5$ **et** $c = 1$

d) En déduire la valeur de $\mathbb{E}(X^2)$ et vérifier : $\mathbb{V}(X) = \dfrac{11}{12}$.

- 2 pts : $\mathbb{E}(X^2) = \dfrac{19}{6}$

- 1 pt : $\mathbb{V}(X) = \dfrac{11}{12}$

7. On admet le résultat suivant, appelé *Inégalité de Bienaymé-Chebychev.*
Soit X une v.a.r. qui admet une variance. Alors :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \mathbb{P}\left([|X - \mathbb{E}[X]| \geqslant \varepsilon]\right) \leqslant \frac{\mathbb{V}(X)}{\varepsilon^2}$$

En déduire : $\mathbb{P}([X \geqslant 3]) \leqslant \dfrac{11}{27}$.

- 1 pt : X admet une variance

- 1 pt : application BT avec $\varepsilon = \dfrac{3}{2}$

- 2 pts : $\left[\left|X - \dfrac{3}{2}\right| \geqslant \dfrac{3}{2}\right] = [X \geqslant 3]$ **car** $[X \leqslant 0] = \varnothing$

- 1 pt : $\mathbb{P}([X \geqslant 3]) \leqslant \dfrac{11}{27}$

8. On se propose de calculer $\mathbb{P}([X = 1])$, $\mathbb{P}([X = 2])$ et $\mathbb{P}([X \geqslant 3])$.

a) Écrire explicitement en fonction de x et n la somme $\sum\limits_{k=1}^{n} x^{k-1}$ (n désignant un entier naturel non nul et x un réel différent de 1).

- 1 pt : $x \neq 1$

- 1 pt : $\sum\limits_{k=1}^{n} x^{k-1} = \dfrac{1 - x^n}{1 - x}$

b) En déduire : $\forall n \in \mathbb{N}^* :\ \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k}\left(\dfrac{1}{2}\right)^k = \ln(2) - \displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^n}{1 - x}\, dx$.

- 1 pt : $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \sum_{k=1}^{n} x^{k-1}\, dx = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^k$

- 1 pt : $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1 - x^n}{1 - x}\, dx = \ln(2) - \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^n}{1 - x}\, dx$

c) Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}^* :\ 0 \leqslant \displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^n}{1 - x}\, dx \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^n$.

En déduire la valeur de $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^n}{1 - x}\, dx$.

- 2 pts : $0 \leqslant \dfrac{x^n}{1 - x} \leqslant 2\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$

- 1 pt : croissance de l'intégrale

- 1 pt : $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^n}{1 - x}\, dx = 0$ **par théorème d'encadrement**

d) Établir alors : $\mathbb{P}([X = 1]) = \ln(2)$, puis donner la valeur de $\mathbb{P}([X = 2])$.

- 1 pt : $\mathbb{P}([X = 1]) = \sum\limits_{k=1}^{+\infty} \dfrac{1}{k}\left(\dfrac{1}{2}\right)^k$ **(question *4.b)*)**

- 1 pt : $\mathbb{P}([X = 1]) = \ln(2) - \displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^n}{1 - x}\, dx$ **(question *8.b)*)**

- 1 pt : $\mathbb{P}([X = 1]) = \ln(2)$ **(question précédente)**

- 1 pt : $\mathbb{P}([X = 2]) = \ln(2) - \dfrac{1}{2}$ **(question *4.b)*)**

e) Utiliser les résultats précédents pour calculer $\mathbb{P}([X \geqslant 3])$, puis donner une valeur approchée de $\mathbb{P}([X \geqslant 3])$ en prenant $\ln(2) \simeq 0,7$. Que peut-on en déduire en ce qui concerne le majorant trouvé à la septième question ?

- **1 pt :** $[X \geqslant 3] = \overline{[X = 1] \cup [X = 2]}$
- **1 pt :** $\mathbb{P}([X = 3]) = \dfrac{3}{2} - 2\ln(2)$
- **1 pt :** $\mathbb{P}([X = 3]) \simeq 0,1$
- **1 pt :** $\mathbb{P}([X = 3]) \leqslant 0,4$ **(question 7.)**
- **1 pt : inégalité de BT donne majoration large (comme d'habitude)**