DS6 (version A)

Exercice 1 (EDHEC 2011)

On désigne par E l'espace vectoriel des fonctions polynomiales de degré inférieur ou égal à 2 et on note $\mathscr{B}$ la base (e_0, e_1, e_2) de E, où pour tout réel x, on a : $e_0(x) = 1$, $e_1(x) = x$ et $e_2(x) = x^2$.
On considère l'application, notée f, qui à toute fonction polynomiale P appartenant à E, associe la fonction polynômiale $f(P)$ définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \ \big(f(P)\big)(x) = 2\,x\,P(x) - (x^2-1)\,P'(x)$$

1. a) Montrer que f est une application linéaire.

Démonstration.
Soit $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$. Soit $(P_1, P_2) \in E^2$.
Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{array}{cll} & \big(f(\lambda_1 \cdot P_1 + \lambda_2 \cdot P_2)\big)(x) & \\ = & 2\,x\,(\lambda_1 \cdot P_1 + \lambda_2 \cdot P_2)(x) - (x^2-1)(\lambda_1 \cdot P_1 + \lambda_2 \cdot P_2)'(x) & \\ = & \lambda_1\,2\,x\,P_1(x) + \lambda_2\,2\,x\,P_2(cx) - \lambda_1(x^2-1)P_1'(x) - \lambda_2(x^2-1)P_2'(x) & \textit{(par linéarité de la dérivation)} \\ = & \lambda_1\big(2\,x\,P_1(x) - (x^2-1)P_1'(x)\big) + \lambda_2\big(2\,x\,P_2(x) - (x^2-1)P_2'(x)\big) & \\ = & \lambda_1\,\big(f(P_1)\big)(x) + \lambda_2\,\big(f(P_2)\big)(x) & \end{array}$$

On en déduit : $f(\lambda_1 \cdot P_1 + \lambda_2 \cdot P_2) \ = \ \lambda_1 \cdot f(P_1) + \lambda_2 \cdot f(P_2)$.

$$\boxed{\text{L'application } f \text{ est donc linéaire.}}$$

□

b) En écrivant, pour tout réel x, $P(x) = a + b\,x + c\,x^2$, définir explicitement $\big(f(P)\big)(x)$ puis en déduire que f est un endomorphisme de E.

Démonstration.

- Soit $P \in E$. Alors il existe $(a, b, c) \in \mathbb{R}^2$ tel que : $\forall x \in \mathbb{R}$, $P(x) = a + b\,x + c\,x^2$.
  Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} \big(f(P)\big)(x) &= 2\,x\,P(x) - (x^2-1)P_1'(x) \\ &= 2\,x\,(a + b\,x + c\,x^2) - (x^2-1)\,(b + 2c\,x) \\ &= 2a\,x + 2b\,x^2 + \cancel{2c\,x^3} - (b\,x^2 + \cancel{2c\,x^3} - b - 2c\,x) \\ &= b + (2a+2c)x + b\,x^2 \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{On en déduit : } \forall x \in \mathbb{R},\ \big(f(P)\big)(x) = b\,e_0(x) + (2a+2c)e_1(x) + b\,e_2(x).}$$

- On obtient : $f(P) = b\,e_0 + (2a+2c)e_1 + b\,e_2$.
  Or $\mathscr{B} = (e_0, e_1, e_2)$ est une base de E. Donc : $f(P) \in E$.
  On a ainsi démontré : $\forall P \in E,\ f(P) \in E$.
- De plus, f est une application linéaire d'après la question précédente.

$$\boxed{\text{On en déduit que } f \text{ est un endomorphisme de } E.}$$

□

c) Écrire $f(e_0)$, $f(e_1)$ et $f(e_2)$ comme des combinaisons linéaires de e_0, e_1 et e_2, puis en déduire la matrice A de f dans la base $\mathscr{B}$.

Démonstration.

- Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\big(f(e_0)\big)(x) \; = \; 2\,x\,e_0(x) - (x^2-1)e_0'(x) \; = \; 2x \; = \; 2\,e_1(x)$$

$$\boxed{f(e_0) = 2 \cdot e_1}$$

- Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\big(f(e_1)\big)(x) \; = \; 2\,x\,e_1(x) - (x^2-1)e_1'(x) \; = \; 2x^2 - (x^2-1) \; = \; 1 + x^2 \; = \; e_0(x) + e_2(x)$$

$$\boxed{f(e_1) = e_0 + e_2}$$

- Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\big(f(e_2)\big)(x) \; = \; 2\,x\,e_2(x) - (x^2-1)e_2'(x) \; = \; 2x^3 - (x^2-1)\,2x \; = \; 2x \; = \; 2\,e_1(x)$$

$$\boxed{f(e_2) = 2 \cdot e_1}$$

- On obtient alors :
  × comme $f(e_0) = 0 \cdot e_0 + 2 \cdot e_1 + 0 \cdot e_2$: $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}\big(f(e_0)\big) = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$,
  × comme $f(e_1) = 1 \cdot e_0 + 0 \cdot e_1 + 1 \cdot e_2$: $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}\big(f(e_1)\big) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$,
  × comme $f(e_2) = 0 \cdot e_0 + 2 \cdot e_1 + 0 \cdot e_2$: $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}\big(f(e_2)\big) = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$,

$$\boxed{\text{On en déduit : } A = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.}$$

□

2. *a)* Vérifier que $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}\,(e_1, e_0 + e_2)$ et donner la dimension de $\mathrm{Im}(f)$.

Démonstration.

- Par caractérisation de l'image d'une application linéaire :

$$\begin{aligned} \mathrm{Im}(f) &= \mathrm{Vect}\,(f(e_0), f(e_1), f(e_2)) \\ &= \mathrm{Vect}\,(2 \cdot e_1, e_0 + e_2, 2 \cdot e_1) && \textit{(d'après la question précédente)} \\ &= \mathrm{Vect}\,(2 \cdot e_1, e_0 + e_2) \\ &= \mathrm{Vect}\,(e_1, e_0 + e_2) \end{aligned}$$

$$\boxed{\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}\,(e_1, e_0 + e_2)}$$

- Ainsi la famille $(e_1, e_0 + e_2)$:
  - × engendre $\mathrm{Im}(f)$,
  - × est libre car constituée de deux fonctions polynomiales non proportionnelles.

  On en déduit que la famille $(e_1, e_0 + e_2)$ est une base de $\mathrm{Im}(f)$.

$$\boxed{\text{On obtient : } \dim\big(\mathrm{Im}(f)\big) \ = \ \mathrm{Card}\big((e_1, e_0+e_2)\big) \ = \ 2.}$$

□

b) Déterminer $\mathrm{Ker}(f)$.

Démonstration.

- Tout d'abord, d'après le théorème du rang :

$$\underset{\underset{3}{\shortparallel}}{\dim(E)} \ = \ \dim\big(\mathrm{Ker}(f)\big) \ + \ \underset{\underset{2}{\shortparallel}}{\dim\big(\mathrm{Im}(f)\big)}$$

$$\boxed{\text{On en déduit : } \dim\big(\mathrm{Ker}(f)\big) = 3 - 2 = 1.}$$

- De plus :

$$\begin{array}{rcll} f(e_0 - e_2) & = & f(e_0) - f(e_2) & \textit{(car } f \textit{ est linéaire)} \\ & = & \cancel{2 \cdot e_1} - \cancel{2 \cdot e_1} & \textit{(d'après } \textbf{\textit{1.c)}}\textit{)} \\ & = & 0_E & \end{array}$$

$$\boxed{\text{D'où : } e_0 - e_2 \in \mathrm{Ker}(f).}$$

- Ainsi, la famille $(e_0 - e_2)$ est :
  - une famille libre de $\mathrm{Ker}(f)$, car constituée uniquement d'une fonction polynomiale non nulle,
  - telle que : $\mathrm{Card}\big((e_0 - e_2)\big) \ = \ 1 \ = \ \dim\big(\mathrm{Ker}(f)\big)$.

  On en déduit que la famille $(e_0 - e_2)$ est une base de $\mathrm{Ker}(f)$.

$$\boxed{\text{En particulier : } \mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Vect}\,(e_0 - e_2).}$$

Commentaire

On pouvait bien sûr déterminer $\mathrm{Ker}(f)$ en exploitant la matrice $A = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)$.

- Soit $P \in E$. Alors il existe $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que $X = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(P) = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$.

$$\begin{array}{rcl} P \in \mathrm{Ker}(f) & \Leftrightarrow & f(P) = 0_E \\ & \Leftrightarrow & AX = 0_{\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})} \\ & \Leftrightarrow & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ & \Leftrightarrow & \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} & & b & & & = & 0 \\ 2\,a & & & + & 2\,c & = & 0 \\ & & b & & & = & 0 \end{array} \right. \\ & \Leftrightarrow & \left\{ \begin{array}{rcrcl} & & b & = & 0 \\ a & & & = & -c \end{array} \right. \end{array}$$

Commentaire

- On obtient alors :

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{Ker}(f) & = & \{P = a \cdot e_0 + b \cdot e_1 + c \cdot e_2 \in E \mid b = 0 \text{ et } a = -c\} \\ & = & \{-c \cdot e_0 + 0 \cdot e_1 + c \cdot e_2 \mid c \in \mathbb{R}\} \\ & = & \{c \cdot (-e_0 + e_2) \mid c \in \mathbb{R}\} \\ & = & \mathrm{Vect}\,(-e_0 + e_2) \end{array}$$

□

3. a) A l'aide de la méthode du pivot de Gauss, déterminer les valeurs propres de A.

Démonstration.
Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.
On cherche les réels λ tels que la matrice $A - \lambda \cdot I_3$ n'est pas inversible, c'est-à-dire tels que : $\mathrm{rg}(A - \lambda \cdot I_3) < 3$.

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{rg}(A - \lambda \cdot I_3) & = & \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 2 & -\lambda & 2 \\ 0 & 1 & -\lambda \end{pmatrix}\right) \\ & \overset{L_1 \leftrightarrow L_2}{=} & \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix} 2 & -\lambda & 2 \\ -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda \end{pmatrix}\right) \\ & \overset{L_2 \leftarrow 2\,L_2 + \lambda\,L_1}{=} & \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix} 2 & -\lambda & 2 \\ 0 & 2-\lambda^2 & 2\lambda \\ 0 & 1 & -\lambda \end{pmatrix}\right) \\ & \overset{L_2 \leftrightarrow L_3}{=} & \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix} 2 & -\lambda & 2 \\ 0 & 1 & -\lambda \\ 0 & 2-\lambda^2 & 2\lambda \end{pmatrix}\right) \\ & \overset{L_3 \leftarrow L_3 - (2-\lambda^2)L_2}{=} & \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix} 2 & -\lambda & 2 \\ 0 & 1 & -\lambda \\ 0 & 0 & q(\lambda) \end{pmatrix}\right) \end{array}$$

où : $q(\lambda) \ = \ 2\lambda + (2 - \lambda^2)\lambda \ = \ \lambda\big(2 + (2 - \lambda^2)\big) \ = \ \lambda(4 - \lambda^2) \ = \ \lambda(2 - \lambda)(2 + \lambda)$.
La réduite obtenue est triangulaire (supérieure).
Elle est donc non inversible si et seulement si l'un de ses coefficients diagonaux est nul.
On en déduit :

$$\mathrm{rg}(A - \lambda \cdot I_2) < 3 \ \Leftrightarrow\ q(\lambda) = 0 \ \Leftrightarrow\ \lambda \in \{0, 2, -2\}$$

$$\boxed{\text{Ainsi : } \mathrm{Sp}(A) = \{0, 2, -2\}.}$$

□

b) En déduire que f est diagonalisable et donner les sous-espaces propres de f.

Démonstration.

- Tout d'abord : $\mathrm{Sp}(f) = \mathrm{Sp}(A)$.

$$\boxed{\text{D'où : } \mathrm{Sp}(f) = \{0, 2, -2\}.}$$

- On obtient :
  - $\times$ $f \in \mathscr{L}(E)$ avec $\dim(E) = 3$,
  - $\times$ f admet 3 valeurs propres **distinctes** : -2, 0 et 2.

$$\boxed{\text{On en déduit que l'endomorphisme } f \text{ est diagonalisable.}}$$

- On note $E_0(f)$ le sous-espace propre de f associé à la valeur propre 0.

$$\boxed{\text{D'après la question } \textbf{\textit{2.b)}} : E_0(f) = \mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Vect}\left(e_0 - e_2\right).}$$

- Déterminons $E_2(f)$ le sous-espace propre de f associé à la valeur propre 2.

  Soit $P \in E$. Alors il existe $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que $X = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(P) = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$.

$$\begin{array}{rcl}
P \in E_2(f) & \Longleftrightarrow & (f - 2 \cdot \mathrm{id})(P) = O_E \\
& \Longleftrightarrow & (A - 2 \cdot I_3)X = 0_{\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})} \\
& \Longleftrightarrow & \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
& \Longleftrightarrow & \left\{ \begin{array}{rcrcrcr} -2\,a & + & b & & & = & 0 \\ 2\,a & - & 2\,b & + & 2\,c & = & 0 \\ & & b & - & 2\,c & = & 0 \end{array} \right. \\
& \overset{L_2 \leftarrow L_2 + L_1}{\Longleftrightarrow} & \left\{ \begin{array}{rcrcrcr} -2\,a & + & b & & & = & 0 \\ & - & b & + & 2\,c & = & 0 \\ & & b & - & 2\,c & = & 0 \end{array} \right. \\
& \overset{L_3 \leftarrow L_3 + L_2}{\Longleftrightarrow} & \left\{ \begin{array}{rcrcrcr} -2\,a & + & b & & & = & 0 \\ & - & b & + & 2\,c & = & 0 \\ & & & & 0 & = & 0 \end{array} \right. \\
& \Longleftrightarrow & \left\{ \begin{array}{rcrcr} -2\,a & + & b & = & 0 \\ & & b & = & 2\,c \end{array} \right. \\
& \overset{L_1 \leftarrow L_1 - L_2}{\Longleftrightarrow} & \left\{ \begin{array}{rcrcr} -2\,a & & & = & -2\,c \\ & & b & = & 2\,c \end{array} \right. \\
& \overset{L_1 \leftarrow -\frac{1}{2} L_1}{\Longleftrightarrow} & \left\{ \begin{array}{rcrcr} a & & & = & c \\ & & b & = & 2\,c \end{array} \right.
\end{array}$$

On obtient :

$$\begin{array}{rcl} E_2(f) & = & \{P = a\cdot e_0 + b\cdot e_1 + c\cdot e_2 \mid a = c \text{ et } b = 2c\} \\ & = & \{c\cdot e_0 + 2c\cdot e_1 + c\cdot e_2 \mid c \in \mathbb{R}\} \\ & = & \{c\cdot (e_0 + 2\cdot e_1 + e_2) \mid c \in \mathbb{R}\} \\ & = & \text{Vect}\,(e_0 + 2\cdot e_2 + e_2) \end{array}$$

$$\boxed{E_2(f) = \text{Vect}\,(e_0 + 2\cdot e_1 + e_2)}$$

- Déterminons $E_{-2}(f)$ le sous-espace propre de f associé à la valeur propre 2.

  Soit $P \in E$. Alors il existe $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ tel que $X = \text{Mat}_{\mathscr{B}}(P) = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$.

$$\begin{array}{rcl} P \in E_{-2}(f) & \Longleftrightarrow & (f + 2\cdot \text{id})(P) = O_E \\ & \Longleftrightarrow & (A + 2\cdot I_3)X = 0_{\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})} \\ & \Longleftrightarrow & \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ & \Longleftrightarrow & \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} 2\,a & + & b & & & = & 0 \\ 2\,a & + & 2\,b & + & 2\,c & = & 0 \\ & & b & + & 2\,c & = & 0 \end{array} \right. \\ & \underset{L_2 \leftarrow L_2 - L_1}{\Longleftrightarrow} & \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} 2\,a & + & b & & & = & 0 \\ & & b & + & 2\,c & = & 0 \\ & & b & + & 2\,c & = & 0 \end{array} \right. \\ & \underset{L_3 \leftarrow L_3 - L_2}{\Longleftrightarrow} & \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} 2\,a & + & b & & & = & 0 \\ & & b & + & 2\,c & = & 0 \\ & & & & 0 & = & 0 \end{array} \right. \\ & \Longleftrightarrow & \left\{ \begin{array}{rcrcl} 2\,a & + & b & = & 0 \\ & & b & = & -2\,c \end{array} \right. \\ & \underset{L_1 \leftarrow L_1 - L_2}{\Longleftrightarrow} & \left\{ \begin{array}{rcl} 2\,a & = & 2\,c \\ b & = & -2\,c \end{array} \right. \\ & \underset{L_1 \leftarrow \frac{1}{2} L_1}{\Longleftrightarrow} & \left\{ \begin{array}{rcl} a & = & c \\ b & = & -2\,c \end{array} \right. \end{array}$$

On obtient :

$$\begin{array}{rcl} E_{-2}(f) & = & \{P = a\cdot e_0 + b\cdot e_1 + c\cdot e_2 \mid a = c \text{ et } b = -2c\} \\ & = & \{c\cdot e_0 - 2c\cdot e_1 + c\cdot e_2 \mid c \in \mathbb{R}\} \\ & = & \{c\cdot (e_0 - 2\cdot e_1 + e_2) \mid c \in \mathbb{R}\} \\ & = & \text{Vect}\,(e_0 - 2\cdot e_2 + e_2) \end{array}$$

$$\boxed{E_{-2}(f) = \text{Vect}\,(e_0 - 2\cdot e_1 + e_2)}$$

□

c) Vérifier que les sous-espaces propres de f, autres que $\text{Ker}(f)$, sont inclus dans $\text{Im}(f)$.

Démonstration.
Soit $\lambda \in \{-2, 2\}$. Montrons : $E_\lambda(f) \subset \text{Im}(f)$.
Soit $P \in E_\lambda(f)$. Alors : $f(P) = \lambda \cdot P$. D'où :

$$\begin{array}{rcll} P & = & \dfrac{1}{\lambda}\, f(P) & \textit{(car } \lambda \neq 0\textit{)} \\ & = & f\left(\dfrac{1}{\lambda}\, P\right) & \textit{(par linéarité de } f\textit{)} \end{array}$$

On en déduit : $P \in \text{Im}(f)$.

$$\boxed{\text{Ainsi : } E_2(f) \subset \text{Im}(f) \text{ et } E_{-2}(f) \subset \text{Im}(f).}$$

Commentaire

Cette propriété est toujours vraie quelque soit l'endomorphisme f.
Il s'agit là d'une question classique d'algèbre théorique. Comme souvent dans ce type de questions, écrire la définition est un grand pas vers la résolution de la question. Disons-le à nouveau : c'est cette bonne connaissance du cours et bonne maîtrise des objets étudiés qui permet de faire la différence.

□

Exercice 2 (HEC 2004)

Étude d'une suite et programmation

On note $(c_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ la suite réelle définie pour tout entier n strictement positif par :

$$c_n = \int_0^1 \frac{x^{n-1}}{1+x} \, dx$$

1. Montrer que $(c_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une suite décroissante de réels positifs.

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

- La fonction $x \mapsto \dfrac{x^{n-1}}{1+x}$ est continue sur le segment $[0,1]$ en tant que quotient de fonctions continues sur $[0,1]$ dont le dénominateur ne s'annule pas.

$$\boxed{\text{L'intégrale } c_n \text{ est donc bien définie.}}$$

- Soit $x \in [0,1]$. Alors : $x^{n-1} \geqslant 0$ et $1+x > 0$. Donc : $\dfrac{x^{n-1}}{1+x} \geqslant 0$.
Par croissance de l'intégrale, les bornes étant dans l'ordre croissant :

$$\int_0^1 \frac{x^{n-1}}{1+x} \, dx \ \geqslant \ 0$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \, c_n \geqslant 0}$$

- Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned} c_{n+1} - c_n &= \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} \, dx - \int_0^1 \frac{x^{n-1}}{1+x} \, dx \\ &= \int_0^1 \frac{x^n - x^{n-1}}{1+x} \, dx && \textit{(par linéarité de l'intégrale)} \\ &= \int_0^1 \frac{x^{n-1}}{1+x}(x-1) \, dx \end{aligned}$$

Or, pour tout $x \in [0,1]$, $\dfrac{x^{n-1}}{1+x} \geqslant 0$ et $x - 1 \leqslant 0$. Donc : $\dfrac{x^{n-1}}{1+x}(x-1) \leqslant 0$.
Par croissance de l'intégrale, les bornes étant dans l'ordre croissant :

$$c_{n+1} - c_n = \int_0^1 \frac{x^{n-1}}{1+x}(x-1) \, dx \leqslant 0$$

D'où : $c_{n+1} \leqslant c_n$

$$\boxed{\text{La suite } (c_n) \text{ est décroissante.}}$$

Commentaire

On retiendra que l'encadrement / la minoration / la majoration d'une intégrale s'effectue toujours de la façon suivante :
1) encadrement / minoration / majoration de son intégrande,
2) utilisation de la croissance de l'intégrale.

□

2. Montrer que, pour tout entier n strictement positif, l'on a : $c_{n+1} + c_n = \dfrac{1}{n}$

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned}
c_{n+1} + c_n &= \int_0^1 \frac{x^n}{1+x}\, dx + \int_0^1 \frac{x^{n-1}}{1+x}\, dx \\
&= \int_0^1 \frac{x^n + x^{n-1}}{1+x}\, dx = \int_0^1 x^{n-1} \cancel{\frac{x+1}{1+x}}\, dx \\
&= \int_0^1 x^{n-1}\, dx = \left[\frac{1}{n} x^n \right]_0^1 \\
&= \frac{1}{n}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ c_{n+1} + c_n = \frac{1}{n}}$$

□

3. Établir, pour tout entier n supérieur ou égal à 2, la double inégalité :

$$\frac{1}{n} \leqslant 2\, c_n \leqslant \frac{1}{n-1}$$

En déduire un équivalent simple de c_n quand n tend vers l'infini.

Démonstration.

- Soit $n \geqslant 2$.
  - La suite (c_n) est décroissante. donc : $c_n \leqslant c_{n-1}$. D'où :

$$\begin{array}{ccc} c_n + c_n & \leqslant & c_n + c_{n-1} \\ \shortparallel & & \shortparallel \\ 2\, c_n & & \dfrac{1}{n-1} \end{array}$$ *(d'après la question précédente)*

    On obtient alors : $2\, c_n \leqslant \dfrac{1}{n-1}$.
  - De même, toujours par décroissance de (c_n) : $c_{n+1} \leqslant c_n$. D'où :

$$\begin{array}{ccc} c_{n+1} + c_n & \leqslant & c_n + c_n \\ \shortparallel & & \shortparallel \\ \dfrac{1}{n} & & 2\, c_n \end{array}$$ *(d'après la question précédente)*

    On a bien : $\dfrac{1}{n} \leqslant 2\, c_n$.

$$\boxed{\text{Finalement : } \forall n \geqslant 2,\ \frac{1}{n} \leqslant 2\, c_n \leqslant \frac{1}{n-1}.}$$

Commentaire

On pouvait démontrer l'inégalité de gauche d'une autre façon.
Soit $n \geqslant 2$. Soit $x \in [0,1]$.

$$0 \leqslant x \leqslant 1 \quad \text{donc} \quad 1 \leqslant 1+x \leqslant 2$$

$$\text{d'où} \quad \frac{1}{2} \leqslant \frac{1}{1+x} \leqslant 1$$

(car $x \mapsto \frac{1}{x}$ est strictement décroissante sur $]0,+\infty[$)

$$\text{alors} \quad \frac{x^{n-1}}{2} \leqslant \frac{x^{n-1}}{1+x} \leqslant x^{n-1}$$

Par croissance de l'intégrale, les bornes étant dans l'ordre croissant :

$$\begin{array}{ccccccc} & & \displaystyle\int_0^1 \frac{x^{n-1}}{2}\,dx & \leqslant & \displaystyle\int_0^1 \frac{x^{n-1}}{1+x}\,dx & \leqslant & \displaystyle\int_0^1 x^{n-1}\,dx & & \\ & & \| & & \| & & \| & & \\ \dfrac{1}{2n} & = & \dfrac{1}{2}\left[\dfrac{1}{n}x^n\right]_0^1 & & c_n & & \left[\dfrac{1}{n}x^n\right]_0^1 & = & \dfrac{1}{n} \end{array}$$

En particulier, on a donc bien : $\frac{1}{n} \leqslant 2\,c_n$.

- Soit $n \geqslant 2$. D'après ce qui précède :

$$\frac{1}{n} \leqslant 2\,c_n \leqslant \frac{1}{n-1}$$

On obtient donc :

$$\begin{array}{ccccc} \dfrac{\cancel{n}}{\cancel{n}} & \leqslant & 2n\,c_n & \leqslant & \dfrac{n}{n-1} \\ \| & & & & \\ 1 & & & & \end{array}$$

Or :

× $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n}{n-1} = 1$,

× $\lim\limits_{n\to+\infty} 1 = 1$.

Par théorème d'encadrement : $\lim\limits_{n\to+\infty} 2n\,c_n = 1$. Ainsi : $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{c_n}{\frac{1}{2n}} = 1$

$$\boxed{\text{On en déduit : } c_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2n}.}$$

□

4. Calculer c_1 et prouver, pour tout entier n supérieur ou égal à 2, l'égalité :

$$c_n = (-1)^n \left(\sum_{k=1}^{n-1} \frac{(-1)^{k+1}}{k} - \ln 2 \right)$$

Démonstration.

- Calculons c_1 (on sait déjà, d'après la question ***1.*** que c_1 est bien défini).

$$c_1 \ = \ \int_0^1 \frac{x^{1-1}}{1+x}\, dx \ = \ \int_0^1 \frac{1}{1+x}\, dx \ = \ \left[\ \ln(1+x) \ \right]_0^1 \ = \ \ln(2)$$

$$\boxed{c_1 = \ln(2)}$$

- Démontrons par récurrence : $\forall n \geqslant 2$, $\mathcal{P}(n)$, où $\mathcal{P}(n)$: $c_n = (-1)^n \left(\sum\limits_{k=1}^{n-1} \frac{(-1)^{k+1}}{k} - \ln(2) \right)$

  ▸ **Initialisation** :
  D'une part, d'après la question ***2*** :

$$c_2 \ = \ \frac{1}{1} - c_1 \ = \ 1 - \ln(2)$$

  D'autre part :

$$(-1)^2 \left(\sum_{k=1}^{2-1} \frac{(-1)^{k+1}}{k} - \ln(2) \right) = \frac{(-1)^{1+1}}{1} - \ln(2) = 1 - \ln(2) = c_2$$

  D'où $\mathcal{P}(2)$.

  ▸ **Hérédité** : soit $n \geqslant 2$.
  Supposons $\mathcal{P}(n)$ et démontrons $\mathcal{P}(n+1)$ (*i.e.* $c_{n+1} = (-1)^{n+1} \left(\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k} - \ln(2) \right)$).

$$\begin{aligned}
c_{n+1} &= \frac{1}{n} - c_n && \textit{(d'après la question 2.)} \\
&= \frac{1}{n} - (-1)^n \left(\sum_{k=1}^{n-1} \frac{(-1)^{k+1}}{k} - \ln(2) \right) && \textit{(par hypothèse de récurrence)} \\
&= (-1)^{n+1} \times \frac{(-1)^{n+1}}{n} + (-1)^{n+1} \left(\sum_{k=1}^{n-1} \frac{(-1)^{k+1}}{k} - \ln(2) \right) && \textit{(car } (-1)^{n+1}\,(-1)^{n+1} = 1\textit{)} \\
&= (-1)^{n+1} \left(\frac{(-1)^{n+1}}{n} + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(-1)^{k+1}}{k} - \ln(2) \right) \\
&= (-1)^{n+1} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k} - \ln(2) \right)
\end{aligned}$$

  D'où $\mathcal{P}(n+1)$.

$$\boxed{\text{Par principe de récurrence : } \forall n \geqslant 2,\ c_n = (-1)^n \left(\sum_{k=1}^{n-1} \frac{(-1)^{k+1}}{k} - \ln(2) \right)}$$

□

5. Écrire un programme en **Scilab** qui, pour une valeur d'un entier n strictement positif entrée par l'utilisateur, calcule et affiche la valeur de c_n.

Démonstration.

```
1  n = input(' Entrez un entier n supérieur à 1 : ')
2  S = 0
3  for k = 1:(n-1)
4    S = S + ((-1)^(k-1)) / k
5  end
6  c = ((-1)^n) * (S - log(2))
7  disp(c)
```

Détaillons les différents éléments de ce programme :

× en ligne 1, on stocke dans la variable `n` la valeur rentrée par l'utilisateur.

× en ligne 2, on crée une variable `S` dont le but est de contenir en fin de programme $\sum_{k=1}^{n-1} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$.
Cette variable `S` est donc initialisée à 0.

× de la ligne 3 à la ligne 5, on met à jour cette variable `S` à l'aide d'une structure itérative (boucle for). Pour ce faire, on ajoute au $k^{\text{ème}}$ tour de boucle la quantité $\frac{(-1)^{k+1}}{k}$.
Ainsi, `S` contient bien $\sum_{k=1}^{n-1} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$ en sortie de boucle.

× en ligne 6, on crée la variable `c` dont le but est de contenir c_n. On affecte donc à la variable `c` la valeur $(-1)^n \left(\sum_{k=1}^{n-1} \frac{(-1)^{k+1}}{k} - \ln(2) \right)$.

× enfin, en ligne 7, on affiche la valeur de la variable `c`.

Commentaire

- On pouvait aussi proposer le programme suivant (qui utilise la question *2.* plutôt que la *4.*)

```
n = input(' Entrez un entier n supérieur à 1 : ')
c = log(2)
for k = 1:n
  c = 1/k - c
end
disp(c)
```

- Afin de permettre une bonne compréhension des mécanismes en jeu, on a détaillé la réponse à cette question. Cependant, proposer un programme **Scilab** correct démontre cette bonne compréhension et permet d'obtenir tous les points alloués à cette question.

□

Étude d'une suite de variables aléatoires à densité

Pour tout entier n strictement positif, on note f_n l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$f_n(t) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad t < 1 \\ \dfrac{1}{c_n\, t^n(1+t)} & \text{si} \quad t \geqslant 1 \end{cases}$$

6. À l'aide d'un changement de variable, établir pour tout entier n strictement positif et pour tout réel x supérieur ou égal à 1, l'égalité :

$$\int_1^x \frac{1}{t^n(1+t)}\, dt = \int_{1/x}^1 \frac{u^{n-1}}{1+u}\, du$$

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $x \geqslant 1$.

On effectue le changement de variable $\boxed{u = \dfrac{1}{t}}$.

$$\left| \begin{array}{l} u = \dfrac{1}{t} \text{ (et donc } t = \dfrac{1}{u}) \\ \hookrightarrow du = -\dfrac{1}{t^2}\, dt \quad \text{ et } \quad dt = -\dfrac{1}{u^2}\, du \\ \bullet\ t = 1 \ \Rightarrow\ u = 1 \\ \bullet\ t = x \ \Rightarrow\ u = \dfrac{1}{x} \end{array} \right.$$

Ce changement de variable est valide car $\Psi : u \mapsto \frac{1}{u}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\left[\frac{1}{x}, 1\right]$.
On obtient :

$$\begin{aligned} \int_1^x \frac{1}{t^n(1+t)}\, dt &= \int_1^{\frac{1}{x}} \frac{1}{\left(\frac{1}{u}\right)^n \left(1+\frac{1}{u}\right)} \left(-\frac{1}{u^2}\right)\, du \\ &= \int_{\frac{1}{x}}^1 \frac{1}{\frac{1}{u^n}\left(\frac{u+1}{u}\right)} \frac{1}{u^2}\, du \\ &= \int_{\frac{1}{x}}^1 \frac{u^{n+1}}{u+1} \frac{1}{u^2}\, du \\ &= \int_{\frac{1}{x}}^1 \frac{u^{n-1}}{1+u}\, du \end{aligned}$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall x \geqslant 1,\ \int_1^x \frac{1}{t^n(1+t)}\, dt = \int_{\frac{1}{x}}^1 \frac{u^{n-1}}{1+u}\, du}$$

□

7. En déduire que, pour tout entier n strictement positif, f_n est une densité de probabilité.

Démonstration.
Soit $n \geqslant 1$.

- La fonction f_n est continue :
  - × sur $]-\infty, 1[$ en tant que fonction constante,
  - × sur $]1, +\infty[$ en tant que quotient de fonctions continues sur $]1, +\infty[$ dont le dénominateur ne s'annule pas sur cet intervalle.

$$\boxed{\text{La fonction } f_n \text{ est donc continue sauf éventuellement en } 0.}$$

- Soit $t \in \mathbb{R}$. Deux cas se présentent :
  - × si $t \in]-\infty, 1[$, $f_n(t) = 0 \geqslant 0$
  - × si $t \in [1, +\infty[$.
    D'une part : $t^n \geqslant 1 \geqslant 0$. D'autre part : $1 + t \geqslant 2 \geqslant 0$.
    Donc : $f_n(t) = \dfrac{1}{t^n(1+t)} \geqslant 0$

$$\boxed{\text{Finalement : } \forall t \in \mathbb{R},\ f_n(t) \geqslant 0.}$$

- Montrons que l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f_n(t)\ dt$ converge et vaut 1.
  - × Comme la fonction f_n est nulle en dehors de $[1, +\infty[$:
$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_n(t)\ dt = \int_1^{+\infty} f_n(t)\ dt$$
  - × De plus, d'après la question précédente, pour tout $x \geqslant 1$:
$$\int_1^x \frac{1}{t^n(1+t)}\ dt = \int_{\frac{1}{x}}^1 \frac{u^{n-1}}{1+u}\ du$$
    Donc, $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^n(1+t)}\ dt$ converge si et seulement si $\displaystyle\int_0^1 \frac{u^{n-1}}{1+u}\ du$ converge (car $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$).
  - × Or, par définition de c_n, $c_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^{n-1}}{1+x}\ dx$. Donc $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^n(1+t)}\ dt$ converge et vaut c_n.
  - × On obtient alors que l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f_n(t)\ dt$ converge et :
$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_n(t)\ dt = \frac{1}{c_n} \int_1^{+\infty} \frac{1}{t^n(1+t)}\ dt = \frac{1}{c_n} \times c_n = 1$$

$$\boxed{\text{Finalement, pour tout } n \in \mathbb{N}^*, \text{ la fonction } f_n \text{ est une densité de probabilité.}}$$ □

Dans la suite de l'exercice, on suppose que $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une suite de variables aléatoires définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$, telle que, pour tout entier n strictement positif, X_n prend ses valeurs dans $[1, +\infty[$ et admet f_n comme densité. On note F_n la fonction de répartition de X_n.

8. Pour quelles valeurs de n la variable aléatoire X_n admet-elle une espérance ? Dans le cas où l'espérance de X_n existe, calculer cette espérance en fonction de c_n et de c_{n-1}.

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

- La v.a.r. X_n admet une espérance si et seulement si l'intégrale impropre $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t\, f_n(t)\ dt$ est absolument convergente, ce qui équivaut à démontrer la convergence pour des calculs de moments du type $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t^r f_n(t)\ dt$.

- Comme la fonction f_n est nulle en dehors de $[1, +\infty[$:
$$\int_{-\infty}^{+\infty} t\, f_n(t)\ dt = \int_1^{+\infty} f_n(t)\ dt$$

- De plus, soit $t \in [1, +\infty[$:

$$t\, f_n(t) \ = \ \frac{t}{c_n t^n (1+t)} \ = \ \frac{1}{c_n} \ \frac{1}{t^{n-1}(1+t)}$$

On obtient alors :

× tout d'abord : $t\, f_n(t) \ = \ \dfrac{1}{c_n} \ \dfrac{1}{t^{n-1}(1+t)} \underset{t \to +\infty}{\sim} \dfrac{1}{c_n} \ \dfrac{1}{t^n}$

× de plus : $\forall t \in [1, +\infty[, \ \dfrac{1}{c_n} \ \dfrac{1}{t^n} \geqslant 0$

× l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^n}\, dt$ est une intégrale de Riemann, impropre en $+\infty$, d'exposant n. Elle est donc convergente si et seulement si $n > 1$ (*i.e.* $n \geqslant 2$)

$$\boxed{\text{Par critère d'équivalence des intégrales généralisées de fonctions continues positives, l'intégrale } \int_1^{+\infty} t\, f_n(t)\, dt \text{ converge si et seulement si } n \geqslant 2.}$$

$$\boxed{\text{Donc la v.a.r. } X_n \text{ admet une espérance si et seulement si } n \geqslant 2.}$$

- On se place donc dans le cas $n \geqslant 2$. Dans ce cas, X_n admet une espérance et les intégrales ci-dessous sont alors bien convergentes.

$$\begin{array}{rcll}
\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t\, f_n(t)\, dt & = & \displaystyle\int_1^{+\infty} t\, f_n(t)\, dt & \textit{(car } f_n \textit{ est nulle en dehors de } [1, +\infty[\textit{)} \\
& = & \displaystyle\frac{1}{c_n} \int_1^{+\infty} \frac{1}{t^{n-1}(1+t)}\, dt & \textit{(par linéarité de l'intégrale)} \\
& = & \displaystyle\frac{1}{c_n} \times c_{n-1} \times \int_1^{+\infty} \frac{1}{c_{n-1}\, t^{n-1}(1+t)}\, dt & \\
& = & \displaystyle\frac{1}{c_n} \times c_{n-1} \times \int_1^{+\infty} f_{n-1}(t)\, dt & \textit{(par définition de } f_{n-1}\textit{)} \\
& = & \displaystyle\frac{c_{n-1}}{c_n} \int_{-\infty}^{+\infty} f_{n-1}(t)\, dt & \textit{(car } f_{n-1} \textit{ est nulle en dehors de } [1, +\infty[\textit{)} \\
& = & \displaystyle\frac{c_{n-1}}{c_n} \times 1 & \textit{(car, comme } n \geqslant 2, f_{n-1} \textit{ est une densité)} \\
& = & \displaystyle\frac{c_{n-1}}{c_n} &
\end{array}$$

$$\boxed{\text{Si } n \geqslant 2, \ \mathbb{E}(X_n) = \frac{c_{n-1}}{c_n}.}$$

□

9. Dans cette question, exclusivement, on suppose que n est égal à 1. Préciser la fonction F_1.

En déduire l'ensemble des réels y vérifiant $\mathbb{P}([X_1 \leqslant y]) \geqslant \dfrac{1}{2}$.

Déterminer une densité de la variable aléatoire $Z = \ln(X_1)$.

Démonstration.

- Rappelons d'abord que, d'après l'énoncé, la v.a.r. X_1 prend ses valeurs dans $[1, +\infty[$, c'est-à-dire : $X_1(\Omega) \subset [1, +\infty[$.
  Déterminons alors la fonction de répartition F_1 de X_1.
  Soit $x \in \mathbb{R}$. Deux cas se présentent :
  × si $x < 1$, alors : $[X_1 \leqslant x] = \varnothing$, car $X_1(\Omega) \subset [1, +\infty[$. Donc :

$$F_1(x) \; = \; \mathbb{P}([X_1 \leqslant x]) \; = \; \int_{-\infty}^{x} f_1(t)\, dt \; = \; 0$$

  × Si $x \geqslant 1$.

$$\begin{array}{rcll}
F_1(x) & = & \mathbb{P}([X_1 \leqslant x]) \; = \; \displaystyle\int_{-\infty}^{x} f_1(t)\, dt & \\[2ex]
& = & \displaystyle\int_{1}^{x} f_1(t)\, dt & \textit{(car } f_1 \textit{ est nulle en dehors de } [1,+\infty[\textit{)} \\[2ex]
& = & \displaystyle\int_{1}^{x} \frac{1}{c_1\, t(1+t)}\, dt & \textit{(par définition de } f_1\textit{)} \\[2ex]
& = & \displaystyle\frac{1}{\ln(2)} \int_{1}^{x} \frac{1}{t} - \frac{1}{t+1}\, dt & \textit{(car, d'après 4., } c_1 = \ln(2)\textit{)} \\[2ex]
& = & \displaystyle\frac{1}{\ln(2)} \Big[\, \ln(t) - \ln(t+1)\, \Big]_1^x & \\[2ex]
& = & \displaystyle\frac{1}{\ln(2)} \big(\ln(x) - \ln(x+1) + \ln(2)\big) & \\[2ex]
& = & \displaystyle 1 - \frac{1}{\ln(2)} \ln\left(\frac{x+1}{x}\right) & \\[2ex]
& = & \displaystyle 1 - \frac{1}{\ln(2)} \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) &
\end{array}$$

$$\boxed{\text{Finalement : } F_1 : x \mapsto \left\{ \begin{array}{cl} 1 - \dfrac{1}{\ln(2)} \ln\left(1 + \dfrac{1}{x}\right) & \text{si } x \geqslant 1 \\ 0 & \text{si } x < 1 \end{array} \right.}$$

- On note $\mathcal{S}$ l'ensemble des solutions de l'équation $\mathbb{P}([X_1 \leqslant y]) \geqslant \dfrac{1}{2}$.
  On a l'équivalence :
  $$\mathbb{P}([X_1 \leqslant y]) \geqslant \frac{1}{2} \;\Leftrightarrow\; F_1(y) \geqslant \frac{1}{2}$$
  - × Tout d'abord : $\forall y \in \,]-\infty, 1[$, $F_1(y) = 0$. Donc $\mathcal{S} \subset [1, +\infty[$.
  - × Ensuite, soit $y \geqslant 1$.
  $$\begin{array}{rcll} F_1(y) \geqslant \dfrac{1}{2} & \Leftrightarrow & 1 - \dfrac{1}{\ln(2)} \ln\left(1 + \dfrac{1}{y}\right) \geqslant \dfrac{1}{2} & \\ & \Leftrightarrow & \dfrac{1}{\ln(2)} \ln\left(1 + \dfrac{1}{y}\right) \leqslant \dfrac{1}{2} & \\ & \Leftrightarrow & \ln\left(1 + \dfrac{1}{y}\right) \leqslant \dfrac{1}{2}\ln(2) & \textit{(car } \ln(2) > 0\textit{)} \\ & \Leftrightarrow & \ln\left(1 + \dfrac{1}{y}\right) \leqslant \ln(\sqrt{2}) & \textit{(car } \dfrac{1}{2}\ln(2) = \ln\left(2^{\frac{1}{2}}\right) = \ln(\sqrt{2})\textit{)} \\ & \Leftrightarrow & 1 + \dfrac{1}{y} \leqslant \sqrt{2} & \textit{(car } x \mapsto e^x \textit{ est strictement croissante sur } \mathbb{R}\textit{)} \\ & \Leftrightarrow & \dfrac{1}{y} \leqslant \sqrt{2} - 1 & \\ & \Leftrightarrow & y \geqslant \dfrac{1}{\sqrt{2}-1} & \textit{(car } x \mapsto \dfrac{1}{x} \textit{ est strictement décroissante sur }]0, +\infty[\textit{)} \end{array}$$
  Or :
  $$\frac{1}{\sqrt{2}-1} = \frac{\sqrt{2}+1}{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)} = \frac{\sqrt{2}+1}{(\sqrt{2})^2 - 1^2} = \frac{\sqrt{2}+1}{2-1} = \sqrt{2}+1$$
  D'où : $\mathbb{P}([X_1 \leqslant y]) \geqslant \dfrac{1}{2} \quad\Leftrightarrow\quad y \geqslant \sqrt{2}+1$

  $$\boxed{\text{L'ensemble des réels } y \text{ vérifiant } \mathbb{P}([X_1 \leqslant y]) \geqslant \frac{1}{2} \text{ est donc } [\sqrt{2}+1, +\infty[}$$

- Déterminons la loi de Z.
  - × On note $h : x \mapsto \ln(x)$ de telle sorte que $Z = h(X_1)$.
    On rappelle : $X_1(\Omega) \subset [1, +\infty[$. On obtient alors :
    $$Z(\Omega) = \big(h(X_1)\big)(\Omega) = h\big(X_1(\Omega)\big) \subset h\big([1, +\infty[\big)$$
    Or, par continuité et stricte croissance de h sur $[1, +\infty[$:
    $$h\big([1, +\infty[\big) = \left[h(1), \lim_{x \to +\infty} h(x)\right[= [0, +\infty[$$
    $$\boxed{\text{Ainsi : } Z(\Omega) \subset [0, +\infty[}$$

× Déterminons la fonction de répartition de Z, notée F_Z.
Soit $x \in \mathbb{R}$. Deux cas se présentent :

- si $x < 0$, alors : $[Z \leqslant x] = \varnothing$, car $Z(\Omega) = [0, +\infty[$. Donc :

$$F_Z(x) = \mathbb{P}([Z \leqslant x]) = \mathbb{P}(\varnothing) = 0$$

- si $x \geqslant 0$.

$$\begin{array}{rcl} F_Z(x) & = & \mathbb{P}([Z \leqslant x]) \ = \ \mathbb{P}([\ln(X_1) \leqslant x]) \\ & = & \mathbb{P}([X_1 \leqslant \mathrm{e}^x]) \qquad \textit{(car } x \mapsto \mathrm{e}^x \textit{ est strictement croissante sur } \mathbb{R}\textit{)} \\ & = & F_1(\mathrm{e}^x) \end{array}$$

Or $x \geqslant 0$, donc $\mathrm{e}^x \geqslant \mathrm{e}^0 = 1$. D'où :

$$F_1(\mathrm{e}^x) \ = \ 1 - \frac{1}{\ln(2)} \ln\left(1 + \frac{1}{\mathrm{e}^x}\right) \ = \ 1 - \frac{1}{\ln(2)} \ln\left(1 + \mathrm{e}^{-x}\right)$$

$$\boxed{\text{Finalement : } F_Z : x \mapsto \left\{ \begin{array}{cl} 1 - \dfrac{1}{\ln(2)} \ln\left(1 + \mathrm{e}^{-x}\right) & \text{si } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{array} \right. .}$$

- Montrons que Z est une v.a.r. à densité.
  × La fonction F_Z est continue :
  - sur $]-\infty, 0[$ en tant que fonction constante,
  - sur $]0, +\infty[$ car $x \mapsto \ln(1 + \mathrm{e}^{-x})$ est continue sur $]0, +\infty[$ en tant que composée de fonctions continues sur $]0, +\infty[$,
  - en 0. En effet, d'une part : $\lim\limits_{x \to 0^-} F_Z(x) = 0$.
    D'autre part :

$$\lim_{x \to 0^+} F_Z(x) \ = \ F_Z(0) \ = \ 1 - \frac{1}{\ln(2)} \ln(1 + \mathrm{e}^{-0}) \ = \ 1 - \frac{1}{\cancel{\ln(2)}} \cancel{\ln(2)} \ = \ 1 - 1 \ = \ 0$$

On en déduit :

$$\lim_{x \to 0^-} F_Z(x) \ = \ F_Z(0) \ = \ \lim_{x \to 0^+} F_Z(x)$$

$$\boxed{\text{La fonction } F_Z \text{ est donc continue sur } \mathbb{R}.}$$

  × La fonction F_Z est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-\infty, 1[$ et $]1, +\infty[$ avec des arguments similaires à ceux de la continuité de F_Z sur ces intervalles.

$$\boxed{\text{La fonction } F_Z \text{ est donc de classe } \mathcal{C}^1 \text{ sur } \mathbb{R} \text{ sauf éventuellement en } 1.}$$

$$\boxed{\text{Ainsi } Z \text{ est une variable aléatoire à densité.}}$$

- Pour déterminer une densité f_Z de Z, on dérive la fonction F_Z sur $]-\infty, 1[$ et $]1, +\infty[$ (qui sont bien des intervalles **ouverts**).
  × Soit $x \in]-\infty, 0[$.

$$f_Z(x) \ = \ F_Z'(x) \ = \ 0$$

  × Soit $x \in]0, +\infty[$.

$$f_Z(x) \ = \ F_Z'(x) \ = \ -\frac{1}{\ln(2)} \frac{-\mathrm{e}^{-x}}{1 + \mathrm{e}^{-x}} \ = \ \frac{1}{\ln(2)} \frac{\frac{1}{\mathrm{e}^x}}{1 + \frac{1}{\mathrm{e}^x}} \ = \ \frac{1}{\ln(2)} \frac{1}{\mathrm{e}^x + 1}$$

× On choisit une valeur arbitraire de $f_Z(0)$: $f_Z(0) = 0$.

$$\boxed{\text{Finalement : } f_Z : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \in]-\infty, 0] \\ \dfrac{1}{\ln(2)} \dfrac{1}{e^x + 1} & \text{si } x \in]0, +\infty[\end{cases}}$$

□

10. Soit x un réel strictement supérieur à 1.
Justifier l'encadrement :

$$0 \leqslant \int_{1/x}^{1} \frac{u^n}{(1+u)^2} \, du \leqslant \frac{1}{n+1}$$

En déduire la limite suivante :

$$\lim_{n \to +\infty} \left(\int_{1/x}^{1} \frac{u^n}{(1+u)^2} \, du \right).$$

Transformer, pour tout entier naturel n non nul, $F_n(x)$ à l'aide d'une intégration par parties et en déduire l'égalité suivante :

$$\lim_{n \to +\infty} F_n(x) = 1.$$

Démonstration.

- × La fonction $u \mapsto \dfrac{u^n}{(1+u)^2}$ est continue sur $\left[\frac{1}{x}, 1\right]$.

  Donc l'intégrale $\displaystyle\int_{\frac{1}{x}}^{1} \frac{u^n}{(1+u)^2} \, du$ est bien définie.

  × Soit $u \in \left[\frac{1}{x}, 1\right]$.

  - Tout d'abord : $u \geqslant \dfrac{1}{x} > 0$, donc $u^n \geqslant 0$. D'où : $\dfrac{u^n}{(1+u)^2} \geqslant 0$.

    Ainsi, par croissance de l'intégrale, les bornes étant dans l'ordre croissant :

    $$\int_{\frac{1}{x}}^{1} \frac{u^n}{(1+u)^2} \, du \geqslant 0$$

  - On a les équivalences suivantes :

    $$\begin{aligned} u \geqslant 0 &\Leftrightarrow 1 + u \geqslant 1 \\ &\Leftrightarrow (1+u)^2 \geqslant 1 && \textit{(car } x \mapsto x^2 \textit{ est strictement croissante sur } [0, +\infty[\textit{)} \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{(1+u)^2} \leqslant 1 && \textit{(car } x \mapsto \frac{1}{x} \textit{ est strictement décroissante sur }]0, +\infty[\textit{)} \\ &\Leftrightarrow \frac{u^n}{(1+u)^2} \leqslant u^n \end{aligned}$$

    Ainsi, par croissance de l'intégrale, les bornes étant dans l'ordre croissant :

    $$\int_{\frac{1}{x}}^{1} \frac{u^n}{(1+u)^2} \, du \leqslant \int_{\frac{1}{x}}^{1} u^n \, du$$

    De plus, comme pour tout $u \in [0, 1]$, $u^n \geqslant 0$:

    $$\int_{\frac{1}{x}}^{1} u^n \, du \leqslant \int_{0}^{1} u^n \, du$$

On en déduit, par transitivité :

$$0 \leqslant \int_{\frac{1}{x}}^{1} \frac{u^n}{(1+u)^2}\, du \leqslant \int_0^1 u^n\, du$$

$$\int_0^1 u^n\, du = \left[\frac{u^{n+1}}{n+1} \right]_0^1 = \frac{1}{n+1}$$

$$\boxed{\text{Finalement : } 0 \leqslant \int_{\frac{1}{x}}^{1} \frac{u^n}{(1+u)^2}\, du \leqslant \frac{1}{n+1}}$$

- Or :
  - × $\lim\limits_{n\to+\infty} 0 = 0$,
  - × $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n+1} = 0$.

$$\boxed{\text{Ainsi, par théorème d'encadrement : } \lim_{n\to+\infty} \left(\int_{\frac{1}{x}}^{1} \frac{u^n}{(1+u)^2}\, du \right) = 0}$$

- Soit $n \geqslant 1$.

$$\begin{aligned}
F_n(x) &= \int_{-\infty}^{x} f_n(t)\, dt \\
&= \int_1^x f_n(t)\, dt && \textit{(car } f_n \textit{ est nulle en dehors de } [1,+\infty[\textit{)} \\
&= \int_1^x \frac{1}{c_n\, t^n(1+t)}\, dt && \textit{(par définition de } f_n\textit{)} \\
&= \frac{1}{c_n} \int_1^x \frac{1}{t^n(1+t)}\, dt && \textit{(par linéarité de l'intégrale)} \\
&= \frac{1}{c_n} \int_{\frac{1}{x}}^{1} \frac{u^n}{1+u}\, du && \textit{(d'après la question } \textbf{\textit{6.}}\textit{)}
\end{aligned}$$

On effectue l'intégration par parties (IPP) suivantes :

$$\left| \begin{array}{lcl lcl}
v(u) &=& \dfrac{1}{1+u} & v'(u) &=& -\dfrac{1}{(1+u)^2} \\
w(u) &=& \dfrac{1}{n}\, u^n & w'(u) &=& u^{n-1}
\end{array} \right.$$

Cette IPP est valide car les fonctions v et w sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$. On obtient :

$$\begin{aligned}
F_n(x) &= \frac{1}{c_n} \left(\left[\frac{1}{n} \frac{u^n}{1+u} \right]_{\frac{1}{x}}^{1} + \frac{1}{n} \int_{\frac{1}{x}}^{1} \frac{u^n}{(1+u)^2}\, du \right) \\
&= \frac{1}{c_n} \left(\frac{1}{2n} - \frac{1}{n} \frac{\left(\frac{1}{x}\right)^n}{1+\frac{1}{x}} + \frac{1}{n} \int_{\frac{1}{x}}^{1} \frac{u^n}{(1+u)^2}\, du \right) \\
&= \frac{1}{c_n\, 2n} - \frac{1}{c_n\, n} \frac{1}{x^n + x^{n-1}} + \frac{1}{c_n\, n} \int_{\frac{1}{x}}^{1} \frac{u^n}{(1+u)^2}\, du
\end{aligned}$$

Or, d'après la question ***3.*** : $c_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{2n}$. On obtient alors :

× tout d'abord : $\dfrac{1}{c_n\,2n} = \dfrac{\frac{1}{2n}}{c_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$

× ainsi : $\dfrac{1}{c_n\,n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 2$.
De plus, comme $x > 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} x^n = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} x^{n-1} = +\infty$. D'où : $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{x^n + x^{n-1}} = 0$.
Ainsi : $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{c_n\,n}\,\dfrac{1}{x^n + x^{n-1}} \;=\; 2 \times 0 = 0$.

× On a aussi démontré : $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\displaystyle\int_{\frac{1}{x}}^{1} \dfrac{u^n}{(1+u)^2}\,du \right) = 0$. D'où :

$$\frac{1}{c_n\,n} \int_{\frac{1}{x}}^{1} \frac{u^n}{(1+u)^2}\,du \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 2 \times 0 = 0$$

$$\boxed{\text{On en déduit : } \lim_{n\to+\infty} F_n(x) = 1}$$

□

Problème (EDHEC 2007)

On lance une pièce équilibrée (la probabilité d'obtenir Pile et celle d'obtenir Face étant toutes deux égales à $\frac{1}{2}$) et on note Z la variable aléatoire égale au rang du lancer où l'on obtient le premier Pile.
Après cette série de lancers, si Z a pris la valeur k ($k \in \mathbb{N}^*$), on remplit une urne de k boules numérotées $1, 2, \cdots, k$, puis on extrait au hasard une boule de cette urne.
On note X la variable aléatoire égale au numéro de la boule tirée après la procédure décrite ci-dessus.

1. On décide de coder l'événement « obtenir un Pile » par 1 et l'événement « obtenir un Face » par 0. On rappelle par ailleurs que la fonction `grand(1,1,'uin',1,k)` renvoie un entier aléatoire compris entre 1 et k.

a) Compléter le programme suivant pour qu'il affiche la valeur prise par Z lors de la première partie de l'expérience décrite ci-dessus.

```
z = 0
while hasard <> 1
  z = ........
  hasard = ........
end
disp(z)
```

Démonstration.

- La v.a.r. Z est le rang du premier Pile, où l'événement « obtenir Pile » est codé par 1.
- On simule donc les épreuves de Bernoulli. Pour cela, on utilise la variable `hasard`. Cette variable contient la réalisation d'une v.a.r. suivant une loi de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{2}$ (car les probabilités d'obtenir Pile et Face sont de $\frac{1}{2}$). On complète donc :

```
  hasard = grand(1,1,'bin',1,1/2)
```

- On s'arrête dès le premier succès rencontré, c'est-à-dire dès que la variable `hasard` contient 1. Autrement dit, on simule les épreuves de Bernoulli tant que la variable `hasard` ne contient pas le réel 1.
- La variable `z` est mise à jour à chaque tour de boucle : on ajoute 1 pour signaler qu'une nouvelle épreuve de Bernoulli a eu lieu. On complète donc :

```
  z = z + 1
```

Commentaire

Il s'agit ici d'un sujet ancien, écrit initialement en Turbo-Pascal. On peut penser que, dans un sujet actuel, la commande `grand(1,1,'bin',1,p)` ou `grand(1,1,'bin',1,1/2)` aurait été donnée par l'énoncé.

□

b) Quelles instructions faut-il ajouter à la fin de ce programme pour qu'il simule l'expérience aléatoire décrite dans ce problème et affiche la valeur prise par la variable aléatoire X ?

Démonstration.

- La v.a.r. X correspond au numéro de la boule tirée dans la seconde partie de l'expérience.
- Ainsi, si l'événement $[Z = k]$ est réalisé, c'est-à-dire si on obtient le premier Pile au $k^{\text{ème}}$ lancer, alors on tire aléatoirement parmi les boules numérotées 1 à k.
- On en déduit que, si la variable `z` contient une réalisation de la v.a.r. Z, alors on simule un tirage aléatoire parmi les boules numérotées de 1 à `z`. On obtient donc la commande suivante :

```
x = grand(1,1,'uin',1,z)
disp(x)
```

□

2. Établir la convergence de la série de terme général $\dfrac{1}{k}\left(\dfrac{1}{2}\right)^k$ $(k \in \mathbb{N}^*)$.

Démonstration.

- Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Par décroissance de la fonction inverse sur $]0, +\infty[$: $\dfrac{1}{k} \leqslant 1$. D'où :

$$\frac{1}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^k \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^k$$

- On obtient :
  - × $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $0 \leqslant \dfrac{1}{k}\left(\dfrac{1}{2}\right)^k \leqslant \left(\dfrac{1}{2}\right)^k$
  - × La série $\sum\limits_{n \geqslant 1} \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$ est une série géométrique de raison $\dfrac{1}{2} \in]-1, 1[$. Elle est donc convergente.

$$\boxed{\text{Par critère de comparaison des séries à termes positifs, la série } \sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{n}\left(\frac{1}{2}\right)^n \text{ converge.}}$$

□

3. Rappeler la loi de Z ainsi que son espérance et sa variance.

Démonstration.

- La première partie de l'expérience consiste en la succession d'une infinité d'épreuves de Bernoulli indépendantes et de même paramètre de succès $\dfrac{1}{2}$ (correspondant à la probabilité d'obtenir Pile).
- La v.a.r. Z correspond au rang du premier succès de cette expérience.

$$\boxed{\text{On en déduit : } Z \hookrightarrow \mathcal{G}\left(\frac{1}{2}\right).}$$

- En particulier, la v.a.r. Z admet une espérance et une variance. De plus :

$$\mathbb{E}(Z) = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$$

$$\mathbb{V}(Z) = \frac{1 - \frac{1}{2}}{\left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\frac{1}{\cancel{2}}}{\left(\frac{1}{2}\right)^{\cancel{2}}} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$$

$$\boxed{\mathbb{E}(Z) = 2 \text{ et } \mathbb{V}(Z) = 2.}$$

□

4. ***a)*** Pour tout couple (i,k) de $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$, déterminer la probabilité $\mathbb{P}_{[Z=k]}([X=i])$.

Démonstration.
Soit $(i,k) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$. Deux cas se présentent.

- Si $i > k$.
L'événement $[Z=k] \cap [X=i]$ est réalisé si et seulement si :
  - lors de la première partie de l'expérience, on a obtenu le premier Pile au $k^{\text{ème}}$ lancer,
ET
  - lors de la seconde partie de l'expérience, on a tiré la boule numéro i parmi les boules numérotées de 1 à k.

  Ceci est impossible si $i > k$. On obtient donc :
$$[Z=k] \cap [X=i] = \varnothing$$
On en déduit :
$$\mathbb{P}_{[Z=k]}([X=i]) \;=\; \frac{\mathbb{P}([Z=k] \cap [X=i])}{\mathbb{P}([Z=k])} \;=\; \frac{\mathbb{P}(\varnothing)}{\mathbb{P}([Z=k])} \;=\; 0$$
- Si $i \leqslant k$.
Si l'événement $[Z=k]$ est réalisé, alors la seconde partie de l'expérience consiste en un tirage uniforme sur k boules numérotées de 1 à k. D'où :
$$\mathbb{P}_{[Z=k]}([X=i]) \;=\; \frac{1}{k}$$

$$\boxed{\text{Finalement, pour tout } (i,k) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*,\ \mathbb{P}_{[Z=k]}([X=i]) = \begin{cases} 0 & \text{si } i > k \\ \dfrac{1}{k} & \text{si } i \leqslant k \end{cases}}$$
□

b) En déduire : $\forall i \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}([X=i]) = \sum\limits_{k=i}^{+\infty} \frac{1}{k} \left(\frac{1}{2}\right)^k$.

Démonstration.
Soit $i \in \mathbb{N}^*$.
La famille $([Z=k])_{k\in\mathbb{N}^*}$ forme un système complet d'événements.
Ainsi, par formule des probabilités totales :
$$\begin{aligned}
\mathbb{P}([X=i]) &= \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}([Z=k] \cap [X=i]) \\
&= \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}([Z=k])\, \mathbb{P}_{[Z=k]}([X=i]) && \textit{(car : } \forall k \in \mathbb{N}^*, \mathbb{P}([Z=k]) \neq 0\textit{)} \\
&= \sum_{k=1}^{i-1} \mathbb{P}([Z=k])\, \mathbb{P}_{[Z=k]}([X=i]) + \sum_{k=i}^{+\infty} \mathbb{P}([Z=k])\, \mathbb{P}_{[Z=k]}([X=i]) \\
&= \cancel{\sum_{k=1}^{i-1} \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} \frac{1}{2} \times 0} + \sum_{k=i}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} \frac{1}{2} \times \frac{1}{k} && \textit{(d'après la question précédente et car } Z \hookrightarrow \mathcal{G}\left(\frac{1}{2}\right)\textit{)} \\
&= \sum_{k=i}^{+\infty} \frac{1}{k} \left(\frac{1}{2}\right)^k
\end{aligned}$$

$$\boxed{\forall i \in \mathbb{N}^*,\ \mathbb{P}([X=i]) = \sum_{k=i}^{+\infty} \frac{1}{k} \left(\frac{1}{2}\right)^k}$$
□

c) On admet dans cette question que $\sum\limits_{i=1}^{+\infty} \sum\limits_{k=i}^{+\infty} = \sum\limits_{k=1}^{+\infty} \sum\limits_{i=1}^{k}$. Vérifier : $\sum\limits_{i=1}^{+\infty} \mathbb{P}([X=i]) = 1$.

Démonstration.
D'après la question précédente :

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{+\infty} \mathbb{P}([X=i]) &= \sum_{i=1}^{+\infty} \left(\sum_{k=i}^{+\infty} \frac{1}{k} \left(\frac{1}{2}\right)^k \right) \\
&= \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\sum_{i=1}^{k} \frac{1}{k} \left(\frac{1}{2}\right)^k \right) && \textit{(d'après l'énoncé)} \\
&= \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k} \left(\frac{1}{2}\right)^k \left(\sum_{i=1}^{k} 1 \right) && \textit{(car } \frac{1}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^k \textit{ ne dépend pas de la variable } i\textit{)} \\
&= \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{\cancel{k}} \left(\frac{1}{2}\right)^k \times \cancel{k} \\
&= \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k = \frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} && \textit{(car } \frac{1}{2} \in]-1,1[\textit{)} \\
&= 1
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{On a bien : } \sum_{i=1}^{+\infty} \mathbb{P}([X=i]) = 1}$$

□

Commentaire

- Le théorème (hors programme) autorisant l'interversion de sommes, donnée par l'énoncé, est le **théorème de Fubini**. Il s'énonce comme suit.
  Soient $K \subset \mathbb{N}$ et $I \subset \mathbb{N}$. Soit $(u_{k,i})_{(k,i)\in K\times I}$ une suite de réels.
  Sous « réserve de convergence absolue » :
  $$\sum_{k\in K} \left(\sum_{i\in I} u_{i,k} \right) = \sum_{i\in I} \left(\sum_{k\in K} u_{i,k} \right)$$
- Plus précisément, dans notre cas, on a : $K = \mathbb{N}^*$, $I = [\![1,k]\!]$ et $u_{i,k} = \frac{1}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^k$.
  On aurait donc effectué la démarche suivante :
  1) démontrer la convergence absolue de la série $\sum\limits_{i\in I} u_{i,,k}$
  L'ensemble I est fini, on travaille donc ici sur une somme finie (et non infinie) et il n'y a pas de convergence à démontrer,
  2) démontrer la convergence absolue de la série $\sum\limits_{k\in K} S_k$, où $S_k = \sum\limits_{i=1}^{k} u_{i,k}$.
  3) conclure quant à l'intersersion les symboles $\sum$ à l'aide du théorème de Fubini.
- Notons enfin que c'est ce théorème qui est à l'origine du théorème de transfert pour les couples de v.a.r. discrètes. En effet, l'espérance de la v.a.r. $g(X,Y)$ est donnée par :
  $$\begin{aligned}\mathbb{E}\big(g(X,Y)\big) &= \sum_{i\in X(\Omega)} \left(\sum_{j\in Y(\Omega)} g(i,j)\, \mathbb{P}([X=i]\cap[Y=j]) \right) \\ &= \sum_{j\in Y(\Omega)} \left(\sum_{i\in x(\Omega)} g(i,j)\, \mathbb{P}([X=i]\cap[Y=j]) \right)\end{aligned}$$
  ce qui est autorisé sous réserve de convergence absolue.

5. a) Montrer que, pour tout entier naturel i non nul, on a : $i\,\mathbb{P}([X=i]) \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^{i-1}$.

Démonstration.
Soit $i \in \mathbb{N}^*$.

- Soit $k \in [\![i, +\infty[\![$.
  Comme $i \leqslant k$, par décroissance de la fonction inverse sur $]0, +\infty[$:

$$\frac{1}{i} \geqslant \frac{1}{k}$$

$$\text{donc} \quad \frac{1}{i}\left(\frac{1}{2}\right)^k \geqslant \frac{1}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^k$$

$$\text{d'où} \quad \left(\frac{1}{2}\right)^k \geqslant \frac{i}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^k$$

- Soit $N \geqslant i$. En sommant les inégalités précédentes pour k variant de i à n, on obtient :

$$\sum_{k=i}^{N} \left(\frac{1}{2}\right)^k \geqslant \sum_{k=i}^{N} \frac{i}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^k = i \sum_{k=i}^{N} \frac{1}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^k$$

- De plus, les séries $\sum\limits_{k\geqslant i} \left(\frac{1}{2}\right)^k$ et $\sum\limits_{k\geqslant i} \frac{1}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^k$ convergent. En effet :

  $\times$ $\sum\limits_{k\geqslant i} \left(\frac{1}{2}\right)^k$ est une série géométrique de raison $\frac{1}{2} \in\,]-1, 1[$. On a alors :

$$\sum_{k=i}^{N} \left(\frac{1}{2}\right)^k = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^i - \left(\frac{1}{2}\right)^{N-i+1}}{1-\frac{1}{2}} \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} \left(\frac{1}{2}\right)^i \times \frac{1}{\frac{1}{2}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{i-1}$$

  $\times$ d'après la question ***4.b)***, la série $\sum\limits_{k\geqslant i} \frac{1}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^k$ converge et :

$$\sum_{k=i}^{N} \frac{1}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^k \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} \sum_{k=i}^{+\infty} \frac{1}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^k = \mathbb{P}([X=i])$$

- En passant à la limite quand N tend vers $+\infty$, on obtient donc :

$$\underbrace{\sum_{k=i}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k}_{=\left(\frac{1}{2}\right)^{i-1}} \geqslant \underbrace{i \sum_{k=i}^{+\infty} \frac{1}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^k}_{=i\,\mathbb{P}([X=i])}$$

$$\boxed{\text{Finalement : } \forall i \in \mathbb{N}^*,\ i\,\mathbb{P}([X=i]) \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^{i-1}.}$$

Commentaire

On rappelle que la convergence des séries en présence est indispensable pour obtenir l'inégalité :

$$\sum_{k=i}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k \geqslant \sum_{k=i}^{+\infty} \frac{i}{k} \left(\frac{1}{2}\right)^k$$

à partir de l'inégalité :

$$\forall N \geqslant i, \quad \sum_{k=i}^{N} \left(\frac{1}{2}\right)^k \geqslant \sum_{k=i}^{N} \frac{i}{k} \left(\frac{1}{2}\right)^k$$

□

b) En déduire que X possède une espérance.

Démonstration.

- La v.a.r. X admet une espérance si et seulement si la série $\sum\limits_{i \geqslant 1} i\, \mathbb{P}([X = i])$ est absolument convergente, ce qui revient à démontrer sa convergence car c'est une série à termes positifs.
- On sait :
  - × d'après la question précédente :

$$\forall i \in \mathbb{N}^*, \quad 0 \leqslant i\, \mathbb{P}([X = i]) \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^{i-1}$$

  - × la série $\sum\limits_{i \geqslant 1} \left(\frac{1}{2}\right)^{i-1}$ est une série convergente. En effet, soit $N \geqslant 1$:

$$\sum_{i=1}^{N} \left(\frac{1}{2}\right)^{i-1} = \sum_{i=0}^{N-1} \left(\frac{1}{2}\right)^{i} \quad \textit{(par décalage d'undice)}$$

  Or $\sum\limits_{i \geqslant 0} \left(\frac{1}{2}\right)^{i}$ est une série géométrique de raison $\frac{1}{2} \in \,]-1, 1[$, donc elle est convergente.

  Par critère de comparaison des séries à termes positifs, la série $\sum\limits_{i \geqslant 1} i\, \mathbb{P}([X = i])$ converge.

$$\boxed{\text{On en déduit que } X \text{ admet une espérance.}}$$

□

c) Montrer, en admettant qu'il est licite de permuter les symboles $\sum$ comme dans la question ***4c)*** :

$$\mathbb{E}(X) = \frac{3}{2}$$

Démonstration.
Par définition de l'espérance :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X) &= \sum_{i=1}^{+\infty} i\,\mathbb{P}([X=i]) \\
&= \sum_{i=1}^{+\infty} i\left(\sum_{k=i}^{+\infty} \frac{1}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^k\right) && \textit{(d'après } \textbf{\textit{4.b)}}\textit{)} \\
&= \sum_{i=1}^{+\infty} \left(\sum_{k=i}^{+\infty} \frac{i}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^k\right) \\
&= \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\sum_{i=1}^{k} \frac{i}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^k\right) && \textit{(d'après l'énoncé)} \\
&= \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^k \left(\sum_{i=1}^{k} i\right) \\
&= \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{\cancel{k}}\left(\frac{1}{2}\right)^k \frac{\cancel{k}(k+1)}{2} \\
&= \sum_{k=1}^{+\infty} (k+1)\left(\frac{1}{2}\right)^{k+1} \\
&= \sum_{k=2}^{+\infty} k\left(\frac{1}{2}\right)^{k} && \textit{(par décalage d'indice)} \\
&= \frac{1}{2}\sum_{k=2}^{+\infty} k\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} \\
&= \frac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^{+\infty} k\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} - 1\right)
\end{aligned}$$

Or la série $\sum\limits_{k\geqslant 1} k\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}$ est une série géométrique dérivée de raison $\frac{1}{2} \in\ ]-1,1[$, donc elle est convergente. On obtient :

$$\mathbb{E}(X) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{(1-\frac{1}{2})^2} - 1\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\frac{1}{4}} - 1\right) = \frac{1}{2}\,(4-1) = \frac{3}{2}$$

$$\boxed{\mathbb{E}(X) = \frac{3}{2}}$$

□

6. a) Utiliser le résultat de la question ***5a)*** pour montrer que X a un moment d'ordre 2.

Démonstration.

- La v.a.r. X admet un moment d'ordre 2 si et seulement si la série $\sum\limits_{i \geqslant 1} i^2\, \mathbb{P}([X=i])$ est absolument convergente, ce qui revient à démontrer sa convergence car c'est une série à termes positifs.
- On sait :
  × d'après la question ***5.a)*** :
  $$0 \ \leqslant\ i\, \mathbb{P}([X=i]) \ \leqslant\ \left(\frac{1}{2}\right)^{i-1}$$
  D'où :
  $$0 \ \leqslant\ i^2\, \mathbb{P}([X=i]) \ \leqslant\ i \left(\frac{1}{2}\right)^{i-1}$$
  × La série $\sum\limits_{i \geqslant 1} i \left(\frac{1}{2}\right)^{i-1}$ est une série géométrique dérivée de raison $\frac{1}{2} \in\ ]-1,1[$.
  Elle est donc convergente.

  Par critère de comparaison des séries à termes positifs, la série $\sum\limits_{i \geqslant 1} i^2\, \mathbb{P}([X=i])$ est convergente.

$$\boxed{\text{On en déduit que la v.a.r. } X \text{ admet un moment d'ordre 2.}}$$

□

b) Établir, alors, toujours en admettant qu'il est licite de permuter les symboles $\sum$ comme dans la question ***4c)*** :
$$\mathbb{E}(X^2) \ =\ \frac{1}{6} \sum_{k=1}^{+\infty} (k+1)(2k+1) \left(\frac{1}{2}\right)^k$$

Démonstration.
Par définition du moment d'ordre 2 :
$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X^2) &= \sum_{i=1}^{+\infty} i^2\, \mathbb{P}([X=i]) \\
&= \sum_{i=1}^{+\infty} i^2 \left(\sum_{k=i}^{+\infty} \frac{1}{k} \left(\frac{1}{2}\right)^k \right) && \textit{(d'après } \textbf{\textit{4.b)}}\textit{)} \\
&= \sum_{i=1}^{+\infty} \left(\sum_{k=i}^{+\infty} \frac{i^2}{k} \left(\frac{1}{2}\right)^k \right) \\
&= \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\sum_{i=1}^{k} \frac{i^2}{k} \left(\frac{1}{2}\right)^k \right) && \textit{(d'après l'énoncé)} \\
&= \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k} \left(\frac{1}{2}\right)^k \left(\sum_{i=1}^{k} i^2 \right) \\
&= \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{\cancel{k}} \left(\frac{1}{2}\right)^k \frac{\cancel{k}(k+1)(2k+1)}{6} \\
&= \frac{1}{6} \sum_{k=1}^{+\infty} (k+1)(2k+1) \left(\frac{1}{2}\right)^k
\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathbb{E}(X^2) \ =\ \frac{1}{6} \sum_{k=1}^{+\infty} (k+1)(2k+1) \left(\frac{1}{2}\right)^k}$$

□

c) Déterminer les réels a, b et c tels que : $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $(k+1)(2k+1) = a\,k\,(k-1) + b\,k + c$.

Démonstration.
Soit $k \in \mathbb{N}^*$.

- D'une part :
$$(k+1)(2k+1) \ = \ 2k^2 + 3k + 1$$

- D'autre part :
$$a\,k(k-1) + b\,k + c \ = \ a\,(k^2 - k) + b\,k + c \ = \ a\,k^2 + (b-a)\,k + c$$

- Par identification, on obtient :
$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} a & & & & & = & 2 \\ -a & + & b & & & = & 3 \\ & & & & c & = & 1 \end{array}\right. \quad \underset{L_2 \leftarrow L_2 + L_1}{\Longleftrightarrow} \quad \left\{\begin{array}{rcrcrcl} a & & & & & = & 2 \\ & & b & & & = & 5 \\ & & & & c & = & 1 \end{array}\right.$$

$$\boxed{\text{On en déduit : } \forall k \in \mathbb{N}^*,\ (k+1)(2k+1) = 2\,k(k-1) + 5\,k + 1.}$$

□

d) En déduire la valeur de $\mathbb{E}(X^2)$ et vérifier : $\mathbb{V}(X) = \dfrac{11}{12}$.

Démonstration.

- D'après la question ***6.b)*** :
$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X^2) \ &= \ \frac{1}{6} \sum_{k=1}^{+\infty} (k+1)(2k+1) \left(\frac{1}{2}\right)^k \\ &= \ \frac{1}{6} \sum_{k=1}^{+\infty} \big(2\,k(k-1) + 5\,k + 1\big) \left(\frac{1}{2}\right)^k \\ &= \ \frac{1}{3} \sum_{k=1}^{+\infty} k(k-1) \left(\frac{1}{2}\right)^k \ + \ \frac{5}{6} \sum_{k=1}^{+\infty} k \left(\frac{1}{2}\right)^k \ + \ \frac{1}{6} \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k \end{aligned}$$

- Or :
  × tout d'abord :
$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{+\infty} k(k-1) \left(\frac{1}{2}\right)^k \ &= \ \sum_{k=2}^{+\infty} k(k-1) \left(\frac{1}{2}\right)^k && \textit{(car } 1 \times (1-1) \left(\frac{1}{2}\right)^1 = 0\textit{)} \\ &= \ \left(\frac{1}{2}\right)^2 \sum_{k=2}^{+\infty} k(k-1) \left(\frac{1}{2}\right)^{k-2} \\ &= \ \frac{1}{4} \times \frac{2}{\left(1 - \frac{1}{2}\right)^3} && \textit{(car } \frac{1}{2} \in \,]-1, 1[\textit{)} \\ &= \ \frac{1}{2} \times \frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)^3} \ = \ \frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)^2} \\ &= \ 4 \end{aligned}$$

× De plus :

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{+\infty} k\left(\frac{1}{2}\right)^k &= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{+\infty} k\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} \\ &= \frac{1}{2}\times\frac{1}{(1-\frac{1}{2})^2} \qquad \textit{(car } \frac{1}{2}\in\,]-1,1[\textit{)} \\ &= \cancel{\frac{1}{2}}\times\frac{1}{(\frac{1}{2})^{\cancel{2}}} \\ &= 2\end{aligned}$$

× Enfin :

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^k &= \sum_{k=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^k - 1 \\ &= \frac{1}{1-\frac{1}{2}} - 1 \qquad \textit{(car } \frac{1}{2}\in\,]-1,1[\textit{)} \\ &= 2-1 \\ &= 1\end{aligned}$$

- On en déduit :

$$\mathbb{E}(X^2) = \frac{1}{3}\times 4 + \frac{5}{6}\times 2 + \frac{1}{6}\times 1 = \frac{4}{3}+\frac{5}{3}+\frac{1}{6} = \frac{8+10+1}{6} = \frac{19}{6}$$

$$\boxed{\mathbb{E}(X^2) = \frac{19}{6}}$$

- D'après la formule de Koenig-Huygens :

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}\left(X^2\right) - \left(\mathbb{E}(X)\right)^2 = \frac{19}{6} - \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{19}{6}-\frac{9}{4} = \frac{38-27}{12} = \frac{11}{12}$$

$$\boxed{\mathbb{V}(X) = \frac{11}{12}}$$

□

7. On admet le résultat suivant, appelé *Inégalité de Bienaymé-Chebychev.*
Soit X une v.a.r. qui admet une variance. Alors :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \mathbb{P}\left([|X-\mathbb{E}[X]| \geqslant \varepsilon]\right) \leqslant \frac{\mathbb{V}(X)}{\varepsilon^2}$$

En déduire : $\mathbb{P}([X \geqslant 3]) \leqslant \dfrac{11}{27}$.

Démonstration.

- D'après la question précédente, la v.a.r. X admet une variance.
  On en déduit, d'après l'inégalité de Bienaymé-Chebychev, soit $\varepsilon > 0$:

$$\begin{array}{ccccc}\mathbb{P}\left([|X-\mathbb{E}(X)| \geqslant \varepsilon]\right) & \leqslant & \dfrac{\mathbb{V}(X)}{\varepsilon^2} & & \\ \shortparallel & & \shortparallel & & \\ \mathbb{P}\left(\left[\left|X-\dfrac{3}{2}\right| \geqslant \varepsilon\right]\right) & & \dfrac{\frac{11}{12}}{\varepsilon^2} & = & \dfrac{11}{12\,\varepsilon^2} \quad \textit{(d'après } \textbf{\textit{6.d)}}\textit{)}\end{array}$$

- De plus : $\left[X - \frac{3}{2} \geqslant \varepsilon\right] \subset \left[\left|X - \frac{3}{2}\right| \geqslant \varepsilon\right]$.
  En effet, soit $\omega \in \left[X - \frac{3}{2} \geqslant \varepsilon\right]$, alors : $X(\omega) - \frac{3}{2} \geqslant \varepsilon$.
  Or $\varepsilon > 0$, donc, par croissance de $x \mapsto |x|$ sur $[0, +\infty[$:
  $$\left|X(\omega) - \frac{3}{2}\right| \ \geqslant\ |\varepsilon| = \varepsilon$$
  c'est-à-dire : $\omega \in \left[\left|X - \frac{3}{2}\right| \geqslant \varepsilon\right]$.
- On en déduit, par croissance de l'application $\mathbb{P}$:
  $$\mathbb{P}\left(\left[X - \frac{3}{2} \geqslant \varepsilon\right]\right) \ \leqslant\ \mathbb{P}\left(\left[\left|X - \frac{3}{2}\right| \geqslant \varepsilon\right]\right)$$
  Ainsi, par transitivité :
  $$\mathbb{P}\left(\left[X - \frac{3}{2} \geqslant \varepsilon\right]\right) \ \leqslant\ \mathbb{P}\left(\left[\left|X - \frac{3}{2}\right| \geqslant \varepsilon\right]\right) \ \leqslant\ \frac{11}{12\,\varepsilon^2}$$
- Or : $\left[X - \frac{3}{2} \geqslant \varepsilon\right] \ = \ \left[X \geqslant \varepsilon + \frac{3}{2}\right]$.
  Ainsi, en choisissant ε tel que $\varepsilon + \frac{3}{2} = 3$, on obtient :
  $$\mathbb{P}([X \geqslant 3]) \ \leqslant\ \frac{11}{12\,\varepsilon^2}$$
  De plus :
  $$\varepsilon + \frac{3}{2} = 3 \ \Leftrightarrow\ \varepsilon = 3 - \frac{3}{2} = \frac{3}{2}$$
  On en déduit : $\mathbb{P}([X \geqslant 3]) \leqslant \dfrac{11}{12\left(\frac{3}{2}\right)^2}$.
  Enfin :
  $$\frac{11}{12\left(\frac{3}{2}\right)^2} \ = \ \frac{11}{12 \times \frac{9}{4}} \ = \ \frac{11 \times 4}{12 \times 9} \ = \ \frac{11}{3 \times 9} \ = \ \frac{11}{27}$$
  $$\boxed{\text{Finalement : } \mathbb{P}([X \geqslant 3]) \leqslant \frac{11}{27}.}$$

□

8. On se propose de calculer $\mathbb{P}([X = 1])$, $\mathbb{P}([X = 2])$ et $\mathbb{P}([X \geqslant 3])$.

a) Écrire explicitement en fonction de x et n la somme $\sum\limits_{k=1}^{n} x^{k-1}$ (n désignant un entier naturel non nul et x un réel différent de 1).

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$. Par décalage d'indice :
$$\sum_{k=1}^{n} x^{k-1} \ = \ \sum_{k=0}^{n-1} x^k$$
Comme $x \neq 1$, la somme des termes d'une suite géométrique de raison x vaut :
$$\sum_{k=0}^{n-1} x^k \ = \ \frac{1 - x^n}{1 - x}$$
$$\boxed{\sum_{k=1}^{n} x^{k-1} \ = \ \frac{1 - x^n}{1 - x}}$$

□

b) En déduire : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^k = \ln(2) - \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^n}{1-x}\, dx$.

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

- D'après la question précédente, pour tout $x \neq 1$:

$$\sum_{k=1}^{n} x^{k-1} \;=\; \frac{1-x^n}{1-x} \;=\; \frac{1}{1-x} - \frac{x^n}{1-x}$$

- De plus les fonctions $x \mapsto \sum\limits_{k=1}^{n} x^{k-1}$, $x \mapsto \frac{1}{1-x}$ et $x \mapsto \frac{x^n}{1-x}$ sont continues sur $\left[0, \frac{1}{2}\right]$.

- Ainsi :

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \sum_{k=1}^{n} x^{k-1}\, dx \;=\; \int_0^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{1-x} - \frac{x^n}{1-x}\right) dx$$

Or :

× d'une part, par linéarité de l'intégrale :

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \sum_{k=1}^{n} x^{k-1}\, dx \;=\; \sum_{k=1}^{n} \left(\int_0^{\frac{1}{2}} x^{k-1}\, dx\right) \;=\; \sum_{k=1}^{n} \left[\frac{x^k}{k}\right]_0^{\frac{1}{2}} \;=\; \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^k - \cancel{\frac{1}{k}0^k}\right)$$

× d'autre part, toujours par linéarité de l'intégrale :

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{1-x} - \frac{x^n}{1-x}\right) dx \;&=\; \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{1-x}\, dx - \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^n}{1-x}\, dx \\ &=\; \Big[-\ln\left(|1-x|\right)\Big]_0^{\frac{1}{2}} - \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^n}{1-x}\, dx \\ &=\; -\ln\left(1-\frac{1}{2}\right) + \cancel{\ln(1-0)} - \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^n}{1-x}\, dx\end{aligned}$$

Or :

$$-\ln\left(1-\frac{1}{2}\right) \;=\; -\ln\left(\frac{1}{2}\right) \;=\; -\big(-\ln(2)\big) \;=\; \ln(2)$$

On en déduit :

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{1-x} - \frac{x^n}{1-x}\right) dx \;=\; \ln(2) - \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^n}{1-x}\, dx$$

$$\boxed{\text{Finalement : } \forall n \in \mathbb{N}^* : \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^k = \ln(2) - \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^n}{1-x}\, dx}$$

□

c) Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}^* : 0 \leqslant \displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^n}{1-x}\, dx \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^n$.

En déduire la valeur de $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^n}{1-x}\, dx$.

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

- Soit $x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$.

$$0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{2}$$

$$\begin{array}{lll}
\text{donc} & 0 \geqslant -x \geqslant -\dfrac{1}{2} & \\
\text{d'où} & 1 \geqslant 1-x \geqslant \dfrac{1}{2} & \\
\text{ainsi} & 1 \leqslant \dfrac{1}{1-x} \leqslant 2 & \textit{(par décroissance de } x \mapsto \dfrac{1}{x} \textit{ sur }]0,+\infty[\textit{)} \\
\text{enfin} & x^n \leqslant \dfrac{x^n}{1-x} \leqslant 2\,x^n & \textit{(car } x^n \geqslant 0\textit{)}
\end{array}$$

  On en déduit : $0 \leqslant \dfrac{x^n}{1-x} \leqslant 2\,x^n$.

- Ainsi, par croissance de l'intégrale, les bornes étant dans l'ordre croissant :

$$0 \leqslant \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^n}{1-x}\, dx \leqslant \int_0^{\frac{1}{2}} 2\,x^n\, dx$$

- De plus :

$$\int_0^{\frac{1}{2}} 2\,x^n\, dx = 2\left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^{\frac{1}{2}} = \frac{2}{n+1}\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} = \frac{\cancel{2}}{n+1}\,\frac{1}{2^{n+\cancel{1}}} = \frac{1}{n+1}\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

  Enfin, comme $0 \leqslant \dfrac{1}{n+1} \leqslant 1$:

$$\frac{1}{n+1}\left(\frac{1}{2}\right)^n \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

$$\boxed{\text{On en déduit : } \forall n \in \mathbb{N}^*,\ 0 \leqslant \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^n}{1-x}\, dx \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^n.}$$

- On obtient alors :
  - × $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} 0 = 0$
  - × $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$, car $\dfrac{1}{2} \in]-1, 1[$.

$$\boxed{\text{Ainsi, par théorème d'encadrement : } \lim_{n \to +\infty} \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^n}{1-x}\, dx = 0.}$$

□

d) Établir alors : $\mathbb{P}([X=1]) = \ln(2)$, puis donner la valeur de $\mathbb{P}([X=2])$.

Démonstration.

- D'après la question ***4.b)*** : $\mathbb{P}([X=1]) = \sum\limits_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^k$.
- De plus, d'après la question ***8.b)***, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^k \;=\; \ln(2) - \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^n}{1-x}\,dx$$

Or, d'après la question précédente : $\lim\limits_{n\to+\infty} \displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^n}{1-x}\,dx = 0$. Ainsi :

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^k \;=\; \ln(2) - 0$$

$$\boxed{\text{On en déduit : } \mathbb{P}([X=1]) = \ln(2).}$$

- D'après la question ***4.b)*** :

$$\mathbb{P}([X=1]) \;=\; \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^k \;=\; \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^k - \frac{1}{1}\left(\frac{1}{2}\right)^1 \;=\; \ln(2) - \frac{1}{2}$$

$$\boxed{\mathbb{P}([X=2]) = \ln(2) - \frac{1}{2}}$$

□

e) Utiliser les résultats précédents pour calculer $\mathbb{P}([X \geqslant 3])$, puis donner une valeur approchée de $\mathbb{P}([X \geqslant 3])$ en prenant $\ln(2) \simeq 0,7$. Que peut-on en déduire en ce qui concerne le majorant trouvé à la septième question ?

Démonstration.

- Comme $X(\Omega) \subset \mathbb{N}^*$, la famille $([X=1], [X=2], [X \geqslant 3])$ est un système complet d'événements.
  Ainsi, par formule des probabilités totales :

$$\mathbb{P}([X=1]) + \mathbb{P}([X=2]) + \mathbb{P}([X \geqslant 3]) \;=\; 1$$

On en déduit :

$$\mathbb{P}([X \geqslant 3]) \;=\; 1 - \big(\mathbb{P}([X=1]) + \mathbb{P}([X=2])\big) \;=\; 1 - \left(\ln(2) + \ln(2) - \frac{1}{2}\right) \;=\; \frac{3}{2} - 2\,\ln(2)$$

$$\boxed{\mathbb{P}([X \geqslant 3]) = \frac{3}{2} - 2\,\ln(2)}$$

$$\boxed{\text{D'après l'énoncé, on obtient : } \mathbb{P}([X \geqslant 3]) \;\simeq\; \frac{3}{2} - 2 \times 0,7 \;=\; 1,5 - 1,4 \;=\; 0,1.}$$

- La majoration donnée par l'inégalité de Bienaymé-Chebychev est $\frac{11}{27} \simeq 0,4$.

$$\boxed{\text{On en déduit que la majoration donnée par la question } \textbf{7.} \text{ est très large.}}$$

Commentaire

Ce constat n'est pas étonnant : les inégalités de concentration sont toutes peu précises.

□