

DS6 (version B)

Problème I

Dans tout le problème, n est un entier tel que $n \geq 2$.

On note $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées réelles d'ordre n et $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices réelles à une colonne et n lignes, nommées « matrices colonnes » dans la suite du problème.

Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, alors tA désigne la matrice transposée de A .

Si $V \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, alors tV désigne la matrice transposée de V .

Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et si $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$, alors le coefficient de la ligne numéro i et de la colonne numéro j de A est notée $a_{i,j}$, la matrice A est notée $A = (a_{i,j})_{1 \leq i, j \leq n}$.

Si $V = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, alors la matrice colonne V est notée $V = (v_i)_{1 \leq i \leq n}$.

Si $A = (a_{i,j})_{1 \leq i, j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, alors pour tout $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on note $C_j(A)$ la matrice colonne de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ constituée des coefficients de la colonne numéro j de A . Ainsi : $C_j(A) = (a_{i,j})_{1 \leq i \leq n}$.

Partie I : Un exemple

Soient $U_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$, $V_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $A_0 = U_0 {}^tV_0$.

1. Vérifier que 0 est valeur propre de A_0 et déterminer une base du sous-espace propre associé.
2. a) Calculer $A_0 U_0$.
b) Montrer que A_0 est diagonalisable dans $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$.
c) Déterminer une matrice diagonale D de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ et une matrice inversible P de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ telles que $A_0 = PDP^{-1}$.

Partie II : Trace d'une matrice carrée

Pour toute matrice $A = (a_{i,j})_{1 \leq i, j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on appelle trace de A et on note $\text{tr}(A)$ la somme des coefficients diagonaux de A , c'est-à-dire $\text{tr}(A) = \sum_{i=1}^n a_{i,i}$.

3. Montrer que l'application $\text{tr} : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$, est linéaire.
$$A \mapsto \text{tr}(A)$$

4. Montrer : $\forall (A, B) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))^2$, $\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$.

5. Vérifier, pour tout $A = (a_{i,j})_{1 \leq i, j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$: $\text{tr}({}^tAA) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{j,i}^2$.

Partie III : Une caractérisation des matrices de rang 1

6. Soient $U = (u_i)_{1 \leq i \leq n}$ et $V = (v_i)_{1 \leq i \leq n}$ deux matrices colonnes non nulles de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

a) Justifier : $U^t V \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Déterminer les coefficients de $U^t V$ à l'aide des coefficients de U et de V .

b) Exprimer $\text{tr}(U^t V)$ à l'aide des coefficients de U et de V .

c) Quel est le rang de $U^t V$.

7. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice de rang 1.

a) Montrer qu'il existe $j_0 \in \llbracket 1, n \rrbracket$ tel que, pour tout $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$, il existe $\alpha_j \in \mathbb{R}$ vérifiant :

$$C_j(A) = \alpha_j C_{j_0}(A)$$

b) En déduire qu'il existe deux matrices colonnes non nulles U et V de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ telles que $A = U^t V$.

8. Énoncer une caractérisation des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de rang 1.

Partie IV : Une caractérisation des matrices de rang 1 diagonalisables

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice de rang 1. On note U et V deux matrices colonnes non nulles de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ telles que $A = U^t V$ et on note $a = \text{tr}(A)$.

9. Montrer que 0 est valeur propre de A et déterminer la dimension du sous-espace propre associé.

10. Montrer : ${}^t V U = (a)$, puis : $A^2 = a A$.

11. Montrer que si $a = 0$, alors A n'est pas diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

12. On suppose $a \neq 0$. Calculer $A U$. Déduire des questions précédentes que A est diagonalisable.

13. Énoncer une condition nécessaire et suffisante pour qu'une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de rang 1 soit diagonalisable.

Problème II

Ce problème comporte deux parties relativement indépendantes.

Dans la première partie on étudie les lois log-normales. On s'intéresse dans la partie II à une modélisation du cours d'une action appelée modèle binomial ou de Cox-Ross-Rubinstein et à son comportement asymptotique.

Notations et définitions

- Les variables aléatoires qui interviennent dans ce problème sont toutes définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.
- On note Φ la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite.
- On note respectivement $\mathbb{E}(X)$ et $\mathbb{V}(X)$ l'espérance et la variance d'une variable aléatoire X , lorsque celles-ci existent.
- Soit m un réel et σ un réel strictement positif. On dit qu'une variable aléatoire X suit la loi log-normale de paramètres (m, σ^2) si X est à valeurs strictement positives et si $\ln(X)$ suit la loi normale de paramètres (m, σ^2) . On écrit alors $X \hookrightarrow \mathcal{LN}(m, \sigma^2)$.

Partie I - Quelques propriétés des lois log-normales

On note dans cette partie m un réel et σ un réel strictement positif.

Soit X une variable aléatoire réelle suivant la loi log-normale de paramètres (m, σ^2) .

On pourra dans la suite utiliser la variable aléatoire $Y = \ln(X)$.

1. Soit a et b deux réels, a étant différent de 0. On rappelle que si U est une variable aléatoire qui suit une loi normale de paramètres (m, σ^2) , alors $aU + b$ suit aussi une loi normale. Quels en sont les paramètres ?

2. Cas où $m = 0$.

On suppose dans cette question 2 que $X \hookrightarrow \mathcal{LN}(0, \sigma^2)$.

a) Densité.

Exprimer la fonction de répartition F de X en fonction de Φ .

En déduire que X est une variable aléatoire à densité et que la fonction définie par :

$$x \mapsto \begin{cases} \frac{1}{x \sigma \sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(\ln(x))^2}{2\sigma^2}\right) & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

est une densité de probabilité de X .

b) Espérance.

(i) Établir l'existence de $\mathbb{E}(X)$ et l'égalité : $\mathbb{E}(X) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{y^2}{\sigma^2} - 2y\right)\right) dy$.

(ii) En utilisant le changement de variable $t = \frac{y}{\sigma} - \sigma$, en déduire $\mathbb{E}(X)$ en fonction de σ .

c) Variance.

(i) Soit α un réel non nul. Montrer que X^α suit une loi log-normale dont on précisera les paramètres.

(ii) En déduire que X admet une variance et : $\mathbb{V}(X) = e^{\sigma^2} (e^{\sigma^2} - 1)$.

3. On reprend le cas général : $X \hookrightarrow \mathcal{LN}(m, \sigma^2)$.

a) Soit μ un réel strictement positif.

Montrer que μX suit une loi log-normale de paramètres $(m + \ln(\mu), \sigma^2)$.

b) Justifier l'existence de $\mathbb{E}(X)$, de $\mathbb{V}(X)$, et établir :

$$\mathbb{E}(X) = e^{m + \frac{\sigma^2}{2}} \quad \text{et} \quad \mathbb{V}(X) = e^{2m + \sigma^2} (e^{\sigma^2} - 1)$$

Partie II - Le modèle binomial de Cox-Ross-Rubinstein

Soit n un entier naturel non nul.

On souhaite modéliser l'évolution du cours d'une action entre les dates 0 et t fixé, strictement positif.

On suppose qu'initialement ce cours est $S_{0,n} = 1$ et si l'on note $S_{k,n}$ la valeur aléatoire de ce cours à la date $\frac{kt}{n}$, $k \in \{1, \dots, n\}$, on a la relation :

$$S_{k,n} = S_{k-1,n} \times \left(1 + \frac{\mu}{n} + \frac{v}{\sqrt{n}} Y_k \right)$$

où :

- μ est une constante réelle strictement positive liée au rendement moyen de l'action sur une durée égale à t ;
- v est une constante réelle strictement positive appelée volatilité de l'action sur la durée t ;
- $(Y_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ est une suite de variables aléatoires indépendantes suivant toutes la loi uniforme sur $\{-1, 1\}$ (autrement dit : $\mathbb{P}([Y_k = 1]) = \mathbb{P}([Y_k = -1]) = \frac{1}{2}$).

On suppose que n est assez grand pour que $1 + \frac{\mu}{n} - \frac{v}{\sqrt{n}} > 0$.

On admet que $S_{0,n}, \dots, S_{n,n}$ sont des variables aléatoires discrètes.

On note C_n la variable aléatoire $S_{n,n}$, qui modélise le cours de l'action à l'instant t .

4. Simulation de la variable aléatoire C_n .

a) Que renvoie la fonction **Scilab** suivante ?

```

1  function Y = mystere()
2      u = rand()
3      if u < 1/2 then
4          Y = -1
5      else
6          Y = 1
7      end
8  endfunction
    
```

b) Dans la déclaration de fonction qui suit, remplacer les « ... » par des expressions en **Scilab** pour que la fonction ainsi déclarée simule la variable aléatoire C_n .

```

1  function C = SimuC(n, mu, v)
2      C = 1
3      for k = ...
4          C = C * ...
5      end
6  endfunction
    
```

5. a) Calculer l'espérance et la variance commune aux Y_k .

b) (i) Montrer l'égalité : $C_n = \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{\mu}{n} + \frac{v}{\sqrt{n}} Y_k\right)$.

(ii) En déduire : $\mathbb{E}(C_n) = \left(1 + \frac{\mu}{n}\right)^n$ et $\mathbb{V}(C_n) = \left(\left(1 + \frac{\mu}{n}\right)^2 + \frac{v^2}{n}\right)^n - \left(1 + \frac{\mu}{n}\right)^{2n}$.

c) Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{E}(C_n)$ et montrer : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{V}(C_n) = e^{2\mu}(e^{v^2} - 1)$.

Déterminer les paramètres de la loi log-normale ayant pour espérance la première limite et pour variance la seconde.

6. a) Expliciter un couple de réels (a_n, b_n) tel que :

$$\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad \ln \left(1 + \frac{\mu}{n} + \frac{v}{\sqrt{n}} Y_k\right) = a_n + b_n Y_k$$

b) En déduire : $\ln(C_n) = n a_n + b_n \sum_{k=1}^n Y_k$.

7. On note F_n la fonction de répartition de $\frac{1}{\sqrt{n}}(Y_1 + \dots + Y_n)$ et G_n la fonction de répartition de $\ln(C_n)$.

Soit x un réel. On pose $y = \frac{x - \mu + \frac{v^2}{2}}{v}$.

a) Soit ε un réel strictement positif.

(i) Établir l'existence d'un réel η strictement positif tel que :

$$\Phi(y) - \frac{\varepsilon}{2} \leq \Phi(y - \eta) \leq \Phi(y + \eta) \leq \Phi(y) + \frac{\varepsilon}{2}$$

(ii) On admet : $\lim_{n \rightarrow +\infty} n a_n = \mu - \frac{v^2}{2}$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n} b_n = v$, et que b_n est strictement positif à partir d'un certain rang.

Montrer alors qu'il existe un entier naturel n_1 tel que, pour tout $n \geq n_1$:

$$y - \eta \leq \frac{x - n a_n}{\sqrt{n} b_n} \leq y + \eta$$

(iii) Montrer : $G_n(x) = F_n\left(\frac{x - n a_n}{\sqrt{n} b_n}\right)$.

(iv) On admet que, pour tout $z \in \mathbb{R}$: $\lim_{n \rightarrow +\infty} F_n(z) = \Phi(z)$.

Montrer qu'il existe un entier naturel n_2 tel que, pour tout $n \geq n_2$:

$$F_n(y + \eta) \leq \Phi(y + \eta) + \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{et} \quad F_n(y - \eta) \geq \Phi(y - \eta) - \frac{\varepsilon}{2}$$

(v) En déduire que, pour n assez grand, on a :

$$\left| G_n(x) - \Phi\left(\frac{x - \mu + \frac{v^2}{2}}{v}\right) \right| \leq \varepsilon$$

b) **Pour les cubes.** En conclure que la suite de variables aléatoires $(\ln(C_n))_{n \geq 1}$ converge en loi vers une variable aléatoire suivant une loi normale dont on précisera les paramètres.

8. **Pour les cubes.** Démontrer que $(C_n)_{n \geq 1}$ converge en loi vers une variable aléatoire de loi log-normale de paramètres $\left(\mu - \frac{v^2}{2}, v^2\right)$.