DS6 (version B) /139

Problème I (`EML S 2013`) - 47 points

Si $A = \left(a_{i,j}\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, alors pour tout $j \in [\![1, n]\!]$, on note $C_j(A)$ la matrice colonne de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ constituée des coefficients de la colonne numéro j de A. Ainsi : $C_j(A) = (a_{i,j})_{1\leqslant i\leqslant n}$.

Partie I : Un exemple

Soient $U_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$, $V_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $A_0 = U_0 {}^t V_0$.

1. Vérifier que 0 est valeur propre de A_0 et déterminer une base du sous-espace propre associé.

- 1 pt : $A_0 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 \\ 2 & -2 & 4 & -2 \\ 3 & -3 & 6 & -3 \\ 4 & -4 & 8 & -4 \end{pmatrix}$

- 1 pt : A_0 non inversible donc 0 est valeur propre de A_0

- 1 pt : poser le système pour obtenir $E_0(A_0)$

- 1 pt : $E_0(A_0) = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$

- 0 pt : démontrer la liberté

- 1 pt : la famille $\mathcal{F} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ est une base de $E_0(A_0)$ (génératrice + libre)

2. ***a)*** Calculer $A_0 U_0$.

- 1 pt : $A_0 U_0 = 1 \cdot U_0$

b) Montrer que A_0 est diagonalisable dans $\mathscr{M}_4(\mathbb{R})$.

- 2 pts : la somme des dimensions des sous-espaces propres vaut 4 ($\geqslant 4$ et $\leqslant 4$) `OU` **la famille $\mathcal{G} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}\right)$ est une base de vecteurs propres.**

c) Déterminer une matrice diagonale D de $\mathscr{M}_4(\mathbb{R})$ et une matrice inversible P de $\mathscr{M}_4(\mathbb{R})$ telles que $A_0 = PDP^{-1}$.

- 1 pt : $P = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$

- 1 pt : $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Partie II : Trace d'une matrice carrée

Pour toute matrice $A = \big(a_{i,j}\big)_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, on appelle trace de A et on note $\mathrm{tr}(A)$ la somme des coefficients diagonaux de A, c'est-à-dire $\mathrm{tr}(A) = \sum\limits_{i=1}^{n} a_{i,i}$.

3. Montrer que l'application $\mathrm{tr} : \begin{array}{ccc} \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) & \to & \mathbb{R} \\ A & \mapsto & \mathrm{tr}(A) \end{array}$, est linéaire.

- 2 pts

4. Montrer : $\forall (A, B) \in \big(\mathscr{M}_n(\mathbb{R})\big)^2$, $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$.

- 1 pt : formule $(AB)_{i,j} = \sum\limits_{k=1}^{n} a_{i,k}\, b_{k,j}$

- 1 pt : interversion des symboles $\sum$

5. Vérifier, pour tout $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$: $\mathrm{tr}({}^tAA) = \sum\limits_{i=1}^{n} \sum\limits_{j=1}^{n} a_{j,i}^2$.

- 2 pts

Partie III : Une caractérisation des matrices de rang 1

6. Soient $U = (u_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ et $V = (v_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ deux matrices colonnes non nulles de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

a) Justifier : $U\,{}^tV \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.
Déterminer les coefficients de $U\,{}^tV$ à l'aide des coefficients de U et de V.

- 1 pt : $U \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ **et** ${}^tV \in \mathscr{M}_{1,n}(\mathbb{R})$ **donc** $U\,{}^tV \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$

- 1 pt : $U\,{}^tV = \begin{pmatrix} u_1v_1 & u_1v_2 & \dots & u_1v_{n-1} & u_1v_n \\ u_2v_1 & u_2v_2 & \dots & u_2v_{n-1} & u_2v_n \\ \vdots & & & & \\ u_{n-1}v_1 & u_{n-1}v_2 & \dots & u_{n-1}v_{n-1} & u_{n-1}v_n \\ u_nv_1 & u_nv_2 & \dots & u_nv_{n-1} & u_nv_n \end{pmatrix}$

b) Exprimer $\mathrm{tr}(U\,{}^tV)$ à l'aide des coefficients de U et de V.

- 1 pt : $\mathrm{tr}\big(U\,{}^tV\big) = \sum\limits_{i=1}^{n} u_i\, v_i$

c) Quel est le rang de $U\,{}^tV$.

- 1 pt : $\mathrm{rg}\big(U\,{}^tV\big) = \mathrm{rg}\big(v_{j_0}\, U\big)$ **car** V **non nul**

- 1 pt : $\mathrm{rg}\big(U\big) = 1$ **car** U **non nul**

On accorde 1 pt pour $\mathrm{rg}\big(U\big) = 1$ **sans justification**

7. Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice de rang 1.

a) Montrer qu'il existe $j_0 \in [\![1, n]\!]$ tel que, pour tout $j \in [\![1, n]\!]$, il existe $\alpha_j \in \mathbb{R}$ vérifiant :

$$C_j(A) = \alpha_j\, C_{j_0}(A)$$

- 2 pts : 1 pt pour procéder par l'absurde et 1 pt pour $\mathrm{rg}(A) \geqslant \mathrm{rg}\big(C_k(A), C_\ell(A)\big) = 2$

- 1 pt : $\lambda_j\, C_j(A) + \mu_j\, C_{j_0}(A) = 0_{\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})}$

- 2 pts : $C_j(A) = -\dfrac{\mu_j}{\lambda_j}\, C_{j_0}(A)$ **car** $\lambda_j \neq 0$ **par l'absurde.**

b) En déduire qu'il existe deux matrices colonnes non nulles U et V de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ telles que $A = U\,{}^tV$.

- **1 pt :** $U = C_{j_0}(A)$
- **1 pt :** $V = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$

8. Énoncer une caractérisation des matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ de rang 1.

- **2 pts :** $\mathrm{rg}(A) = 1 \Leftrightarrow A$ **sécrit sous la forme** $A = U^tV$ **avec** $(U, V) \in \big(\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})\big)^2$

Partie IV : Une caractérisation des matrices de rang 1 diagonalisables

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice de rang 1. On note U et V deux matrices colonnes non nulles de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ telles que $A = U\,{}^tV$ et on note $a = \mathrm{tr}(A)$.

9. Montrer que 0 est valeur propre de A et déterminer la dimension du sous-espace propre associé.

- **1 pt :** 0 **est valeur propre de** A **car** A **non inversible**
- **2 pts :** $\dim\big(E_0(A)\big) = \dim\big(\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})\big) - \mathrm{rg}(A) = n - 1$ **dont 1 pt pour le théorème du rang**

On n'attribue qu'1 pt sur les 2 en cas de confusion d'objets.

10. Montrer : ${}^tV\,U = (a)$, puis : $A^2 = a\,A$.

- **1 pt :** ${}^tV\,U = \sum\limits_{i=1}^{n} u_i\,v_i = (a)$
- **2 pts : pour le reste dont 1 pt pour l'associativité de $\times$:** $\big({}^tU\,V\big)\ \big({}^tU\,V\big) = {}^tU\ \big(V\,{}^tU\big)\ V$

11. Montrer que si $a = 0$, alors A n'est pas diagonalisable dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

- **1 pt :** $P(X) = X^2$ **est un polynôme annulateur de** A
- **1 pt :** $\mathrm{Sp}(A) \subset \{0\}$ **puis** $\mathrm{Sp}(A) = \{0\}$ **car** 0 **est valeur propre**
- **1 pt :** $\dim\big(E_0(A)\big) = n - 1 < n = \dim\big(\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})\big)$ **donc** A **n'est pas diagonalisable**

12. On suppose $a \neq 0$. Calculer $A\,U$. Déduire des questions précédentes que A est diagonalisable.

- **1 pt :** $A\,U = a \cdot U$
- **1 pt :** $P(X) = X^2 - aX = X\,(X - a)$ **est un polynôme annulateur de** A
- **1 pt :** $\mathrm{Sp}(A) \subset \{0, a\}$ **puis** $\mathrm{Sp}(A) = \{0, a\}$ **car** 0 **est valeur propre et** U **vecteur propre associé à la valeur propre** a
- **1 pt :** $\dim\big(E_0(A)\big) = n - 1 < n = \dim\big(\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})\big)$ **donc** A **n'est pas diagonalisable**
- **1 pt : la famille $\mathcal{G}$ obtenue par concaténation des vecteurs d'une base de $E_0(A)$ et de U est libre**
- **1 pt : la famille $\mathcal{G}$ est une base de vecteurs propres de A**

13. Énoncer une condition nécessaire et suffisante pour qu'une matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ de rang 1 soit diagonalisable.

- **2 pts : si A une matrice de rang 1 :** $\mathrm{tr}(A) \neq 0 \ \Leftrightarrow\ A$ **n'est pas diagonalisable**

Problème II (ESSEC I 2012) /92

Ce problème comporte deux parties relativement indépendantes.
Dans la première partie on étudie les lois log-normales. On s'intéresse dans la partie II à une modélisation du cours d'une action appelée modèle binomial ou de Cox-Ross-Rubinstein et à son comportement asymptotique.

Notations et définitions

- Les variables aléatoires qui interviennent dans ce problème sont toutes définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$.
- On note Φ la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite.
- On note respectivement $\mathbb{E}(X)$ et $\mathbb{V}(X)$ l'espérance et la variance d'une variable aléatoire X, lorsque celles-ci existent.
- Soit m un réel et σ un réel strictement positif. On dit qu'une variable aléatoire X suit la loi log-normale de paramètres (m, σ^2) si X est à valeurs strictement positives et si $\ln(X)$ suit la loi normale de paramètres (m, σ^2). On écrit alors $X \hookrightarrow \mathcal{LN}(m, \sigma^2)$.

Partie I - Quelques propriétés des lois log-normales /36

On note dans cette partie m un réel et σ un réel strictement positif.
Soit X une variable aléatoire réelle suivant la loi log-normale de paramètres (m, σ^2).
On pourra dans la suite utiliser la variable aléatoire $Y = \ln(X)$.

1. Soit a et b deux réels, a étant différent de 0. On rappelle que si U est une variable aléatoire qui suit une loi normale de paramètres (m, σ^2), alors $a\,U + b$ suit aussi une loi normale.
Quels en sont les paramètres ?

- **1 pt :** $\mathbb{E}(aU + b) = am + b$
- **1 pt :** $\mathbb{V}(aU + b) = a^2\,\sigma^2$

2. *Cas où $m = 0$.*
On suppose dans cette question 2 que $X \hookrightarrow \mathcal{LN}(0, \sigma^2)$.

a) *Densité.*
Exprimer la fonction de répartition F de X en fonction de Φ .
En déduire que X est une variable aléatoire à densité et que la fonction définie par :

$$x \mapsto \begin{cases} \dfrac{1}{x\,\sigma\,\sqrt{2\pi}}\ \exp\left(-\dfrac{\big(\ln(x)\big)^2}{2\sigma^2}\right) & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leqslant 0 \end{cases}$$

est une densité de probabilité de X.

- **1 pt : si** $x \in\,]-\infty, 0]$, $F(x) = 0$
- **2 pts :** $X \hookrightarrow \mathcal{LN}(0, \sigma^2) \Rightarrow \dfrac{Y}{\sigma} \hookrightarrow \mathcal{N}(0, 1)$ **(question *1.*)**
- **2 pts : si** $x \in\,]0, +\infty[$, $F(x) = \Phi\left(\dfrac{\ln(x)}{\sigma}\right)$
- **3 pts :** X **v.a.r. à densité (2 pts pour** F **continue sur** $\mathbb{R}$**, 1 pt** F **de classe** $\mathcal{C}^1$ **sur** $\mathbb{R}$ **sauf éventuellement en** 0**)**
- **1 pt : si** $x \in\,]-\infty, 0[$, $f(x) = 0$

- **2 pts : si** $x \in \,]0,+\infty[$**,** $f(x) = \dfrac{1}{x\,\sigma\,\sqrt{2\pi}} \ \exp\left(-\dfrac{\big(\ln(x)\big)^2}{2\sigma^2}\right)$
- **1 pt : choix** $f(0) = 0$

b) *Espérance.*

(i) Établir l'existence de $\mathbb{E}(X)$ et l'égalité : $\mathbb{E}(X) = \dfrac{1}{\sigma\,\sqrt{2\pi}} \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{y^2}{\sigma^2} - 2y\right)\right)\, dy$.

- **1 pt : théorème de transfert (**$X = \mathrm{e}^Y$ **admet une espérance ssi** $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^y \varphi_{0,\sigma^2}(y)\, dy$ **CVA)**
- **3 pts : critère de négligeabilité d'intégrales de fonctions continues positives (**$\mathrm{e}^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}+y} = \underset{y\to+\infty}{o}\left(\dfrac{1}{y^2}\right)$**) implique** $\displaystyle\int_{1}^{+\infty} \mathrm{e}^y \varphi_{0,\sigma^2}(y)\, dy$ **converge**
- **1 pt :** $\displaystyle\int_{-1}^{1} \mathrm{e}^y \varphi_{0,\sigma^2}(y)\, dy$ **bien définie car** $y \mapsto \mathrm{e}^y \varphi_{0,\sigma^2}(y)$ **continue sur** $[-1,1]$
- **1 pt :** $\mathbb{E}(Y) = \dfrac{1}{\sigma\,\sqrt{2\,\pi}} \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\left(\frac{y^2}{\sigma^2}-2y\right)}\, dy$

(ii) En utilisant le changement de variable $t = \dfrac{y}{\sigma} - \sigma$, en déduire $\mathbb{E}(X)$ en fonction de σ.

- **3 pts :** $\mathbb{E}(X) = \mathrm{e}^{\frac{\sigma^2}{2}}$

c) *Variance.*

(i) Soit α un réel non nul. Montrer que X^α suit une loi log-normale dont on précisera les paramètres.

- **1 pt :** $Z(\Omega) = X^\alpha(\Omega) \subset \,]0,+\infty[$
- **1 pt :** $\ln(Z) \hookrightarrow \mathcal{N}\left(0, \alpha^2\,\sigma^2\right)$ **d'après *1.***

(ii) En déduire que X admet une variance et : $\mathbb{V}(X) = \mathrm{e}^{\sigma^2}\left(\mathrm{e}^{\sigma^2} - 1\right)$.

- **1 pt :** $X^2 \hookrightarrow \mathcal{LN}(0, 2^2\,\sigma^2)$ **(d'après qst précédente)**
- **1 pt : d'après la question *2.b)(i)*,** X^2 **admet une espérance, donc** X **admet une variance**
- **1 pt :** $\mathbb{E}(X^2) = \mathrm{e}^{2\,\sigma^2}$ **(d'après *2.b)(ii)*)**
- **1 pt :** $\mathbb{V}(X) = \mathrm{e}^{\sigma^2}\left(\mathrm{e}^{\sigma^2} - 1\right)$ **(formule de KH)**

3. On reprend le cas général : $X \hookrightarrow \mathcal{LN}(m, \sigma^2)$.

a) Soit μ un réel strictement positif.
Montrer que μX suit une loi log-normale de paramètres $\big(m + \ln(\mu), \sigma^2\big)$.

- **1 pt :** $S(\Omega) = \mu\, X(\Omega) \subset \,]0,+\infty[$
- **1 pt :** $\ln(S) = Y + \ln(\mu) \hookrightarrow \mathcal{N}\left(m + \ln(\mu), \sigma^2\right)$ **(qst *1.*)**

b) Justifier l'existence de $\mathbb{E}(X)$, de $\mathbb{V}(X)$, et établir :

$$\mathbb{E}(X) = \mathrm{e}^{m+\frac{\sigma^2}{2}} \qquad \text{et} \qquad \mathbb{V}(X) = \mathrm{e}^{2m+\sigma^2}\left(\mathrm{e}^{\sigma^2} - 1\right)$$

- **2 pts :** $U = \mathbf{e}^{-m}\, X \hookrightarrow \mathcal{LN}(0, \sigma^2)$
- **1 pt :** $\mathbb{E}(U) = \mathbf{e}^{\frac{\sigma^2}{2}}$ **et** $\mathbb{V}(U) = \mathbf{e}^{\sigma^2}\left(\mathbf{e}^{\sigma^2} - 1\right)$ **(d'après *2.b)* et *2.c)(ii)*)**
- **1 pt :** $\mathbb{E}(X) = \mathbf{e}^{m+\frac{\sigma^2}{2}}$
- **1 pt :** $\mathbb{V}(X) = \mathbf{e}^{2m+\sigma^2}\left(\mathbf{e}^{\sigma^2} - 1\right)$

Partie II - Le modèle binomial de Cox-Ross-Rubinstein /56

Soit n un entier naturel non nul.
On souhaite modéliser l'évolution du cours d'une action entre les dates 0 et t fixé, strictement positif.
On suppose qu'initialement ce cours est $S_{0,n} = 1$ et si l'on note $S_{k,n}$ la valeur aléatoire de ce cours à la date $\dfrac{kt}{n}$, $k \in \{1, ..., n\}$, on a la relation :

$$S_{k,n} \;=\; S_{k-1,n} \times \left(1 + \frac{\mu}{n} + \frac{v}{\sqrt{n}}\, Y_k\right)$$

où :

- μ est une constante réelle strictement positive liée au rendement moyen de l'action sur une durée égale à t ;
- v est une constante réelle strictement positive appelée volatilité de l'action sur la durée t ;
- $(Y_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ est une suite de variables aléatoires indépendantes suivant toutes la loi uniforme sur $\{-1, 1\}$ (autrement dit : $\mathbb{P}([Y_k = 1]) = \mathbb{P}([Y_k = -1]) = \dfrac{1}{2}$).

  On suppose que n est assez grand pour que $1 + \dfrac{\mu}{n} - \dfrac{v}{\sqrt{n}} > 0$.

On admet que $S_{0,n}, ..., S_{n,n}$ sont des variables aléatoires discrètes.
On note C_n la variable aléatoire $S_{n,n}$, qui modélise le cours de l'action à l'instant t.

4. Simulation de la variable aléatoire C_n.

a) Que renvoie la fonction **Scilab** suivante ?

```
function Y = mystere()
  u = rand()
  if u < 1/2 then
    Y = -1
  else
    Y = 1
  end
endfunction
```

- **2 pts**

b) Dans la déclaration de fonction qui suit, remplacer les « $\cdots$ » par des expressions en **Scilab** pour que la fonction ainsi déclarée simule la variable aléatoire C_n.

```
function C = SimuC(n, mu, v)
  C = 1
  for k = ...
    C = C ⋆ ...
  end
endfunction
```

- **3 pts : 1 pt pour** `k = 1:n`, **2 pts pour** `C = C ⋆ (1 + mu / n + (v / sqrt(n)) ⋆ mystere())`

5. *a)* Calculer l'espérance et la variance commune aux Y_k.

- **1 pt :** $\mathbb{E}(Y_k) = 0$
- **1 pt :** $\mathbb{V}(Y_k) = 1$

b) (i) Montrer l'égalité : $C_n = \prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{\mu}{n} + \frac{v}{\sqrt{n}}\, Y_k\right)$.

- **3 pts : récurrence (1 pt pour initialisation, 2 pts hérédité)**

(ii) En déduire : $\mathbb{E}(C_n) = \left(1+\frac{\mu}{n}\right)^n$ et $\mathbb{V}(C_n) = \left(\left(1+\frac{\mu}{n}\right)^2 + \frac{v^2}{n}\right)^n - \left(1+\frac{\mu}{n}\right)^{2n}$.

- **1 pt :** $1 + \frac{\mu}{n} + \frac{v}{\sqrt{n}}\, Y_1$, $\ldots$, $1 + \frac{\mu}{n} + \frac{v}{\sqrt{n}}\, Y_n$ **sont indépendantes par lemme des coalitions**
- **2 pts :** $\mathbb{E}\left(1 + \frac{\mu}{n} + \frac{v}{\sqrt{n}}\, Y_k\right) = 1 + \frac{\mu}{n}$
- **1 pt :** $\mathbb{E}(C_n) \;=\; \left(1+\frac{\mu}{n}\right)^n$
- **2 pts :** $\mathbb{E}(C_n^2) \;=\; \left(\left(1+\frac{\mu}{n}\right)^2 + \frac{v^2}{n}\right)^n$
- **1 pt :** $\mathbb{V}(C_n) \;=\; \left(\left(1+\frac{\mu}{n}\right)^2 + \frac{v^2}{n}\right)^n - \left(1+\frac{\mu}{n}\right)^{2n}$ **(formule de KH)**

c) Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{E}(C_n)$ et montrer : $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{V}(C_n) = \mathrm{e}^{2\mu}\left(\mathrm{e}^{v^2} - 1\right)$.
Déterminer les paramètres de la loi log-normale ayant pour espérance la première limite et pour variance la seconde.

- **2 pts :** $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{E}(C_n) = \mathrm{e}^{\mu}$ **(1 pt pour l'équivalent (car** $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\mu}{n} = 0$**), 1 pt pour exp continue en** μ**)**
- **1 pt :** $\left(1+\frac{\mu}{n}\right)^{2n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \mathrm{e}^{2\mu}$
- **2 pts :** $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\left(1+\frac{\mu}{n}\right)^2 + \frac{v^2}{n}\right)^n = \mathrm{e}^{2\mu+v^2}$
- **2 pts : on choisit** $X \hookrightarrow \mathcal{LN}\left(\frac{2\mu - v^2}{2}, v^2\right)$

6. a) Expliciter un couple de réels (a_n, b_n) tel que :

$$\forall k \in [\![1, n]\!], \quad \ln\left(1 + \frac{\mu}{n} + \frac{v}{\sqrt{n}}\, Y_k\right) = a_n + b_n\, Y_k$$

- 1 pt : $a_n - b_n \ = \ \ln\left(1 + \dfrac{\mu}{n} - \dfrac{v}{\sqrt{n}}\right)$

- 1 pt : $a_n + b_n \ = \ \ln\left(1 + \dfrac{\mu}{n} + \dfrac{v}{\sqrt{n}}\right)$

- 2 pts : $a_n = \dfrac{1}{2}\left(\ln\left(1 + \dfrac{\mu}{n} + \dfrac{v}{\sqrt{n}}\right) + \ln\left(1 + \dfrac{\mu}{n} - \dfrac{v}{\sqrt{n}}\right)\right)$ **et** $b_n = \dfrac{1}{2}\left(\ln\left(1 + \dfrac{\mu}{n} + \dfrac{v}{\sqrt{n}}\right) - \ln\left(1 + \dfrac{\mu}{n} - \dfrac{v}{\sqrt{n}}\right)\right)$

b) En déduire : $\ln(C_n) = n\, a_n + b_n \sum\limits_{k=1}^{n} Y_k$.

- 1 pt : $C_n(\Omega) \subset \,]0, +\infty[$ **(d'après *5.b)(i)*)**

- 1 pt : $\ln(C_n) \ = \ n\, a_n + b_n \sum\limits_{k=1}^{n} Y_k$ **(d'après *6.a)*)**

7. On note F_n la fonction de répartition de $\dfrac{1}{\sqrt{n}}\,(Y_1 + \cdots + Y_n)$ et G_n la fonction de répartition de $\ln(C_n)$.

Soit x un réel. On pose $y = \dfrac{x - \mu + \frac{v^2}{2}}{v}$.

a) Soit ε un réel strictement positif.

(i) Établir l'existence d'un réel η strictement positif tel que :

$$\Phi(y) - \frac{\varepsilon}{2} \ \leqslant \ \Phi(y - \eta) \ \leqslant \ \Phi(y + \eta) \ \leqslant \ \Phi(y) + \frac{\varepsilon}{2}$$

- 1 pt : Φ **continue en** y **donc il existe** $\eta > 0$ **tel que, pour tout** $z \in \mathbb{R}$ **:** $|z - y| \leqslant \eta \ \Rightarrow \ |\Phi(z) - \Phi(y)| \leqslant \dfrac{\varepsilon}{2}$

- 1 pt : application $z = y + \eta$ **et** $z = y - \eta$

- 1 pt : Φ **strictement croissante sur** $\mathbb{R}$

(ii) On admet : $\lim\limits_{n \to +\infty} n\, a_n = \mu - \dfrac{v^2}{2}$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} \sqrt{n}\, b_n = v$, et que b_n est strictement positif à partir d'un certain rang.
Montrer alors qu'il existe un entier naturel n_1 tel que, pour tout $n \geqslant n_1$:

$$y - \eta \ \leqslant \ \frac{x - n a_n}{\sqrt{n}\, b_n} \ \leqslant \ y + \eta$$

- 1 pt : $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{x - n\, a_n}{\sqrt{n}\, b_n} \ = \ y$

- 2 pts : en choisissant $\varepsilon_0 = \eta > 0$**, il existe bien** $n_1 \in \mathbb{N}$ **tel que, pour tout** $n \geqslant n_1$ **:** $y - \eta \ \leqslant \ \dfrac{x - n\, a_n}{\sqrt{n}\, b_n} \ \leqslant \ y + \eta$

(iii) Montrer : $G_n(x) = F_n\left(\dfrac{x - n a_n}{\sqrt{n}\, b_n}\right)$.

- 3 pts : $G_n(x) \ = \ F_n\left(\dfrac{x - n\, a_n}{\sqrt{n}\, b_n}\right)$ **(1 pt pour *6.b)*, 1 pt pour** $\sqrt{n}\, b_n > 0$**, 1 pt pour** F_n **fdr de** $\dfrac{1}{\sqrt{n}} \sum\limits_{k=1}^{n} Y_k$**)**

(iv) On admet que, pour tout $z \in \mathbb{R}$: $\lim\limits_{n\to+\infty} F_n(z) = \Phi(z)$.
Montrer qu'il existe un entier naturel n_2 tel que, pour tout $n \geqslant n_2$:

$$F_n(y+\eta) \leqslant \Phi(y+\eta) + \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{et} \quad F_n(y-\eta) \geqslant \Phi(y-\eta) - \frac{\varepsilon}{2}$$

- **1 pt : pour tout $\varepsilon_1 > 0$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geqslant n_0$: $\Phi(z) - \varepsilon_1 \leqslant F_n(z) \leqslant \Phi(z) + \varepsilon_1$**
- **1 pt : application à $\varepsilon_1 = \dfrac{\varepsilon}{2}$ et $z = y+\eta$ et $z = y-\eta$**

(v) En déduire que, pour n assez grand, on a :

$$\left| G_n(x) - \Phi\left(\frac{x-\mu+\frac{v^2}{2}}{v}\right) \right| \leqslant \varepsilon$$

- **1 pt : on pose $N = \max(n_1, n_2)$**
- **1 pt : $\left| G_n(x) - \Phi\left(\dfrac{x-\mu+\frac{v^2}{2}}{v}\right) \right| = \left| F_n\left(\dfrac{x-n\,a_n}{\sqrt{n}\,b_n}\right) - \Phi(y) \right|$ (d'après *7.a)(iii)*)**
- **1 pt : $y - \eta \leqslant \dfrac{x-n\,a_n}{\sqrt{n}\,b_n} \leqslant y+\eta$ (d'après *7.a)(ii)* car $n \geqslant N \geqslant n_1$)**
- **2 pts : $\Phi(y) - \varepsilon \leqslant F_n\left(\dfrac{x-n\,a_n}{\sqrt{n}\,b_n}\right) \leqslant \Phi(y)+\varepsilon$ (1 pt pour *7.a)(iv)*, 1 pt pour *7.a)(i)*)**

b) **Pour les cubes**. En conclure que la suite de variables aléatoires $\big(\ln(C_n)\big)_{n\geqslant 1}$ converge en loi vers une variable aléatoire suivant une loi normale dont on précisera les paramètres.

- **1 pt : $\lim\limits_{n\to+\infty} G_n(x) = \Phi\left(\dfrac{x-\mu+\frac{v^2}{2}}{v}\right)$**
- **2 pts : $\Phi\left(\dfrac{x-\mu+\frac{v^2}{2}}{v}\right) = \Phi_{\mu-\frac{v^2}{2},v^2}(x)$**
- **1 pt : $\big(\ln(C_n)\big)_{n\geqslant 1}$ converge en loi vers la v.a.r. T de loi $\mathcal{N}\left(\mu - \dfrac{v^2}{2}, v^2\right)$**

8. **Pour les cubes**. Démontrer que $(C_n)_{n\geqslant 1}$ converge en loi vers une variable aléatoire de loi log-normale de paramètres $\left(\mu - \dfrac{v^2}{2}, v^2\right)$.

- **3 pts : si $D \hookrightarrow \mathcal{LN}\left(\mu - \dfrac{v^2}{2}, v^2\right)$, alors $F_D : x \mapsto \begin{cases} 0 & \textbf{si } x \in \,]-\infty, 0] \\ \Phi\left(\dfrac{\ln(x)-\mu+\frac{v^2}{2}}{v^2}\right) & \textbf{si } x \in \,]0,+\infty[\end{cases}$**
- **2 pts : $F_{C_n} : x \mapsto \begin{cases} 0 & \textbf{si } x \in \,]-\infty, 0] \\ G_n(\ln(x)) & \textbf{si } x \in \,]0,+\infty[\end{cases}$**
- **1 pt : $\forall x \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{n\to+\infty} F_{C_n}(x) = F_D(x)$**