DS7 (ESSEC-II 2007)

Partie I : Modélisation poissonienne

On considère une société d'assurance comptant N clients et garantissant à chacun d'entre eux un capital d'un montant de s euros en cas de décès. On suppose que le nombre de décès annuel suit une loi de Poisson de paramètre entier k. Le revenu annuel de la société fourni par la perception des primes d'assurance des N clients est au total de $ks\,(1+\lambda)$ euros, où λ est un réel strictement positif représentant le taux de sécurité que la société s'accorde afin de faire face à un nombre de sinistres plus élevé que la moyenne. La société dispose également d'un fond de réserve R dans lequel elle peut puiser exceptionnellement. Un bilan financier de la société est effectué tous les 5 ans.
On note Y le nombre de décès enregistrés sur une période de 5 ans.

A. Résultats généraux

1. Donner en fonction de s et de Y la somme totale due par la société aux clients au moment du bilan financier au bout de 5 ans.

- **1 pt : la somme due au bout de 5 ans est Ys (nombre de décès $\times$ somme à débourser en cas de décès)**

2. Dans quelles circonstances peut-on considérer que Y suit une loi de Poisson de paramètre $5k$?
On supposera dorénavant que Y suit une loi de Poisson de paramètre $5k$.

- **1 pt : introduction des v.a.r. X_i (pour $i \in [\![1,5]\!]$) telles que $X_i \hookrightarrow \mathcal{P}(k)$.**
- **1 pt : indépendance des v.a.r. X_i**

3. Rappeler sans démonstration $\mathbb{E}(Y)$ et $\mathbb{V}(Y)$.

- **1 pt : $\mathbb{E}(Y) = 5k$**
- **1 pt : $\mathbb{V}(Y) = 5k$**

4. Justifier l'existence d'un nombre réel strictement positif unique t_0 tel que :

$$\int_{-\infty}^{t_0} \frac{\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)}{\sqrt{2\pi}}\, dx = 0,99$$

- **1 pt : introduction de Φ fonction de répartition de $Z \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$**
- **1 pt : Φ réalise une bijection de $]-\infty,+\infty[$ sur $]0,1[$ et conclusion**
- **1 pt : $\Phi(0) = \frac{1}{2} < 0.99 = \Phi(t_0)$**
- **1 pt : $0 < t_0$ par application de Φ^{-1}**

5. Montrer le résultat limite suivant :

$$\mathbb{P}\left(\left[Y - 5k > t_0\sqrt{5k}\right]\right) \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} 0,01$$

(on pourra utiliser, en justifiant soigneusement, le théorème central limite)
Pour la fin de cette partie, on supposera k assez grand pour utiliser l'approximation :

$$\mathbb{P}\left(\left[Y - 5k > t_0\sqrt{5k}\right]\right) = 0,01 \qquad \text{(A)}$$

- **1 pt :** $\left[Y - 5k > t_0 \sqrt{5k}\right] = \left[\dfrac{Y - 5k}{t_0 \sqrt{5k}} > t_0\right] = [Y^* > t_0]$
- **1 pt : introduction** $S_k = \sum\limits_{i=1}^{k} T_i$ **où les** $T_i \hookrightarrow \mathcal{P}(5)$ **et sont indépendantes**
- **1 pt :** Y **et** S_k **sont de même loi donc** $\mathbb{P}([Y^* > t_0]) = \mathbb{P}([S_k^* > t_0])$
- **1 pt :** $\mathbb{P}([S_k^* > t_0]) \to \mathbb{P}([Z > t_0])$ **où** $Z \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$

B. Exemples d'application

Dans cette partie il s'agit d'exploiter l'approximation (A).

6. Expliquer pourquoi la société d'assurance peut faire face à toutes les indemnisations requises sur l'exercice de 5 ans si et seulement si :

$$5sk\,(1+\lambda) + R \ \geqslant\ sY$$

- **1 pt :** $sk(1+\lambda)$ **est la somme touchée chaque année par la société (**k **décès envisagés)**
- **0 pt :** $5sk(1+\lambda)$ **est la somme touchée au bout de** 5 **ans par la société**
- **1 pt :** $5sk(1+\lambda) + R$ **est la somme touchée au bout de** 5 **ans par la société**
- **1 pt : somme que doit verser la société au bout de** 5 **ans**

7. Quelle réserve R faut-il prévoir pour que la probabilité que la société puisse faire face à toutes les indemnisations requises sur l'exercice de 5 ans soit voisine de 99% ? On exprimera R en fonction de s, k, λ et t_0.

- **1 pt : il faut** $R \ \geqslant\ sY - 5sk\,(1+\lambda)$
- **1 pt :** ***i.e.*** $\dfrac{R + 5sk\lambda}{s} \ \geqslant\ Y - 5k$
- **1 pt :** $\mathbb{P}\Big(\left[Y - 5k \leqslant \dfrac{R+5sk\lambda}{s}\right]\Big) = 1 - \mathbb{P}\Big(\left[Y - 5k > \dfrac{R+5sk\lambda}{s}\right]\Big) = 0.99$ **si** $\dfrac{R+5sk\lambda}{s} = t_0 \sqrt{5k}$
  i.e. $R = s(t_0\sqrt{5k} - 5k\lambda)$

8. On notera dorénavant $\mu = \dfrac{k}{N}$ le taux de mortalité dans l'ensemble des clients. Combien de clients N la société devrait-elle compter pour qu'elle puisse se dispenser d'un fond de réserve pour un exercice de 5 ans tout en maintenant à plus de 99% la probabilité de pouvoir faire face au paiement de toutes les indemnisations requises ? On exprimera N en fonction de λ, t_0 et μ.

- **1 pt : la société peut se dispenser d'un fond de réserve ssi elle peut payer tous ces clients avec une réserve** $\leqslant 0$
- **1 pt :** $R \leqslant 0 \ \Rightarrow\ k \geqslant \dfrac{1}{5}\left(\dfrac{t_0}{\lambda}\right)^2$
- **1 pt :** $N = \dfrac{k}{\mu} \geqslant \dfrac{1}{5\mu}\left(\dfrac{t_0}{\lambda}\right)^2$
- **1 pt :** $N = \left\lceil \dfrac{1}{5\mu}\left(\dfrac{t_0}{\lambda}\right)^2 \right\rceil$

Partie II : Médianes

Soit X une variable aléatoire réelle. On définit l'ensemble :

$$\mathcal{M}(X) = \{m \in \mathbb{R} \mid \mathbb{P}([X < m]) \leqslant \frac{1}{2} \leqslant \mathbb{P}([X \leqslant m])\}$$

Un élément de $\mathcal{M}(X)$ est appelé **médiane** de X.

9. Soit X une variable aléatoire réelle, rappeler la définition de la fonction de répartition F associée à X.

- **1 pt :** $F_X : x \mapsto \mathbb{P}\big([X \leqslant x]\big)$

10. Soit X une variable aléatoire de loi de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{2}$, calculer $\mathbb{P}([X < m])$ et $\mathbb{P}([X \leqslant m])$ dans les cas suivants : $m < 0$, $m = 0$, $m \in \,]0, 1[$, $m = 1$ et $m > 1$. En déduire $\mathcal{M}(X)$ dans ce cas.

- **2 pts :**
  × **si** $m < 0$ **alors** $\mathbb{P}\big([X < m]\big) = 0$ **et** $\mathbb{P}\big([X \leqslant m]\big) = 0$
  × **si** $m = 0$ **alors** $\mathbb{P}\big([X < m]\big) = 0$ **et** $\mathbb{P}\big([X \leqslant m]\big) = \frac{1}{2}$
  × **si** $m \in \,]0, 1[$ **alors** $\mathbb{P}\big([X < m]\big) = \frac{1}{2}$ **et** $\mathbb{P}\big([X \leqslant m]\big) = \frac{1}{2}$
  × **si** $m = 1$ **alors** $\mathbb{P}\big([X < m]\big) = \frac{1}{2}$ **et** $\mathbb{P}\big([X \leqslant m]\big) = 1$
  × **si** $m > 1$ **alors** $\mathbb{P}\big([X < m]\big) = 1$ **et** $\mathbb{P}\big([X \leqslant m]\big) = 1$
- **1 pt :** $\mathcal{M}(X) = [0, 1]$

11. Soit X une variable aléatoire de loi exponentielle de paramètre $\alpha > 0$ de fonction de répartition notée F_X. Justifier :

$$m \in \mathcal{M}(X) \;\Leftrightarrow\; m \geqslant 0 \text{ et } F_X(m) = \frac{1}{2}$$

puis déterminer $\mathcal{M}(X)$ dans ce cas.

- **1 pt :** $F_X(m) = \mathbb{P}\big([X < m]\big) = \mathbb{P}\big([X \leqslant m]\big)$ **car** X **à densité**
- **1 pt :** $m \in \mathcal{M}(X) \;\Leftrightarrow\; m \geqslant 0$ **et** $F_X(m) = \dfrac{1}{2}$
- **1 pt :** $F_X(m) = \frac{1}{2} \;\Leftrightarrow\; m = \dfrac{\ln(2)}{\alpha}$

On revient au cadre général où X est une variable aléatoire réelle.

12. Soient $a \in \mathcal{M}(X)$ et $b \in \mathcal{M}(X)$ avec $a \leqslant b$. Montrer que si $c \in [a, b]$, on a $c \in \mathcal{M}(X)$.
On a ainsi démontré que $\mathcal{M}(X)$ est un intervalle.

- **1 pt :** $[X < c] \subset [X < b]$
- **1 pt :** $\mathbb{P}\big([X < c]\big) \leqslant \mathbb{P}\big([X < b]\big) \leqslant \frac{1}{2}$
- **1 pt : de même** $[X < a] \subset [X < c]$ **donc** $\frac{1}{2} \leqslant \mathbb{P}\big([X < a]\big) \leqslant \mathbb{P}\big([X < c]\big)$

13. Supposons que X possède une densité f continue sur $\mathbb{R}$ telle que $f(x) > 0$ pour tout x réel. Montrer en utilisant avec soin le théorème de la bijection que dans ce cas $\mathcal{M}(X)$ est réduit à un réel ; puis déterminer $\mathcal{M}(X)$ dans le cas particulier où X suit une loi normale centrée réduite.

- **1 pt :** f **continue sur** $\mathbb{R} \Rightarrow F$ **est de classe** C^1 **sur** $\mathbb{R}$
- **1 pt : pour tout** $x \in \mathbb{R}$, $F_X'(x) = f(x) > 0$ **et donc** F_X **est strictement croissante sur** $\mathbb{R}$
- **1 pt : comme de plus** F **continue,** F **réalise une bijection de** $]-\infty, +\infty[$ **sur** $F(]-\infty, +\infty[) = \,]\lim\limits_{x \to -\infty} F(x), \lim\limits_{x \to +\infty} F(x)[\,=\,]0, 1[$
- **1 pt :** $m \in \mathcal{M}(X) \Rightarrow F(m) = \frac{1}{2} \Rightarrow m = F^{-1}(\frac{1}{2})$
- **1 pt :** $m = \Phi^{-1}(\frac{1}{2}) = 0$

14. En supposant que X admette une espérance, est-il exact que $\mathbb{E}(X) \in \mathcal{M}(X)$?

- 1 pt : si $X \hookrightarrow \mathcal{E}(\alpha)$ alors $\mathcal{M}(X) = \{\frac{\ln(2)}{\alpha}\}$ d'après *11*

- 1 pt : $\mathbb{E}(X) = \frac{1}{\alpha} \neq \frac{\ln(2)}{\alpha}$

Partie III : Médiane d'une variable poissonienne

A. Préliminaires d'analyse

Il s'agit dans ces préliminaires d'étudier la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ définie, par : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n \ = \ \exp(-n) \ \dfrac{n^n}{n!}$.

15. Montrer, pour tout $x \in [0,1]$: $\ln(1+x) \ \leqslant \ x - \dfrac{x^2}{4}$.

- 2 pts : étude de $g : x \mapsto \ln(1+x) - x + \frac{x^2}{4}$

16. Montrer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \ = \ \exp\left(n \ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right) - 1\right)$.

- 2 pts : $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \ = \ \dfrac{\mathbf{e}^{-(n+1)}\,(n+1)^{n+1}}{(n+1)!} \ \dfrac{n!}{\mathbf{e}^{-n}\,n^n} \ = \ \dfrac{1}{\mathbf{e}} \ \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$.

- 1 pt : $\exp\left(n \ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right) - 1\right) = \dfrac{1}{\mathbf{e}} \ \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$

17. Déduire des deux questions précédentes la nature de la série de terme général $\ln\big(u_n\big) - \ln\big(u_{n+1}\big)$.

- 1 pt : $\ln(u_n) - \ln(u_{n+1}) = 1 - n\ \left(1+\dfrac{1}{n}\right) = 1 - \dfrac{1}{\frac{1}{n}}\ \left(1+\dfrac{1}{n}\right)$

- 2 pts : $1 - \dfrac{1}{\frac{1}{n}}\ \left(1+\dfrac{1}{n}\right) \geqslant \dfrac{1}{4n} \geqslant 0$ **(dont 1 pt pour : $\frac{1}{n} \in [0,1]$)**

- 2 pts : critère de comparaison des SATP (écrit correctement)

18. Conclure sur la limite de la suite $\Big(\ln\big(u_n\big)\Big)_{n\geqslant 1}$ puis sur la limite de la suite $\big(u_n\big)_{n\geqslant 1}$.

- 1 pt : $\left(\sum\limits_{k=1}^{n} \ln\big(u_k\big) - \ln\big(u_{k+1}\big)\right)$ **est croissante non majorée donc tend vers $+\infty$**

- 1 pt : $\sum\limits_{k=1}^{N} (\ln(u_k) - \ln(u_{k+1})) = \ln(u_1) - \ln(u_{N+1}) \to +\infty$

- 1 pt : donc $\ln(u_{N+1}) \to -\infty$ et $u_N = \exp(\ln(u_N)) \to 0$

B. Probabilités

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note P_n la fonction définie, pour tout réel λ par :

$$P_n(\lambda) \ = \ \exp(-\lambda) \sum_{k=0}^{n} \frac{\lambda^k}{k!} \ = \ \exp(-\lambda)\left(1 + \frac{\lambda^1}{1!} + \frac{\lambda^2}{2!} + \cdots + \frac{\lambda^n}{n!}\right)$$

19. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, montrer que P_n est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ et que pour tout réel λ :

$$P_n''(\lambda) \ = \ \exp(-\lambda) \ \frac{\lambda^{n-1}}{n!} \ (\lambda - n)$$

où P_n'' est la dérivée seconde de P_n.

- 1 pt : P_n est de classe $\mathcal{C}^2$ car c'est une fonction polynomiale

- 1 pt : $P_n'(\lambda) = -\mathrm{e}^{-\lambda}\ \dfrac{\lambda^n}{n!}$

- 1 pt : $P_n''(\lambda) = -\mathrm{e}^{-\lambda}\ \dfrac{\lambda^{n-1}}{n!}\ (\lambda - n)$

20. Vérifier, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$P_n(n-1) + P_n'(n-1) = P_{n-1}(n-1)$$

où P_n' est le polynôme dérivé de P_n.

- 2 pts : calcul (tout ou rien)

21. Soit $Q : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$.

a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$Q(n) \ = \ Q(n-1) + Q'(n-1) + \int_{n-1}^{n} (n-t)Q''(t)\ dt \qquad \text{(E)}$$

- 2 pts : IPP écrite correctement (dont caractère C^1 de u et v)

- 1 pt : calcul pour conclure

b) En appliquant (E) à $Q = P_n$, démontrer que la suite $\big(P_n(n)\big)_{n \geqslant 1}$ est décroissante.

- 1 pt : $P_n(n-1) + P_n'(n-1) = P_{n-1}(n-1)$ d'après la question précédente

- 1 pt : donc $P_n(n) - P_{n-1}(n-1) = \displaystyle\int_{n-1}^{n} (n-t)P_n''(t)\ dt$

- 1 pt : $(n-t)P_n''(t) = (n-t)\mathrm{e}^{-t}\ \dfrac{t^{n-1}}{n!}\ (t-n) \leqslant 0$

- 1 pt : croissance de l'intégrale avec les bornes dans l'ordre croissant

c) En appliquant (E) à $Q = P_{n-1}$, démontrer que la suite $\big(P_{n-1}(n)\big)_{n \geqslant 1}$ est croissante.

- 0 pt : $P_{n-1}(n) = P_{n-1}(n-1) + P_{n-1}'(n-1) + \displaystyle\int_{n-1}^{n} (n-t)P_{n-1}''(t)\ dt$

- 1 pt : $P_{n-1}(n-1) = \mathrm{e}^{-(n-1)} \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \dfrac{(n-1)^k}{k!} = P_{n-2}(n-1) + \mathrm{e}^{-(n-1)}\ \dfrac{(n-1)^{n-1}}{(n-1)!}$

- 1 pt : $\mathrm{e}^{-(n-1)}\ \dfrac{(n-1)^{n-1}}{(n-1)!} = -P_{n-1}'(n-1)$

- 0 pt : $P_{n-1}(n) - P_{n-2}(n-1) = \displaystyle\int_{n-1}^{n} (n-t)P_{n-1}''(t)\ dt$

- 1 pt : $(n-t)P_n''(t) = (n-t)\mathrm{e}^{-t}\ \dfrac{t^{n-2}}{n!}\ (t-(n-1)) \geqslant 0$

- 1 pt : croissance de l'intégrale avec les bornes dans l'ordre croissant

22. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$P_n(n) - P_{n-1}(n) \ = \ u_n$$

où (u_n) est définie dans la partie ***III.A***. En déduire que $\big(P_n(n)\big)_{n \geqslant 1}$ et $\big(P_{n-1}(n)\big)_{n \geqslant 1}$ sont adjacentes.

- 1 pt : calcul $P_n(n) - P_{n-1}(n) = u_n$

- 1 pt : $(P_n(n))$ croissante ; $(P_{n-1}(n))$ décroissante ; $P_n(n) - P_{n-1}(n) = u_n \to 0$ donc les deux suites sont bien adjacentes

On considère dorénavant Z une variable aléatoire réelle de loi de Poisson de paramètre $n \in \mathbb{N}^*$.

23. Montrer :

$$P_n(n) = \mathbb{P}\left(\left[\frac{Z-n}{\sqrt{n}} \leqslant 0\right]\right)$$

En déduire que $\big(P_n(n)\big)_{n\geqslant 1}$ converge vers $\dfrac{1}{2}$.
(On pourra utiliser, en justifiant soigneusement, le théorème central limite)

- 1 pt : $P_n(n) = \mathbb{P}\left(\left[\dfrac{Z-n}{\sqrt{n}} \leqslant 0\right]\right) = \mathbb{P}\left([Z-n \leqslant 0]\right) = F_Z(n)$

- 1 pt : $\mathbb{P}\left([Z-n \leqslant 0]\right) = \mathbb{P}\big(\bigcup\limits_{k=0}^{n} [Z=k]\big) = \sum\limits_{k=0}^{n} \mathbb{P}\big([Z=k]\big) = \mathrm{e}^{-n} \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{n^k}{k!}$

- 1 pt : introduction $\sum\limits_{i=1}^{n} T_i$ où les $T_i \hookrightarrow \mathcal{P}(1)$ et sont indépendantes

- 1 pt : $\mathbb{E}(Z) = n = \mathbb{V}(Z)$ **donc** $\dfrac{Z-n}{\sqrt{n}} = Z^*$

- 1 pt : $P_n(n) = \mathbb{P}\left(\left[\dfrac{Z-n}{\sqrt{n}} \leqslant 0\right]\right) = F_{Z}^*(0) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \Phi(0) = \dfrac{1}{2}$

24. Montrer que $\big(P_{n-1}(n)\big)_{n\geqslant 1}$ converge et donner sa limite.

- 1 pt : convergence car suite adjacente

- 1 pt : même limite que l'autre suite adjacente soit $\dfrac{1}{2}$

25. Montrer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$P_{n-1}(n) \ \leqslant\ \frac{1}{2} \ \leqslant\ P_n(n)$$

- 2 pts : $\big(P_{n-1}(n)\big)_{n\geqslant 1}$ **croissante et convergente vers** $\dfrac{1}{2}$ **donc pour tout** n, $P_{n-1}(n) \leqslant \dfrac{1}{2}$
(1 pt si affirmé et + 1 pt si démontré)

- 1 pt : de la même façon pour tout n, $P_n(n) \geqslant \dfrac{1}{2}$

26. En déduire que $n \in \mathcal{M}(Z)$ où $\mathcal{M}(Z)$ est défini dans la partie ***II***.

- 1 pt : $\mathbb{P}([Z < n]) = \sum\limits_{k=0}^{n-1} \mathrm{e}^{-n} \dfrac{n^k}{k!} = P_{n-1}(n)$

- 1 pt : $\mathbb{P}([Z < n]) = P_{n-1}(n) \leqslant \dfrac{1}{2} \leqslant \mathbb{P}([Z \leqslant n]) = P_n(n)$ **d'après la question précédente**

27. On admettra finalement :

$$\mathcal{M}(Z) \ = \ \{n\}$$

À la lumière de ce résultat, que pensez-vous de la stratégie « généreuse » qui consisterait à choisir $\lambda = 0$ dans la modélisation effectuée dans la partie ***I*** ?

- 2 pts : voir si c'est pertinent

Partie IV : Inégalité maximale de Lévy

Soit J un entier strictement supérieur à 1. On considère J variables aléatoires mutuellement indépendantes $X_1, ..., X_J$. On suppose que pour chaque entier j tel que $1 \leqslant j \leqslant J$, la variable aléatoire X_j suit une loi de Poisson de paramètre entier non nul k et on définit $Y_j = X_j - k$. On pose enfin pour tout entier i tel que $1 \leqslant i \leqslant J$:

$$S_i \ = \ \sum_{j=1}^{i} Y_j$$

28. En utilisant le résultat de la question ***III.B.26***, vérifier que pour tout entier i tel que $1 \leqslant i \leqslant J$, 0 est une médiane de $S_J - S_i$.
Soit x un nombre réel positif. On considère :

$$\Omega_0 = \left[\max_{1 \leqslant j \leqslant J} \ S_j \leqslant x\right] \quad \text{et} \quad \Omega_1 = [S_1 > x]$$

puis pour tout entier i tel que $2 \leqslant i \leqslant J$, on note :

$$\Omega_i = \left[\max_{1 \leqslant j < i} \ S_j \leqslant x\right] \cap [S_i > x]$$

- **1 pt : $S_J - S_i = \sum\limits_{j=i+1}^{J} X_j - k\ (J-i)$ et $\sum\limits_{j=i+1}^{J} X_j \hookrightarrow \mathcal{P}\left(k\ (J-i)\right)$**
- **1 pt : $\mathbb{P}([S_J - S_i \leqslant 0] = \mathbb{P}(\left[\dfrac{U - k\,(J-i)}{\sqrt{k\,(J-i)}} \leqslant 0\right])$**
- **1 pt : et on applique *26* avec $n = J - i$**

29. Montrer que $(\Omega_0, \Omega_1, \ldots, \Omega_J)$ constitue un système complet d'événements.

- **3 pts : les événements sont 2 à 2 incompatibles (1 pt pour avoir compris la définition et 2 pts pour la démo)**
  Au maximum 2 pts si la démo est faite sans les ω
- **2 pts : la réunion donne Ω**

30. Pour tout entier i tel que $1 \leqslant i \leqslant J$, démontrer l'inclusion :

$$[S_J - S_i \geqslant 0] \cap \Omega_i \ \subset \ [S_J > x] \cap \Omega_i$$

- **2 pts : écrire ce que signifie $\omega \in [S_J - S_i \geqslant 0] \cap \Omega_i$ permet d'aboutir**

31. Montrer :

$$\mathbb{P}([S_J > x]) \ \geqslant \ \sum_{i=1}^{J} \mathbb{P}([S_J - S_i \geqslant 0] \cap \Omega_i)$$

- **1 pt : FPT sur le SCE $(\Omega_i)_{0 \leqslant i \leqslant J}$**
- **1 pt : croissance de l'application $\mathbb{P}$**

32. Pour tout entier i tel que $1 \leqslant i \leqslant J$, que peut-on dire des événements $[S_J - S_i \geqslant 0]$ et Ω_i ?

- **2 pts : indépendance d'après le théorème des coalitions**

33. Déduire de ***IV.28.***, ***IV.31.*** et de ***IV.32.*** l'inégalité :

$$\mathbb{P}\left(\left[\max_{1 \leqslant j \leqslant J} S_j > x\right]\right) \leqslant 2\,\mathbb{P}([S_J > x])$$

- **1 pt :** $\mathbb{P}([S_J - S_i \geqslant 0]) = 1 - \mathbb{P}([S_J - S_i < 0]) > 1 - \frac{1}{2} > \frac{1}{2}$
- **1 pt :** $\mathbb{P}([S_J > x]) \geqslant \sum\limits_{i=1}^{J} \mathbb{P}([S_J - S_i \geqslant 0] \cap \Omega_i) = \sum\limits_{i=1}^{J} \mathbb{P}([S_J > x]) \geqslant \sum\limits_{i=1}^{J} \mathbb{P}([S_J - S_i \geqslant 0]) \times \mathbb{P}(\Omega_i)$ **d'après *31* et par indépendance**
- **1 pt : d'où** $\sum\limits_{i=0}^{J} \mathbb{P}(\Omega_i) - \mathbb{P}(\Omega_0) \leqslant 2\mathbb{P}([S_J > x])$

Reprenons la modélisation de la partie ***I*** et soulevons le problème suivant. La valeur k que nous avons supposée connue et constante doit être dans la réalité estimée par la compagnie d'assurance à partir de son expérience passée. Elle est donc dans la réalité entachée d'incertitude et susceptible d'augmenter à mesure que le temps passe et que les clients vieillissent. Pour se prémunir contre ce phénomène, il est donc utile d'observer année après année le nombre de décès effectifs et de se doter d'un moyen de décider si on est face à une dérive « anormale » du nombre annuel de décès ou pas (afin de pouvoir agir par exemple en augmentant le montant de la prime d'assurance). Notons X_i le nombre de décès observés durant la $i^{\text{ème}}$ année d'un exercice qui en compte 5. On observe chaque $j^{\text{ème}}$ année la valeur prise par la variable aléatoire S_j.

34. On suppose que $k = 10$. Que penser si on constate après la quatrième année d'exercice que $\max\limits_{1 \leqslant j \leqslant 4} S_j$ prend la valeur 15 ?
On pourra commencer par utiliser, en justifiant soigneusement, le théorème central limite, puis que $\mathbb{P}([T > 2]) \leqslant 2,5\%$ si T est une variable aléatoire de loi normale centrée réduite.

- **2 pts : en fonction de la pertinence**