DS7 (version A)

Exercice 1

On note $\mathcal{C}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et on définit les matrices :

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad P_y = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 4 & 0 & y \\ 4 & 2 & 0 \end{pmatrix} \quad A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

On note f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ de matrice A dans la base canonique $\mathcal{C}$.
On note id l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ de matrice I dans la base canonique $\mathcal{C}$.

1. ***a)*** Calculer $(A-2I)^2$, puis vérifier que $(A-2I)^3 = 0_3$ (matrice nulle de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$).

b) En déduire que le réel 2 est l'unique valeur propre de A et déterminer une base et la dimension du sous espace propre de A associé à la valeur propre 2.

2. Montrer par la méthode du pivot que P_y est inversible si et seulement si $y \neq -1$.

3. On note dans toute la suite les vecteurs $u_1 = (0,4,4)$ et $u_2 = (2,0,2)$.

a) Déterminer l'unique vecteur u_3 de la forme $u_3 = (1,y,0)$ tel que $f(u_3) = u_2 + 2u_3$.

b) Donner la matrice de passage P de la base $\mathcal{C}$ à la famille $\mathscr{B}' = (u_1,u_2,u_3)$.
Montrer à l'aide de la question 2) que P est inversible puis justifier que la famille $\mathscr{B}'$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

c) Exprimer $f(u_1)$ en fonction de u_1, puis $f(u_2)$ en fonction de u_1 et u_2.
En déduire que la matrice T de l'endomorphisme f dans la base $\mathscr{B}'$ est $T = 2I + N$.
Donner, en la justifiant en une seule ligne, la relation liant les matrices A, T, P et P^{-1}.

On cherche maintenant à déterminer l'ensemble S des endomorphismes h de $\mathbb{R}^3$ vérifiant la relation $(\mathbf{R})$:

$$(\mathbf{R}) \qquad f \circ h = h \circ f$$

4. ***a)*** On note M' la matrice de l'endomorphisme h relativement à la base $\mathscr{B}'$.
Montrer : $(\mathbf{R}) \Leftrightarrow (N\,M' = M'\,N)$.

b) En posant $M' = \begin{pmatrix} a & a' & a'' \\ b & b' & b'' \\ c & c' & c'' \end{pmatrix}$, montrer : $(\mathbf{R}) \Leftrightarrow M' = \begin{pmatrix} a & a' & a'' \\ 0 & a & a' \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$.

c) Calculer la matrice N^2 et en déduire que $S = \mathrm{Vect}\big(\mathrm{id}, f - 2\,\mathrm{id}, (f-2\,\mathrm{id})^2\big)$.

d) On note $\mathcal{G} = (I, N, N^2)$. Montrer que $\mathcal{G}$ est libre et en déduire la dimension de S.
On note $\mathcal{F}' = (\mathrm{id}, f, f^2)$. Montrer que $\mathcal{F}'$ est une base de S.

Exercice 2

On considère l'application $\varphi :]0,+\infty[\to \mathbb{R}, x \mapsto \mathrm{e}^x - x\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$. On admet $2 < \mathrm{e} < 3$.

Partie I : Étude de la fonction φ

1. Montrer que φ est de classe $\mathcal{C}^3$ sur $]0,+\infty[$, calculer, pour tout x de $]0,+\infty[$, $\varphi'(x)$ et $\varphi''(x)$ et montrer : $\forall x \in]0,+\infty[$, $\varphi'''(x) = \mathrm{e}^x + \dfrac{3x+1}{x^5}\,\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$.

2. Étudier le sens de variation de φ'' et calculer $\varphi''(1)$.
En déduire le sens de variation de φ', et montrer : $\forall x \in]0,+\infty[$, $\varphi'(x) \geqslant \mathrm{e}$.

3. Déterminer la limite de $\varphi(x)$ lorsque x tend vers 0 par valeurs strictement positives.

4. Déterminer la limite de $\dfrac{\varphi(x)}{x}$ lorsque x tend vers $+\infty$, et la limite de $\varphi(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.

5. On admet : $15 < \varphi(3) < 16$. Montrer : $\forall x \in [3,+\infty[$, $\varphi(x) \geqslant \mathrm{e}\,x$.
On note $\mathcal{C}$ la courbe représentative de φ.

6. Montrer que $\mathcal{C}$ admet un unique point d'inflexion, déterminer les coordonnées de celui-ci et l'équation de la tangente en ce point.

7. Dresser le tableau de variations de φ, avec les limites en 0 et en $+\infty$, et la valeur en 1.
Tracer l'allure de $\mathcal{C}$ et faire apparaître la tangente au point d'inflexion.

Partie II : Étude d'extremum pour une fonction réelle de deux variables réelles

On note $U = \mathbb{R}\times\ ]0,+\infty[$ et on considère l'application : $f : U \to \mathbb{R}$, $(x,y) \mapsto xy - \mathrm{e}^x \ln(y)$.

8. Représenter graphiquement l'ensemble U.

9. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur l'ouvert U et calculer, pour tout (x,y) de U, les dérivées partielles premières et les dérivées partielles secondes de f au point (x,y).

10. Établir que, pour tout (x,y) de U, (x,y) est un point critique de f si et seulement si :

$$x > 0 \quad \text{et} \quad y = \mathrm{e}^{\frac{1}{x}} \quad \text{et} \quad \varphi(x) = 0$$

11. En déduire que f admet un point critique et un seul, et qu'il s'agit de $(1,\mathrm{e})$.

12. Est-ce que f admet un extremum local en $(1,\mathrm{e})$?

13. Est-ce que f admet un extremum local sur U ?

Partie III : Étude d'une suite et d'une série

On considère la suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 3$ et : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \varphi(u_n)$.

14. Montrer que, pour tout n de $\mathbb{N}$, u_n existe et $u_n \geqslant 3\,\mathrm{e}^n$.
(on pourra utiliser les résultats de la **Partie I**)

15. Montrer que la suite (u_n) est strictement croissante et que u_n tend vers $+\infty$ lorsque n tend vers l'infini.

16. Écrire un programme **Scilab** qui affiche et calcule le plus petit entier n tel que $u_n \geqslant 10^3$.

17. Quelle est la nature de la série de terme général $\dfrac{1}{u_n}$?

Exercice 3

Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$.

1. Montrer que, pour tout entier n tel que $n \geqslant 0$, l'intégrale $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} x^n\,\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2a^2}}\,dx$ est convergente.

2. ***a)*** Rappeler une densité d'une variable aléatoire. qui suit la loi normale d'espérance nulle et de variance a^2.
En déduire : $I_0 = a\sqrt{\dfrac{\pi}{2}}$.

b) Calculer la dérivée de l'application $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie, pour tout $x \in \mathbb{R}$, par : $\varphi(x) = \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2a^2}}$.
En déduire : $I_1 = a^2$.

3. ***a)*** Montrer, pour tout entier n tel que $n \geqslant 2$ et pour tout $t \in [0, +\infty[$:

$$\int_0^t x^n\,\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2a^2}}\,dx \;=\; -a^2\,t^{n-1}\,\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2a^2}} + (n-1)a^2 \int_0^t x^{n-2}\,\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2a^2}}\,dx$$

b) En déduire, pour tout entier n tel que $n \geqslant 2$: $I_n = (n-1)\,a^2\,I_{n-2}$.

c) Calculer I_2 et I_3.

On considère l'application $g_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie, pour tout $x \in \mathbb{R}$, par :

$$g_a(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant 0 \\ \dfrac{x}{a^2}\,\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2a^2}} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

4. Montrer que g_a est une densité.

On considère une variable aléatoire X admettant g_a comme densité.

5. Déterminer la fonction de répartition de la variable aléatoire X.

6. Montrer que la variable aléatoire X admet une espérance $\mathbb{E}(X)$ et que $\mathbb{E}(X) = a\sqrt{\dfrac{\pi}{2}}$

7. Montrer que la variable aléatoire X admet une variance $\mathbb{V}(X)$ et calculer $\mathbb{V}(X)$.

8. ***a)*** On considère une variable aléatoire U suivant la loi uniforme sur l'intervalle $]0,1]$. Montrer que la variable aléatoire $Z = a\sqrt{-2\ln(U)}$ suit la même loi que la variable aléatoire X.

b) En déduire un programme en **Scilab**, utilisant la fonction `rand`, simulant la variable aléatoire X, le réel a strictement positif étant entré par l'utilisateur.
(On rappelle que la commande `rand()` simule une variable aléatoire de loi uniforme sur $]0,1]$).

Soit un entier n tel que $n \geqslant 2$.
On dit que les variables aléatoires à densité X_1, X_2, $\cdots$, X_n sont indépendantes si, pour tout, n-uplet $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ de réels, les événements $[X_1 \leqslant x_1]$, $[X_2 \leqslant x_2]$, $\cdots$, $[X_n \leqslant x_n]$ sont mutuellement indépendants.
On admet que si n variables aléatoires à densité X_1, X_2, $\cdots$, X_n admettent une espérance, alors la variable aléatoire $X_1 + \cdots + X_n$ admet une espérance qui est égale à la somme des espérances.
On admet que si n variables aléatoires à densité X_1, X_2, $\cdots$, X_n sont indépendantes et admettent variance alors la variable aléatoire $X_1 + \cdots + X_n$ admet une variance qui est égale à la somme des variances.
On considère n variables aléatoires indépendantes X_1, X_2, $\cdots$, X_n suivant toutes la même loi que la variable aléatoire X. On dit alors que $(X_1, \ldots, X_n)$ est un n-échantillon de la v.a.r. X.

Soit Z une v.a.r. dont la loi dépend d'un paramètre θ.
Soit $(Z_1, \ldots, Z_n)$ un n-échantillon de la v.a.r. Z.
On donne les définitions suivantes.

- On dit que Y_n est un estimateur du paramètre θ si la v.a.r. Y_n s'écrit comme une fonction (dont l'expression ne dépend pas de θ) des v.a.r. Z_1, $\ldots$, Z_n.
- On dit qu'un estimateur Y_n de θ est sans biais s'il admet une espérance et si : $\mathbb{E}(Y_n) = \theta$.
- Si de plus Y_n (estimateur de θ) admet une variance, on appelle risque quadratique de Y_n le réel $r(Y_n)$ défini par : $r(Y_n) = \mathbb{E}\left((Y_n - \theta)^2\right)$.

9. On considère la variable aléatoire $A_n = \dfrac{\sqrt{2}}{n\sqrt{\pi}}\,(X_1 + X_2 + \cdots + X_n)$.

a) Montrer que la variable aléatoire A_n, est un estimateur sans biais de a.

b) Déterminer le risque quadratique de l'estimateur A_n.

On définit la variable aléatoire $M_n = \min(X_1, X_2, \cdots, X_n)$.

10. ***a)*** Montrer, pour tout $t \in [0, +\infty[$: $\mathbb{P}([M_n > t]) = \mathrm{e}^{-\frac{nt^2}{2a^2}}$.

b) En déduire la fonction de répartition de M_n.

c) Montrer que M_n est une variable aléatoire à densité, admettant g_b comme densité avec $b = \dfrac{a}{\sqrt{n}}$.

d) Montrer que la variable aléatoire M_n, admet une espérance $\mathbb{E}(M_n)$ et une variance $\mathbb{V}(M_n)$.
Calculer $\mathbb{E}(M_n)$ et $\mathbb{V}(M_n)$.

11. ***a)*** En déduire un estimateur B_n sans biais de a, de la forme $\lambda_n M_n$ avec $\lambda_n \in \mathbb{R}$.

b) Déterminer le risque quadratique de l'estimateur B_n.