DS8 (version A) /170

Exercice 1 (ESC 2008) /40

On note $\mathcal{C}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et on définit les matrices :

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad P_y = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 4 & 0 & y \\ 4 & 2 & 0 \end{pmatrix} \quad A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

On note f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ de matrice A dans la base canonique $\mathcal{C}$.
On note id l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ de matrice I dans la base canonique $\mathcal{C}$.

1. a) Calculer $(A-2I)^2$, puis vérifier que $(A-2I)^3 = 0_3$ (matrice nulle de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$).

- 1 pt : $(A - 2\,I)^2 \ = \ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix}$

- 1 pt : $(A - 2\,I)^3 \ = \ 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})}$

b) En déduire que le réel 2 est l'unique valeur propre de A et déterminer une base et la dimension du sous espace propre de A associé à la valeur propre 2.

- 1 pt : $Q(X) = (X-2)^3$ **est un polynôme annulateur de la matrice** A

- 1 pt : $\mathrm{Sp}(A) \ \subset \ \{$**racines de** $Q\} \ = \ \{2\}$

- 1 pt : 2 est valeur propre

- 3 pts : détermination $E_2(A) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ **(1 pt pour écriture du système, 1 pt pour résolution, 1 pt pour écriture sous forme de sev engendré)**

- 2 pts : $\mathcal{F} = \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ **base de** $E_2(A)$ **(1 pt pour libre, 1 pt pour génératrice)**

- 1 pt : $\dim(E_2(A)) = 1$

2. Montrer par la méthode du pivot que P_y est inversible si et seulement si $y \neq -1$.

- 2 pts (1 pt pour le calcul, 1 pt pour la rédaction)

3. On note dans toute la suite les vecteurs $u_1 = (0,4,4)$ et $u_2 = (2,0,2)$.

a) Déterminer l'unique vecteur u_3 de la forme $u_3 = (1,y,0)$ tel que $f(u_3) = u_2 + 2u_3$.

- 2 pts : $u_3 = (1,1,0)$ **(1 pt pour résolution, 1 pt pour manipulation des objets)**

b) Donner la matrice de passage P de la base $\mathcal{C}$ à la famille $\mathscr{B}' = (u_1,u_2,u_3)$.
Montrer à l'aide de la question 2) que P est inversible puis justifier que la famille $\mathscr{B}'$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

- 1 pt : $P = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 4 & 0 & 1 \\ 4 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

- 1 pt : $P = P_1$ **inversible d'après *2.***

- 3 pts : $\mathscr{B}'$ **est une base de** $\mathbb{R}^3$ **(2 pts pour libre, 1 pt pour** $\mathrm{Card}(\mathscr{B}') = 3 = \dim(\mathbb{R}^3)$**)**

c) Exprimer $f(u_1)$ en fonction de u_1, puis $f(u_2)$ en fonction de u_1 et u_2.
En déduire que la matrice T de l'endomorphisme f dans la base $\mathscr{B}'$ est $T = 2I + N$.
Donner, en la justifiant en une seule ligne, la relation liant les matrices A, T, P et P^{-1}.

- **1 pt :** $f(u_1) = 2 \cdot u_1$
- **2 pts :** $f(u_2) = 1 \cdot u_1 + 2 \cdot u_2$ **(en cas d'erreur de calcul pour** $f(u_2)$ **on attribue 1 pt/2 si la méthodo est bonne)**
- **1 pt :** $T = 2I + N$
- **1 pt :** $A = PTP^{-1}$

On cherche maintenant à déterminer l'ensemble S des endomorphismes h de $\mathbb{R}^3$ vérifiant la relation $(\mathbf{R})$:

$$(\mathbf{R}) \qquad f \circ h = h \circ f$$

4. a) On note M' la matrice de l'endomorphisme h relativement à la base $\mathscr{B}'$.
Montrer : $(\mathbf{R}) \Leftrightarrow (N\,M' = M'\,N)$.

- **1 pt :** $(\mathbf{R}) \Leftrightarrow T\,M' = M'\,T$
- **1 pt :** $T\,M' = M'\,T \Leftrightarrow NM' = M'N$

b) En posant $M' = \begin{pmatrix} a & a' & a'' \\ b & b' & b'' \\ c & c' & c'' \end{pmatrix}$, montrer : $(\mathbf{R}) \Leftrightarrow M' = \begin{pmatrix} a & a' & a'' \\ 0 & a & a' \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$.

- **2 pts : 1 pt pour écriture système, 1 pt pour résolution**

c) Calculer la matrice N^2 et en déduire que $S = \mathrm{Vect}\big(\mathrm{id}, f - 2\,\mathrm{id}, (f - 2\,\mathrm{id})^2\big)$.

- **1 pt :** $N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
- **1 pt :** $N = T - 2\,I = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(f - 2\,\mathrm{id})$
- **2 pts :** $h \in S \Leftrightarrow h \in \mathrm{Vect}\big(\mathrm{id}, f - 2\,\mathrm{id}, (f - 2\,\mathrm{id})^2\big)$ **(dont 1 pt pour manipulation des objets). Le dernier point n'est (notamment) pas accordé en cas de confusion entre** $\mathscr{L}(\mathbb{R}^3)$ **et** $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$**.**

d) On note $\mathcal{G} = (I, N, N^2)$. Montrer que $\mathcal{G}$ est libre et en déduire la dimension de S.
On note $\mathcal{F}' = (\mathrm{id}, f, f^2)$. Montrer que $\mathcal{F}'$ est une base de S.

- **1 pt :** $\mathcal{G}$ **libre**
- **2 pts :** $\mathcal{D} = \big(\mathrm{id}, f - 2\,\mathrm{id}, (f - 2\mathrm{id})^2\big)$ **base de** S **(1 pt pour libre, 1 pt pour génératrice) Pas de point supplémentaire pour :** $\dim(S) = 3$**.**
- **1 pt :** $\mathcal{F}'$ **génératrice**
- **1 pt :** $\mathrm{Card}(\mathcal{F}') = 3 = \dim(S)$

Exercice 2 (EML 2014) /61

On considère l'application $\varphi :]0,+\infty[\to \mathbb{R}, x \mapsto \mathrm{e}^x - x\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$. On admet $2 < \mathrm{e} < 3$.

Partie I : Étude de la fonction φ /27

1. Montrer que φ est de classe $\mathcal{C}^3$ sur $]0,+\infty[$, calculer, pour tout x de $]0,+\infty[$, $\varphi'(x)$ et $\varphi''(x)$ et montrer : $\forall x \in]0,+\infty[$, $\varphi'''(x) = \mathrm{e}^x + \dfrac{3x+1}{x^5}\,\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$.

- **1 pt : φ est de classe $\mathcal{C}^3$ sur $]0,+\infty[$. Ce point n'est pas attribué si la composée n'est pas détaillée.**
- **1 pt :** $\varphi'(x) = \mathbf{e}^x + \left(\dfrac{1}{x} - 1\right)\mathbf{e}^{\frac{1}{x}}$
- **1 pt :** $\varphi''(x) = \mathbf{e}^x - \dfrac{1}{x^3}\,\mathbf{e}^{\frac{1}{x}}$
- **1 pt :** $\varphi'''(x) = \mathbf{e}^x + \dfrac{3x+1}{x^5}\,\mathbf{e}^{\frac{1}{x}}$

2. Étudier le sens de variation de φ'' et calculer $\varphi''(1)$.
En déduire le sens de variation de φ', et montrer : $\forall x \in]0,+\infty[$, $\varphi'(x) \geqslant \mathrm{e}$.

- **1 pt : φ'' strictement croissante sur $]0,+\infty[$**
- **1 pt :** $\varphi''(1) = 0$
- **1 pt : variations de φ' :**

x	0		1		$+\infty$
Signe de $\varphi''(x)$		$-$	0	$+$	
Variations de φ'	$+\infty$	$\searrow$	$\mathbf{e}$	$\nearrow$	$+\infty$

- **1 pt :** $\forall x \in]0,+\infty[$, $\varphi'(x) \geqslant \mathbf{e}$

3. Déterminer la limite de $\varphi(x)$ lorsque x tend vers 0 par valeurs strictement positives.

- **2 pts :** $\lim\limits_{x\to 0^+} \varphi(x) = -\infty$ **(1 pt pour composition de limites, 1 pt pour résultat)**

4. Déterminer la limite de $\dfrac{\varphi(x)}{x}$ lorsque x tend vers $+\infty$, et la limite de $\varphi(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.

- **1 pt :** $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\varphi(x)}{x} = +\infty$
- **1 pt :** $\lim\limits_{x\to+\infty} \varphi(x) = +\infty$

5. On admet : $15 < \varphi(3) < 16$. Montrer : $\forall x \in [3,+\infty[$, $\varphi(x) \geqslant \mathrm{e}\,x$.
On note $\mathcal{C}$ la courbe représentative de φ.

- **1 pt :** $h : x \mapsto \varphi(x) - \mathbf{e}\,x$ **dérivable sur $]0,+\infty[$ + calcul dérivée**
- **1 pt :** $\forall x \in]0,+\infty[$, $h'(x) \geqslant 0$ **d'après *2.***
- **1 pt :** $\forall x \in [3,+\infty[$, $h(x) \geqslant h(3)$
- **1 pt :** $h(3) \geqslant 0$ **(car $\varphi(3) > 15$)**

6. Montrer que $\mathcal{C}$ admet un unique point d'inflexion, déterminer les coordonnées de celui-ci et l'équation de la tangente en ce point.

- **1 pt : φ change donc de concavité en 1,
seul point d'inflexion de la courbe représentative de φ**
- **1 pt : coordonnées du point d'inflexion $(1, 0)$**
- **1 pt : équation de tangente en ce point $y = \mathrm{e}\,(x-1)$**

7. Dresser le tableau de variations de φ, avec les limites en 0 et en $+\infty$, et la valeur en 1.
Tracer l'allure de $\mathcal{C}$ et faire apparaître la tangente au point d'inflexion.

- **1 pt : $\varphi(1) = 0$**
- **1 pt : TV de φ :**

x	0		1		$+\infty$
Signe de $\varphi'(x)$		$+$		$+$	
Variations de φ	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

- **4 pts : courbe représentative (1 pt pour point d'inflexion, 1 pt pour tangente en 1, 1 pt pour limites en 0 et $+\infty$, 1 pt pour propreté)**
- 1 pt : si le graphique témoigne d'une incompréhension totale de la question posée (fonction dessinée point par point, tangente qui n'en est visiblement pas une, limites non cohérentes)

Partie II : Etude d'extremum pour une fonction réelle de deux variables réelles /21

On note $U = \mathbb{R}\times\,]0, +\infty[$ et on considère l'application : $f : U \to \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto xy - \mathrm{e}^x \ln(y)$.

8. Représenter graphiquement l'ensemble U.

- **1 pt**

9. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur l'ouvert U et calculer, pour tout (x, y) de U, les dérivées partielles premières et les dérivées partielles secondes de f au point (x, y).

- **2 pts : f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur U. Aucun point si aucune des deux compositions n'est détaillée.**
- **1 pt : $\partial_1(f)(x, y) \;=\; y - \ln(y)\,\mathrm{e}^x$
et $\partial_2(f)(x, y) \;=\; x - \dfrac{\mathrm{e}^x}{y}$**
- **1 pt : $\partial^2_{1,1}(f)(x, y) \;=\; -\ln(y)\,\mathrm{e}^x$
et $\partial^2_{2,2}(f)(x, y) \;=\; \dfrac{\mathrm{e}^x}{y^2}$**
- **1 pt : $\partial^2_{1,2}(f)(x, y) \;=\; 1 - \dfrac{\mathrm{e}^x}{y}$**
- **1 pt : $\partial^2_{2,1}(f)(x, y) \;=\; 1 - \dfrac{\mathrm{e}^x}{y}$ (seulement si le théorème de Schwarz est cité)**

10. Établir que, pour tout (x,y) de U, (x,y) est un point critique de f si et seulement si :

$$x > 0 \text{ et } y = \mathrm{e}^{\frac{1}{x}} \text{ et } \varphi(x) = 0$$

- 1 pt : (x,y) point critique $\Leftrightarrow$ $\left\{\begin{array}{rcl} y - \ln(y)\,\mathbf{e}^x & = & 0 \\ x & = & \dfrac{\mathbf{e}^x}{y} \end{array}\right.$

- 2 pts : aucune solution si $x \leqslant 0$ (1 pt sur 2 pour un début d'idée)

- 1 pt : pour l'écriture de y en fonction de x

- 1 pt : pour en déduire $\varphi(x) = 0$

- 1 pt : pour le reste

11. En déduire que f admet un point critique et un seul, et qu'il s'agit de $(1, \mathrm{e})$.

- 3 pts : 1 est l'unique solution de l'équation $\varphi(x) = 0$ sur $]0,+\infty[$ (1 pt pour hypothèses théorème de la bijection, 1 pt pour $\varphi\big(]0,+\infty[\big) =]-\infty,+\infty[$, 1 pt pour $0 \in]-\infty,+\infty[$)

- 1 pt : $(1, \mathbf{e})$ seul point critique de f sur U (fin de résolution du système)

12. Est-ce que f admet un extremum local en $(1, \mathrm{e})$?

- 1 pt : $\nabla^2(f)(1,\mathbf{e}) = \begin{pmatrix} -\mathbf{e} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\mathbf{e}} \end{pmatrix}$

- 1 pt : $\mathrm{Sp}\left(\nabla^2(f)(1,\mathbf{e})\right) = \{-\mathbf{e}, \frac{1}{\mathbf{e}}\}$

- 1 pt : $(1, \mathbf{e})$ n'est pas un extremum local

13. Est-ce que f admet un extremum local sur U ?

- 1 pt

Partie III : Etude d'une suite et d'une série /13

On considère la suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 3$ et : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \varphi(u_n)$.

14. Montrer que, pour tout n de $\mathbb{N}$, u_n existe et $u_n \geqslant 3\,\mathrm{e}^n$.
(On pourra utiliser les résultats de la ***Partie I***).

- 3 pts : 1 pt pour initialisation, 2 pts pour hérédité

15. Montrer que la suite (u_n) est strictement croissante et que u_n tend vers $+\infty$ lorsque n tend vers l'infini.

- 1 pt : $u_n \in [3,+\infty[$

- 1 pt : (u_n) strictement croissante

- 1 pt : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$

16. Écrire un programme **Scilab** qui affiche et calcule le plus petit entier n tel que $u_n \geqslant 10^3$.

- **5 pts : 1 pt pour initialisation, 1 pt pour condition de la boucle `while`, 2 pts pour contenu de la boucle, 1 pt pour `disp`**

```
n = 0
u = 3
while u < 10 ^ 3
  u = exp(u) - u * exp(1/u)
  n = n + 1
end
disp(n)
```

17. Quelle est la nature de la série de terme général $\dfrac{1}{u_n}$?

- **2 pts : critère de comparaison des SATP**

Exercice 3 (EML 2012) /70

Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$.

1. Montrer que, pour tout entier n tel que $n \geqslant 0$, l'intégrale $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} x^n \, \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2a^2}} \, dx$ est convergente.

- **1 pt :** $x \mapsto x^n \, \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2a^2}}$ **est continue sur** $[0, +\infty[$
- **3 pts : critère de négligeabilité des intégrales généralisées de fonctions continues positives**
- **1 pt :** $x \mapsto x^n \, \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2a^2}}$ **est continue sur** $[0, 1]$**, donc** $\displaystyle\int_0^1 x^n \, \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2a^2}} \, dx$ **est bien définie.**

2. *a)* Rappeler une densité d'une variable aléatoire. qui suit la loi normale d'espérance nulle et de variance a^2.
En déduire : $I_0 = a \sqrt{\dfrac{\pi}{2}}$.

- **1 pt :** $f_X : x \mapsto \dfrac{1}{a\sqrt{2\pi}} \, \mathrm{e}^{-\dfrac{x^2}{2a^2}}$
- **1 pt :** $I_0 = a\sqrt{2\pi} \displaystyle\int_0^{+\infty} f_X(t) \, dt$
- **2 pts :** $\displaystyle\int_0^{+\infty} f_X(t) \, dt = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(t) \, dt$ **par changement de variable (attribuer 1 pt si la parité seule est citée)**
- **1 pt :** $\displaystyle\int_0^{+\infty} f_X(t) \, dt = \frac{1}{2}$

  et $I_0 = a\sqrt{\dfrac{\pi}{2}}$

b) Calculer la dérivée de l'application $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie, pour tout $x \in \mathbb{R}$, par : $\varphi(x) = \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2a^2}}$.
En déduire : $I_1 = a^2$.

- 1 pt : φ dérivable sur $\mathbb{R}$

- 1 pt : $\forall x \in \mathbb{R}$, $\varphi'(x) = -\dfrac{1}{a^2}\ x\,\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2a^2}}$

- 1 pt : $\displaystyle\int_0^A \ x\,\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2a^2}} = -a^2\,\mathrm{e}^{-\frac{A^2}{2a^2}} + a^2$

- 1 pt : $I_1 = a^2$ (croissances comparées)

3. a) Montrer, pour tout entier n tel que $n \geqslant 2$ et pour tout $t \in [0, +\infty[$:

$$\int_0^t \ x^n\,\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2a^2}}\ dx \ = \ -a^2\,t^{n-1}\,\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2a^2}} + (n-1)a^2 \ \int_0^t \ x^{n-2}\,\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2a^2}}\ dx$$

- 2 pts : 1 pt pour u et v de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,t]$, 1 pt pour calcul

b) En déduire, pour tout entier n tel que $n \geqslant 2$: $I_n = (n-1)\,a^2\,I_{n-2}$.

- 1 pt : les intégrales en présence sont convergentes

- 1 pt : $\displaystyle\lim_{t \to +\infty} \ t^{n-1}\,\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2a^2}} = 0$

c) Calculer I_2 et I_3.

- 1 pt : $I_2 = a^3\sqrt{\dfrac{\pi}{2}}$

- 1 pt : $I_3 = 2a^4$

On considère l'application $g_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie, pour tout $x \in \mathbb{R}$, par :

$$g_a(x) = \begin{cases} \quad 0 & \text{si } x \leqslant 0 \\ \dfrac{x}{a^2}\ \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2a^2}} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

4. Montrer que g_a est une densité.

- 4 pts : 1 pt pour continuité sur $\mathbb{R}$ sauf en 0, 1 pt pour positivité, 2 pts pour $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \ g_a(x)\ dx$ converge et vaut 1.

On considère une variable aléatoire X admettant g_a comme densité.

5. Déterminer la fonction de répartition de la variable aléatoire X.

- 1 pt : si $x \in \,]-\infty, 0]$, $F_X(x) = 0$

- 2 pts : si $x \in \,]0, +\infty[$, $F_X(x) = 1 - \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2a^2}}$ (1 pt pour g_a nulle en dehors de $]0, +\infty[$, 1 pt pour calcul)

6. Montrer que la variable aléatoire X admet une espérance $\mathbb{E}(X)$ et : $\mathbb{E}(X) = a\sqrt{\frac{\pi}{2}}$.

- **1 pt : X admet une espérance si et seulement si l'intégrale impropre $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t\, g_a(t)\ dt$ est absolument convergente, ce qui équivaut à démontrer la convergence pour les calculs de moments du type $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t^m g_a(t)\ dt$.**
- **1 pt : g_a nulle en dehors de $]0, +\infty[$**
- **1 pt : $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^2\, \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2a^2}}\ dt$ converge d'après *1.***
- **1 pt : $\mathbb{E}(X) \ = \ a\sqrt{\frac{\pi}{2}}$**

7. Montrer que la variable aléatoire X admet une variance $\mathbb{V}(X)$ et calculer $\mathbb{V}(X)$.

- **1 pt : X admet une moment d'ordre 2 si et seulement si l'intégrale impropre $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t^2\, g_a(t)\ dt$ est absolument convergente, ce qui équivaut à démontrer la convergence pour les calculs de moments du type $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t^m g_a(t)\ dt$.**
- **1 pt : $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^3\, \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2a^2}}\ dt$ converge donc X admet un moment d'ordre 2 (donc une variance)**
- **1 pt : $\mathbb{E}(X^2) \ = \ 2\, a^2$**
- **1 pt : $\mathbb{V}(X) \ = \ \dfrac{4-\pi}{2}\ a^2$ (par formule de KH)**

8. a) On considère une variable aléatoire U suivant la loi uniforme sur l'intervalle $]0,1]$. Montrer que la variable aléatoire $Z = a\sqrt{-2\ln(U)}$ suit la même loi que la variable aléatoire X.

- **1 pt : $Z(\Omega) = [0, +\infty[$**
- **1 pt : si $x \in\ ]-\infty, 0[$, $F_Z(x) = 0$**
- **3 pts : si $x \in\ [0, +\infty[$, $F_Z(x) = 1 - \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2a^2}}$ (1 pt pour $a > 0$, 1 pt pour stricte croissance de $x \mapsto x^2$ sur $[0, +\infty[$, 1 pt pour U v.a.r. à densité, 1 pt pour $\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2a^2}} \in\ ]0,1]$)**
- **1 pt : la fonction de répartition caractérise la loi**

b) En déduire un programme en **Scilab**, utilisant la fonction `rand`, simulant la variable aléatoire X, le réel a strictement positif étant entré par l'utilisateur.
(On rappelle que la commande `rand()` simule une variable aléatoire de loi uniforme sur $]0,1]$).

- **4 pts : 1 pt par ligne**

```
a = input('Prière d’entrer une valeur strictement positive')
u = rand()
x = a ⋆ sqrt(-2 ⋆ log(u))
disp(x)
```

Soit un entier n tel que $n \geqslant 2$.
On dit que les variables aléatoires à densité X_1, X_2, $\cdots$, X_n sont indépendantes si, pour tout, n-uplet $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ de réels, les événements $[X_1 \leqslant x_1]$, $[X_2 \leqslant x_2]$, $\cdots$, $[X_n \leqslant x_n]$ sont mutuellement indépendants.
On admet que si n variables aléatoires à densité X_1, X_2, $\cdots$, X_n admettent une espérance, alors la variable aléatoire $X_1 + \cdots + X_n$ admet une espérance qui est égale à la somme des espérances.
On admet que si n variables aléatoires à densité X_1, X_2, $\cdots$, X_n sont indépendantes et admettent variance alors la variable aléatoire $X_1 + \cdots + X_n$ admet une variance qui est égale à la somme des variances.
On considère n variables aléatoires indépendantes X_1, X_2, $\cdots$, X_n suivant toutes la même loi que la variable aléatoire X.
Soit Y_n une variable aléatoire. On donne les deux définitions suivantes :

- si Y_n admet une espérance, on dit que Y_n est un estimateur sans biais de a si : $\mathbb{E}(Y_n) = a$.
- si de plus Y_n admet une variance, on appelle risque quadratique de Y_n le réel $r(Y_n)$ défini par : $r(Y_n) = \mathbb{E}\left((Y_n - a)^2\right)$.

9. On considère la variable aléatoire $A_n = \dfrac{\sqrt{2}}{n\sqrt{\pi}}\,(X_1 + X_2 + \cdots + X_n)$.

a) Montrer que la variable aléatoire A_n, est un estimateur sans biais de a.

- **1 pt : A_n admet une espérance**
- **2 pts : $\mathbb{E}(A_n) = a$ (1 pt pour linéarité de l'espérance, 1 pt pour reste du calcul)**

b) Déterminer le risque quadratique de l'estimateur A_n.

- **1 pt : A_n admet une variance**
- **1 pt : $r(A_n) = \mathbb{V}(A_n)$**
- **3 pts : $\mathbb{V}(A_n) = \dfrac{1-\pi}{n\pi}\, a^2$ (1 pt pour propriété de la variance, 1 pt pour indépendance des X_i, 1 pt pour reste du calcul)**

On définit la variable aléatoire $M_n = \min(X_1, X_2, \cdots, X_n)$.

10. ***a)*** Montrer, pour tout $t \in [0, +\infty[$: $\mathbb{P}([M_n > t]) = \mathrm{e}^{-\frac{nt^2}{2a^2}}$.

- **1 pt : $[M_n > t] = \bigcap\limits_{i=1}^{n} [X_i > t]$**
- **1 pt : indépendance des X_i**
- **1 pt : $F_{X_i}(t) = 1 - \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2a^2}}$ d'après *5.* car $t \geqslant 0$**
- **1 pt : $\mathbb{P}([M_n > t]) = \mathrm{e}^{-\frac{nt^2}{2a^2}}$**

b) En déduire la fonction de répartition de M_n.

- **1 pt : si $t < 0$, $F_{M_n}(t) = 0$**
- **1 pt : si $t \geqslant 0$, $F_{M_n}(t) = 1 - \mathrm{e}^{-\frac{nt^2}{2a^2}}$**

c) Montrer que M_n est une variable aléatoire à densité, admettant g_b comme densité avec $b = \dfrac{a}{\sqrt{n}}$.

- **1 pt : M_n v.a.r. à densité car on reconnaît fdr de X avec pour paramètre $\dfrac{a}{\sqrt{n}}$ (à la place de a)**
- **1 pt : M_n est de densité g_b avec $b = \dfrac{a}{\sqrt{n}}$**

d) Montrer que la variable aléatoire M_n, admet une espérance $\mathbb{E}(M_n)$ et une variance $\mathbb{V}(M_n)$. Calculer $\mathbb{E}(M_n)$ et $\mathbb{V}(M_n)$.

- 1 pt : M_n **admet une espérance et une variance d'après *6.* et *7.***

- 1 pt : $\mathbb{E}(M_n) = a \sqrt{\dfrac{\pi}{2n}}$

- 1 pt : $\mathbb{V}(M_n) = \dfrac{4-\pi}{2} \; \dfrac{a^2}{n}$

11. a) En déduire un estimateur B_n sans biais de a, de la forme $\lambda_n M_n$ avec $\lambda_n \in \mathbb{R}$.

- 2 pts : $B_n = \sqrt{\dfrac{2n}{\pi}} \; B_n$

b) Déterminer le risque quadratique de l'estimateur B_n.

- 1 pt : $\mathbb{V}(B_n) = \dfrac{4-\pi}{\pi} \; a^2$